MARELLO CARLO
Ingegnere

BACCIAR MICHELE
Grande U,, cici ...a Italia
Commendatore ...SI. e L.
CAPO COMPARTIMENTO 1° Gr.
FERROVIE STATO

Gift of
BERN DIBNER

BACCIARELLO ING. MICHELE
Grande Ufficiale Corona Italia
Commendatore SS. M. e L.
CAPO COMPARTIMENTO 1° Gr.
FERROVIE STATO

C. I. GIULIO

Lezione 1.ª

Prolegomeni.

La Meccanica è la scienza, che tratta del moto, e dell'equilibrio dei corpi. Una porzione di materia definita, ossia limitata in tutti i sensi dicesi corpo. Materia è tutto ciò, che agisce sui nostri sensi. Non però tutta la materia è corpo. così per es.° l'etere è materia, ma l'etere non è un corpo, perchè non occupa una determinata parte dello Spazio. Lo Spazio occupato da un corpo si chiama il volume di tal corpo. I limiti, che separano la porzione dello Spazio occupata da un corpo dal rimanente dello Spazio, si chiamano Superficie del corpo. La relazione, che passa fra i diversi punti della Superficie di un corpo costituisce la figura del corpo, ossia la forma della sua Superficie.

Un fenomeno, che si vede ad ogni tratto, si è che un corpo passa da una posizione ad un'altra; questo fenomeno dicesi moto, ossia passaggio di un corpo da un luogo ad un'altro dello Spazio; Un corpo, che sia privo di moto, è nello Stato di riposo, quindi la quiete o permanenza di un corpo nello stesso luogo dicesi negazione di moto. Per conoscere se un corpo si muova bisogna sapere se il corpo ha cangiato di posizione; ciò non si può sapere se il corpo non è circondato da punti, che si possano rispetto a esso corpo

considerare come fissi, il moto si determina adunque riferendo la posizione del corpo a punti, che si considerano come fissi; ma questi punti possono essere mobili; così per es.o alla Sup.e della terra ci accorgiamo del moto di un corpo riferendo la sua posizione ai corpi, che le circondano i quali rispetto a lui sono fissi, quantunque si muovano unitamente alla terra intorno al Sole; Progredendo ancora ci accorgiamo, che la terra si muove nello spazio riferendo la sua posizione al Sole, che rispetto ad essa non si muove; non perciò conchiudiamo, che il Sole non si muova, potendo essere benissimo, che anch'esso si muova nello spazio trascinando seco la terra e tutti gli altri pianeti. Se non vi sono punti fissi, a cui riferire la posizione di un corpo, non possiamo asserire. se un corpo si muova, ono, quindi propriamente nello spazio, ossia nel vacuo assoluto non vi ha moto.

Il moto si distingue in assoluto e relativo; il moto assoluto è quando la posizione successiva di un corpo è riferita a punti fissi; e relativo quando è riferita a punti mobili. Dalle osservazioni fatte poco fa ne deriva, che ~~perciocchè tutti~~ i moti, di cui noi ci possiamo accorgere sono relativi.

Quello, che si è detto del moto, si applica pure alla quiete, la quale perciò si divide pure in quiete assoluta ed in quiete relativa.

Un corpo, di cui tutte e tre le dimensioni fossero infinitamente piccole vien detto punto od elemento materiale.

D5

MSS 268 B
RB NMAH

Quando un punto si muove si debbono considerare, la via per cui cammina, il tempo in cui cammina, e la cagione per cui cammina.

Un punto non può cangiare di posizione, se non per successione o continuità, descrivendo così una linea, che vien detta la trajettoria del punto; che se è poi una linea rientrante, ossia una curva chiusa, e il corpo continua perpetuamente a percorrerla, il moto sarà periodico, e la linea dicesi orbita.

Considerato il moto di un punto passiamo a quello di un corpo, nel quale o tutti, od il maggior numero dei suoi punti si muove; e considerando prima il moto in cui tutti i punti del corpo si muovono descrivendo delle linee rette e parallele, diremo questo moto progressivo rettilineo; che se i punti del corpo descrivano tutti delle curve identicamente eguali e parallele, il moto dicesi progressivo curvilineo; in questi moti basta conoscere il movimento di un punto per saperne gli altri.

Altro moto è quello di rotazione del corpo intorno ad un' asse fisso, nel qual caso non tutti i punti del corpo si muovono, nè tutti gli altri si muovono egualmente; il moto rotatorio è più sensibile a misura, che si allontana dall' asse, ed è nullo all' asse.

Altro moto è quello di rotazione attorno ad un punto fisso; in questo moto tutti i punti del corpo si muovono, ~~descrivendo~~ curve parallele ma non eguali, se il punto fisso non appartiene al corpo.

Il moto progressivo, ed il moto rotatorio contengono in se tutti i moti immaginabili. Un punto, e generalmente un corpo può avere questi due moti contemporaneamente, come è appunto della terra, e degli altri pianeti.

Finora non si è tenuto conto del tempo, ma solamente si è considerata la via.

Quando si dice, che un corpo va presto, o adagio si includono le due idee di spazio percorso, e di tempo impiegato a percorrerlo.

La proprietà, per cui un corpo in un dato tempo percorre uno dato spazio più o meno lungo dicesi velocità, quindi la velocità dinota, se un corpo va presto o adagio. La velocità è tanto più grande, quanto il tempo è più piccolo negli spazii uguali; nei spazii diseguali e tempi eguali è tanto maggiore, quanto lo spazio è più grande: In termini matematici diremo, dunque, che la velocità è inversamente proporzionale ai tempi, e direttamente agli spazii.

L'unità di tempo sarà generalmente il minuto secondo. Un corpo diremo, che ha una velocità di 3 metri, se in un minuto secondo percorrerà 3 metri; ossia misureremo la velocità di un corpo dallo spazio da esso percorso nell'unità di tempo. Se un corpo nel tempo t percorre lo spazio s, nel tempo 1 percorrerà lo spazio $\frac{s}{t}$; il quoziente adunque dello spazio diviso pel tempo darà lo spazio percorso nell'unità di tempo, ossia la velocità V, onde si avrà $V = \frac{S}{T}$.

Due corpi nello stesso tempo T percorrono l'uno lo spazio S, e l'altro S'; la velocità del primo sia V, quella del secondo V', si avrà dietro le

definizione $V : V' :: S : S'$

Un'altro corpo si muove in modo, che percorre lo stesso spazio S, ma impiega un tempo T'' differente; si avrà, chiamando V'' la sua velocità $V : V'' :: T'' : T$; adesso paragoniamo V' col V''; si avrà $1 : \frac{V'}{V''} :: \frac{S''}{T''} : \frac{S'}{T'}$; (Per simmetria introduco $T'' = T$, ed $S'' = S$) ossia $\frac{V'}{V''} = \frac{S'T''}{S''T'}$.

L'unità di velocità è quella, per cui percorre un corpo l'unità di spazio nell'unità di tempo. L'unità di spazio per noi sarà 1 m.

Se pongo $V'' = 1$, di avrà $S'' = 1$. $T'' = 1$, quindi $V' = \frac{S'}{T'}$.

Lezione 2.ª

Oltre il moto considerato, in cui il mobile percorre lo stesso spazio in egual tempo, havvi un'infinità di altri moti. Havvi il moto accelerato, nel quale la velocità del corpo va continuamente crescendo; un corpo per es.° che nel 1.° secondo percorra un metro, nel 2.° due metri, nel 3.° tre, etc, si muove con moto accelerato; ma non basta scorgere ciò per potersi dire, che si muova con moto accelerato; bisogna pure, che la velocità vada continuamente crescendo, ossia, che la velocità di un metro, che il corpo acquistò alla fine del 2.° secondo, l'abbia acquistata poco per volta in tutti gli intervalli di tempo successi tra il 1.° ed il 2.° secondo, e così che la velocità di un metro acquistata nel

passaggio dal 2^do al 3° secondo, l'abbia acquistata poca per volta in questo intervallo di tempo, etc.

Un corpo, che nel 1° secondo percorre 1^m., e che poco per volta ~~acquista~~ dopo il 2° secondo ha acquistata una velocità di 4^m., ~~dopo~~ nel 3° una velocità di 9^m. etc si muove con moto accelerato, infiniti altri vi sono moti accelerati.

I moti, in cui la velocità va continuamente scemando, si dicono ritardati. Si nel moto accelerato, che nel ritardato bisogna che l'aumento, o la diminuzione di vel.^à si faccia con continuità, ossia bisogna che la velocità cresca o diminuisca, come crescono o diminuiscono le ordinate di una linea col crescere o diminuire delle ascisse, ed a questo bisogna ben porre mente; chè se il corpo nel 1° secondo per es.° si muovesse con una velocità di 3^m., la quale conservasse sino al fine del 2^do secondo, nel qual tempo tutto ad un tratto acquistasse una vel.^à di 6^m. per conservarla sino alla fine del 3° secondo, per quindi istantaneamente di nuovo acquistarne un' altra di 9^m., e così di seguito, allora il moto non sarebbe più accelerato, ma per salti.

Considerammo la via, ed il tempo, restano a considerarsi le cause per cui i corpi si muovono.

I corpi sono dotati di certe proprietà, delle quali alcune sono proprie di tutti i corpi, altre variano col variare dei corpi, così tutti i corpi sono

pesanti, non tutti sono buoni conduttori del calorico, e dell'
elettrico; onde le proprietà generali, e le proprietà particolari
dei corpi.

Le proprietà generali della materia si distinguono in proprietà
essenziali, senza le quali non possono da noi concepirsi i corpi;
ed in altre, che a noi non appajono essenziali, vale a dire che
possiamo figurarci il corpo senza tali proprietà, quantunque
esse siano comuni a tutti i corpi.

L'estensione è una proprietà essenziale dei corpi.

Due particelle materiali distinte non possono esistere nel med°
tempo nello stesso luogo. Questa è una proprietà essenziale dei
corpi, e dicesi impenetrabilità. Ciò però non va inteso in modo
assoluto, poichè le molecole di un corpo possono introdursi tra le
molecole di un'altro, come accade dello zucchero nell'acqua, tra
gli atomi di un corpo esistendo, come vedremo a suo luogo, distanze
rispettivamente immense. L'impenetrabilità dunque appartiene
alle molecole, e non ai volumi finiti dei corpi.

Una terza proprietà essenziale dei corpi è l'inerzia, cioè quella,
per cui ciascuna porzion di materia ha in se stessa ragion
sufficiente di mettersi in moto, o di costituirsi in riposo.

Quindi ognivolta, che vediamo un corpo a cangiar di stato,
o muovendosi dallo stato di riposo, o costituendosi in riposo dallo stato
di moto, conchiudiamo, che qualche ragione esterna al corpo ha

osservato su di esso.

Della 1ª parte, che un corpo non può da se darsi il moto, possiamo convin-cerci facilmente, e l'esperienza dei corpi, che ci circondano, ce lo dimostra. Qualcuno può obbiettare qui, ~~dicendo~~ dicendo, che se prendiamo un corpo nelle mani, lo lasciamo ridurre al riposo, e quindi allarghiamo le mani, senza dargli alcuna spinta, il corpo cade; Ma, dico io, perchè il corpo cade sempre verticalmente, e mai obliquamente, e taglia mai in altra direzione? Se si vuol dar la spontaneità ai corpi, perchè alcune volte non si fermerebbero in aria, ma invece sempre dal principio dell'universo fino a questo momento un corpo abbandonato a se stesso cade verticalmente? Siamo forzati a concludere, che esiste una ragione, la quale noi non conosciamo e che attira tutti i corpi verso la terra. Vediamo un'animale muoversi da se, non dobbiamo concludere, che il corpo di quell'animale abbia in se la facoltà di muoversi, poichè se mentre corre, gli diamo una mazzata sul capo, il corpo si ferma sul momento, e la mazzata possiamo darglela in modo, che il capo resti schiacciato senza che nelle sue molecole del corpo avvenga alcun disordine bastante da se a fermare il corpo. Facile è il rispondere ad altre simili obbiezioni, epperò concludiamo, che nessun corpo può da se prender moto.

La 2ª parte, che un corpo non può togliersi il moto è un pò più difficile a comprendersi come esista; e ciò perchè ~~spesso~~ non vediamo corpo,

che, messo in moto, poco pervolta non perda la sua velocità.

c. di Galenio Ciò non proviene, che dalla resistenza dei corpi,
che attorniano il corpo, che si muove; e infatti ammessa,
che si tolgono tali resistenze, il corpo dura sempre di più
nello stato di moto. Non vi è dunque estinzione spontanea
di moto. Le cagioni, qualunque sieno, che sono capaci di
mettere un corpo in moto, o di costituirlo in riposo, chiamansi
forze. Vi sono diverse classi di forze. Le forze muscolari.
La forza di gravità, per cui tutti i corpi cadono alla sup.e della
terra. La forza di esplosione della polvere accesa.
L'elasticità dell'aria, del vapore acqueo. La forza magnetica,
per cui la calamita attrae il ferro. La forza elettrica.
L'urto.

Non è scopo della Meccanica di trovare la maniera, con
cui ~~una forza agisce~~ il moto si genera e si estingue, ma
solamente per quali gradi ciò succeda quando il corpo è
soggetto all'azione di una forza.

Ogni qualunque forza in Meccanica si considera solamente
come producente o estinguente il moto.

Ogni corpo abbandonato a se stesso camminerà necessariamente, dopo che ha ricevuto un'impulso, o fu soggetto all'azione di una forza qualunque
equabilmente in linea retta.

Un corpo non può spontaneamente cangiare nè la velocità, nè la direzione del suo moto, poichè l'accrescere, od il diminuire la velocità di un corpo di una data quantità è lo stesso, come lo imprimergli la ~~stessa~~ quando era in riposo, o ~~stessa~~ ridurlo allo stato di riposo, quandochè avesse soltanto avuto di velocità una quantità eguale alla totta, essendo i moti relativi, come si è detto.

Le cause intermittenti, che producono serie di moti crescenti a certi intervalli di tempo si chiamano impulsi.

Le forze continuamente operanti si chiamano forze continue, o motrici. Una forza motrice accelera o ritarda il moto secondo che agisce nel senso del moto, od in senso contrario.

Dovunque vi ha cambiamento di velocità o di direzione vi è stata l'azione di una forza od istantanea o continua.

Due o più forze motrici, che agiscono su di un corpo istantaneamente e simmetricamente al corpo non producono alcun moto. Habbiamo dei corpi in istato di equilibrio, e deve distinguersi dal riposo, il quale non è che negazione di moto.

L'azione 3.ª

Non vi ha azione ~~meccanica~~ meccanica, che non impieghi nella sua azione un poco di tempo, quindi gli impulsi propriamente detti sono anche forze motrici. Ogni impulso è perciò una forza motrice, ~~che~~ cui ~~è stato~~ l'azione comincia

di fatti natura in un tempo brevissimo, che sfugge alla nostra osservazione.

Effetto delle forze motrici è di accelerare o ritardare il moto di un corpo coll'andar del tempo.

Un corpo fu sotto l'azione di una forza A, alla fin del tempo 1" dal momento, in cui cessò di agire la forza trovo, che ha percorso uno spazio 2700 m., concludo, che il corpo percorre 3 m. per secondo; stacco la forza A ne applico una B, camminare di mobile per lascio un quarto d'ora, dopo aver tolta di nuovo la forza trovo, che il corpo ha una velocità di 5 m. per secondo. Si dovrà concludere, che l'intensità della forza B è maggiore dell'intensità della forza A, e che B:A::5:3, e in generale che le forze sono proporzionali alle velocità da esse comunicate al corpo in uno stesso tempo.

Per classificare tutte le forze della natura si possono quindi tutte applicare ad un corpo, e vedere, che velocità gli imprimano in tempi eguali, o pia nell'unità di tempo. Maciò non basta, bisogna ancora fissare una forza, a cui si possano paragonare tutte le altre; si sceglie per unità di forza quella, che applicata ad un dato corpo, nell'unità di tempo produce l'unità di velocità. Ciò posto, quando troverò una forza per es. che imprime al dato corpo una velocità 15 nell'unità di tempo, dirò, che quella forza è 15. Oltre le forze costanti, si possono concepire delle forze variabili, come sarebbe quella di un cavallo, che a forza di camminare, va rallentando il moto, e ci-

ferma; tali forze fanno crescere la velocità del corpo, o la fanno diminuire, o la fanno crescere per un tempo, e poi diminuire, e poi di nuovo crescere, e così di seguito.

Per misurare queste forze variabili applico la forza al corpo, e quindi osservo, che velocità abbia comunicato al corpo in un' intervallo piccolissimo di tempo, per es° in un millesimo di secondo, trovo per es°. che è 0,00025 la misura della forza; concludo, che in quel momento era 0,00025 /1000 = 0,25; e dico, che tal forza è 0,25.

Generalizzo la cosa. Ho una forza, che varia da un momento all'altro; in un tempo t la imprime al corpo una velocità V; per misurare questa forza, la lascio operare ancora per un istante piccolissimo, e meglio ancora per un istante infinitesimo, che chiamo in lingua di Calcolo Differenziale dt; la velocità ~~del tempo~~ totale alla fine del tempo $t+dt$, ~~tutto~~ sarà $V+dV$, e la misura della forza $\frac{dV}{dt}$. Altri dicono $V=f(t)$, per es° $V=ht^2$, allora siccome $\frac{dV}{dt}=2ht$, la misura della forza vedremo essere $2ht$. Il rapporto $\frac{dV}{dt}$ i Meccanici l'hanno chiamato forza acceleratrice, noi per ora lo chiameremo ragione di accelerazione. Dunque per avere la misura di una forza variabile bisogna osservare la velocità, che la forza imprime al corpo dato, posto per un istante piccolissimo, e ne avrà approssimativamente la misura dividendola per quel tempo. Di istante in istante in più Operò.

Coi metodi accennati si ha la misura di una forza qualunque costante o variabile in un tempo qualunque, ma bisogna sempre poter applicare la forza al corpo fisso. Ora ciò non è possibile, se si volesse per es° misurare la forza, che fa

muover la luna nella sua orbita, come fare?

Perciò osservo, che quanto più è di materia in un corpo tanto più forza ci vuole per imprimergli una data velocità. La quantità di materia contenuta in un corpo dicesi massa; Dunque la forza è proporzionale alla massa, e si può dividere delle masse applicandovi la stessa forza. Per conoscere l'intensità di una forza applicata ad un corpo, bisogna dunque tener conto non solo della velocità, e del tempo, ma anche della massa. Siccome la forza è proporzionale alla velocità impressa nell' unità di tempo, ed alla massa, ne segue, che è proporzionale al prodotto della massa per la velocità prodotta nell' unità di tempo. Ciò essendo prendiamo per misura di una forza costante il prodotto MV, M essendo la massa. V la velocità dell' unità di tempo. Per le forze variabili la misura sarà $M\frac{dV}{dt}$. Siccome le masse sono proporzionali ai pesi, facile è il trovare il rapporto delle masse di due, o più corpi pesandole.

Quindi, se troveremo, che una forza costante f in un tempo t produce una velocità V sulla massa M, diremo, che $f = \frac{MV}{t}$.

Se $M=1$, $V=1$, $t=1$, allora $f=1$, dunque l'unità di forza sarà quella, che imprime nel tempo 1 una velocità 1 ad un corpo, la cui massa sia 1. L'unità di massa la lasciamo ancora arbitraria.

Lezione 4.ª

Le forze ignote a noi nella loro natura intima si conoscono soltanto per gli effetti, che producono dei corpi. Per conoscere questi effetti le misuriamo. Per le forze motrici costanti abbiamo dedotta $f = \frac{MV}{t}$. Il valore della forza motrice variabile si ha sorprendendo la forza in un istante infinitesimo, abbiamo trovata $f = M\frac{dV}{dt}$.

Sugli impulsi opereremo, come sulle forze motrici; poichè, come s'è detto, gli impulsi sono anche forze motrici, e ciò ora puossi dimostrare. Infatti una forza, perchè in un tempo nullo produca una velocità, bisogna, che sia infinita, essendo $f = \frac{V}{t}$ ora non esistono forze infinite nella natura, dunque non esistono forze istantanee tutte sono motrici & continue.

Potendo misurare le forze nel modo anzidetto, possiamo trovare i rapporti di tali forze, che vogliamo. Facciamone alcuni esempi.

Si spara un fucile, si domanda il rapporto tra la forza della polvere, che caccia fuori la palla dal fucile, ed il peso della palla. In questo caso la massa è sempre la stessa, basta dunque tener conto della velocità del tempo.

Tutti i corpi cadendo liberamente nel vacuo ~~acquistano~~ percorrono nello stesso tempo gli stessi spazii acquistando la stessa velocità, che è 9.m81 per secondo; questo è fatto d'osservazione. Dunque la misura della forza di gravità è 9.m81.

La palla è sollecitata dalla forza della polvere dal momento dell'accensione sino all'uscita dalla canna del fucile. La forza della polvere in tal tempo realmente è variabile, essendo piccolissimo il tempo considerandolo come

costante, e supponiamo d'aver trovato che in $\frac{1}{100}$ di secondo la palla ha descritto uno spazio ~~acquista una velocità~~ di 200 m., ~~per minuto secondo~~ la velocità sarà $\frac{200}{\frac{1}{100}}$ ossia 20000 m.; ora le forze son proporzionali alle velocità, D'unque la forza della polvere sta alla forza di gravità della palla come il 20000 sta al 9,81, ossia tali due forze stanno nel rapporto $\frac{2000000}{981} = 2038,\ldots$; d'approssimativamente diremo, che la forza della polvere è 2000 volte maggiore del peso della palla.

Altro esempio.

Scaglio una palla di neve contro un muro. Ho in questo caso due forze, il mio braccio, ed il muro, che resiste distruggendo la velocità della palla; qui bisogna ancora badare al tempo, ma non più alla velocità, come nemmeno alla massa. Poichè la massa è ~~essendo~~ la stessa, e ci vorrebbe tanta forza a distruggere la velocità da me impressa alla palla, quanta io ne ho impiegata a comunicarla, se i tempi fossero eguali. Ciò non è, poichè il mio braccio ha agito sulla palla per tutto il tempo dello slancio; questo tempo, essendo piccolo assai, considero la forza del braccio come costante, quantunque in realtà sia variabile; ed il tempo

impiegato dal muro a fermare la palla è visibilmente minore del tempo dello slancio. Suppongo siaji trovato, che il tempo dello slancio sia $\frac{1}{6}$ di secondo, ed il tempo impiegato dal muro $\frac{1}{60}$ di secondo, dirò, che la forza data dal muro fu 10 volte maggiore della forza datane impiegata.

Se la palla fosse stata d'avorio avrebbe rimbalzato con egual velocità a quella da me impressale, e se dalbattere al riflettersi la palla avesse impiegato $\frac{1}{60}$ di minuto secondo, ne seguirebbe, che il muro ha impiegato a distruggere la velocità della palla $\frac{1}{120}$ di secondo, e che quindi il muro ha opposto una forza 20 volte maggiore di quella del mio braccio.

In questi casi è dunque necessario congiere la durata dell'~~mo~~ azione.

La Durata degli impulsi essendo piccolissima, possiamo supporre, che tutti gli impulsi abbiano la medesima durata. Prenderemo allora per misura il prodotto della massa per la velocità.

Il prodotto della massa per la velocità dicesi quantità di moto.

Quando si hanno a confrontare gli impulsi, si ha che le loro intensità ~~della forza~~ sono proporzionali alle quantità di moto.

Gli impulsi sono generalmente di due specie, l'esplosione, e la percossa o l'urto dei corpi.

Ho dei cannoni di diverse specie, per es. da 24, e da 8, voglio sapere, quale debbo impiegare per abbattere per es. una fortezza nel minor tempo possibile. Perciò so, che la palla da 24 cammina con velocità di 1232 m. per secondo e la sua massa è proporzionale a 24 lib, che la palla da 8 cammina con

velocità di 1500 m. per secondo, e la massa è proporzionale a 6 lib.
Conchiudo tosto, che le percosse stanno come 24. 1232 : 6. 1800
e che per conseguenza impiegando i cannoni da 24 abbatterò
più presto la fortezza.

Due masse non elastiche A. B vengono a percuotersi, si domanda
che velocità V, v debbano avere perchè percotendosi si
facciano equilibrio. La percossa essendo un impulso, gli impulsi
essendo proporzionali alle quantità di moto, ne segue, che
dovrà essere AV = Bv, donde V : v :: B : A, ossia, che le dette velocità
debbono essere inversamente proporzionali alle masse.

Il fin qui detto ci somministra il modo di misurar le forze impiegando
le una forza che dobbiamo misurare non possiamo impiegarla;
allora bisogna, che ci arduiamo dei metodi per misurarla senza
applicarla a nessun corpo, o meglio senza produr moto. Vediamo come ci possa.

Le forze oltre l'effetto del moto producono ancora altri effetti,
premono, e tendono. Mi spiego. Io sto fermo, mi mettono sulle
spalle una soma di 10 lib., essa soma non mi fa muovere,
ma produce in me una sensazione dolorosa, effetto della
pressione esercitata sul mio corpo dai 10 lib. Effetto della pressione
è di ravvicinare le molecole dei corpi.
Ora mi tolgo il peso di dosso, lego alle mie due mani due corde,

so attaccare alle due corde due cavalli di egual forza, so tirare i due cavalli, i cavalli tirando con egual forza non mi muovono, ma mentre tirano una sensazione di dolore, effetto della tensione generata sul mio corpo dai due cavalli. Effetto della tensione è di scostare le molecole dei corpi allontanandole le une dalle altre.

Quando due forze motrici eguali, ed in eguali sono applicate ad un corpo contrariamente esercitano sul corpo una tensione se sono al di fuori una pressione se sono applicate al di dentro del corpo.

Ogni volta, che una o più forze motrici sono dirette in tutto o in parte da una o più altre forze motrici ne nasce uno stato di pressione o di tensione nei corpi, a cui sono applicate.

Facciamo una ipotesi per ora, che poi dimostreremo non esser ipotesi, ma verità. Le forze motrici sono proporzionali alle pressioni o alle tensioni che producono. Ne risulta tosto da questo principio il modo di misurare le forze senza produr moto. Perciò basta, che prendiamo una data forza per unità, che ci serchiamo tante forze eguali a quella, per es.° 200. Prendiamo quindi una di queste forze la applichiamo ad un corpo, a cui contrariamente applico la forza da misurarsi: se questa prevale sull'altra aggiungo un'altra forza alla prima, vedo se ha luogo equilibrio; se non ha ancor luogo equilibrio, proseguo ad attaccare delle unità di forza, finchè

Dia equilibrio, Le avrò dovute attaccare per cg.^lo 125 forze per produrlo, dirò, che la forza, che io voleva conoscere, vale 125.
Nei problemi di equilibrio si converrà di impiegare questa altima maniera di misurare le forze,
Nei problemi di moto la prima.

Tutto ciò era necessario per ben comprendere di che tratti la scienza chiamata Meccanica, ossia per ben comprendere la definizione della Meccanica gettata nella prima Lezione.
Ogni corpo, abbiam stabilito essere esteso, impenetrabile, inerte. Un corpo, nel quale si fa astrazione dall'impenetrabilità, dall'inerzia, e da tutte le altre proprietà fisiche si chiama corpo Geometrico. Lo studio di questi corpi forma l'oggetto della scienza, che dissi Geometria.
Quando considero il moto dei corpi geometrici, astrazion fatta dalla velocità, dal tempo etc.; tal considerazione appartiene alla Geometria, ed il moto vien detto Geometrico.
Per es.° Prendo una sfera di raggio costante, ne fo muovere il centro, la sup.^e involucro di tutte le sup.^e della sfera nelle diverse posizioni da essa prese dicesi canale. Lo studio dei canali appartiene alla Geometria.
La parte di scienza, che si occupa dell'estensione non solo, ma anche del tempo impiegato da un corpo Geometrico nel suo moto, si chiama

Chinematica, o Meccanismo, di Francesi la chiamano Compositio
del Machines.

Quando consideriamo i corpi come estesi, impenetrabili d'inerti, ossia quando consideriamo le proprietà fisiche dei corpi, che si muovono, e le leggi per cui si muovono o sono in equilibrio siamo in Meccanica. Quindi

La Meccanica è la scienza dell'equilibrio e del moto tenendo conto delle proprietà fisiche dei corpi, e delle forze per cui i corpi si muovono, stanno in equilibrio.

Lezione 5ª Quindi due parti distinte di detta scienza, una relativa al moto, e all'equilibrio.

La parte di Meccanica, che tratta dell'equilibrio si dice Statica.

La parte di Meccanica, che tratta del movimento dicesi con parola impropria Dinamica; poichè per l'etimologia delle due parole Meccanica, e Dinamica dovrebbesi piuttosto chiamare Dinamica la scienza intera, Meccanica la scienza del moto.

Eguagliando a zero la velocità nelle formole del movimento, si può passare dal moto all'equilibrio. Noi però troveremo prima le leggi dell'equilibrio, e considereremo le leggi del moto come una estensione delle leggi dell'equilibrio, poichè questo secondo modo è assai più facile.

Quindi Studieremo prima la Statica, e poi la Dinamica.

Havvi un'altra divisione della scienza, che ci occupa, la quale importa di conoscere.

I corpi sono solidi, o liquidi, od aeriformi: ora non parleremo delle cagioni, per cui i corpi possono subire questi tre stati.

I corpi in qualunque stato considerati sono formati di atomi, che colla mente possiamo supporre divisi in 3, 4, ... 100 &c parti eguali, ma impossibili a dividersi effettivamente. Più atomi riuniti costituiscono una molecola. Più molecole unite formano un corpo. Fintantochè le molecole rimangono le stesse il corpo non cangia nella sua natura chimica, ma quando si cambia ola disposizione degli atomi, o si accresce o si diminuisce di atomi la molecola la natura del corpo allora varia. Gli atomi, che compongono le molecole possono essere della stessa natura, o di natura contraria; così l'oro è formato di atomi della stessa natura, per quanto finora si sa; l'acqua invece è formata di atomi di natura diversa, di ossigeno e di idrogeno. Se l'oro lo combiniamo coll'ossigeno abbiamo un corpo di natura diversa, che vien chiamato ossido d'oro. Se all'acqua aggiungiamo un maggior o minor numero di atomi di carbone, avremo secondo il numº degli atomi aggiunto olio, od etere, ... Tutte le sostanze vegetabili sono composte di ossigeno, di idrogeno e di carbone; chi di esse contiene un maggior numero di atomi d'ossigeno, chi d'idrogeno, chi di carbone. L'amido e lo zucchero son

differenti, pure son composti con la stessa dose di idrogeno, ossigeno e carbone, la loro differenza sta nel collocamento degli atomi.

Gli atomi componenti una molecola stanno uniti, senza che noi adoperiamo per alcuna forza, dunque una forza a noi ignota, che li tiene uniti. La forza, che li tiene uniti si chiama affinità chimica.

Noi non trattiamo della natura e degli effetti di questa forza, ma ci arrestiamo alle molecole. Queste li è detto che unite formano un corpo.

La forza, che li tiene unite vien detta attrazione molecolare.

Tal forza non opera sempre con egual energia. Per mutar la disposizione delle molecole di un pezzo di ghiaccio per es. avvicinandole o allontanandole ci vuole una forza molto grande, così dicasi di tanti altri corpi, che oppongono una resistenza più o meno grande alle forze, che tendono a cambiare la disposizione delle loro molecole. Tali corpi diconsi corpi solidi.

Se il ghiaccio lo riscaldiamo, le molecole di esso vengono a costituire un corpo novello dotato di diverse proprietà meccaniche, ossia l'acqua. Di questo corpo senza nessuno sforzo possiamo cambiar la disposizione delle molecole. Un corpo, in cui le molecole non sono tra loro vincolate, e le quali per conseguenza possono prendere una infinità di posizioni differenti, dicesi fluido.

L'acqua facciamola riscaldare finchè bolla, a poco a poco l'acqua sparisce, mutandosi in vapore, novello fluido dotato della medesima proprietà, che le sue molecole possono prendere una infinità di posizioni. Ben ci accorgiamo però, che tra

questi due corpi l'acqua ed il vapore esiste una differenza grandissima, vediamo qual sia la differenza tra questi due stati fluidi dei corpi. Per ben intenderla serviamoci di una picola esperienza. Prendasi un vaso cilindrico perfettamente calibrato pieno sino ad una certa altezza di uno dei primi fluidi, adesº di acqua, vi si adatti sopra un coperchio, che chiuda esattamente sì modo, che non lasci passar sopra di esso il fluido. Tali coperchi son chiamati Stantuffi: a questo stantuffo si sovrapongano dei pesi quanti si vogliono, il fluido sottoposto non cambierà sensibilmente di volume. Tali fluidi vengon detti liquidi, quindi nella Meccanica chiameremo i liquidi fluidi incompressibili. Per cangiarne il volume non vi è che lo scaldamento ed il raffreddamento, di questi effetti avremo ancora occasione di parlarne. Se lo stesso vaso lo supponiamo pieno di un fluido aeriforme, e ripetiamo lo sperimento osserviamo, che ad ogni peso aggiunto lo stantuffo discende, e che potremmo ridurre il volume del fluido ad $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... $\frac{1}{1000}$ etc. Tali fluidi son dunque compressibili. Inoltre, se lo stantuffo è carico per esº di 10 lib., notiamo la mira, a cui è lo stantuffo, aumentiamo quindi il peso di 10 lib., lo stantuffo discenderà, ma se togliamo di nuovo le 10 lib. aggiunte, vediamo lo stantuffo ritornare esattamente al luogo primitivo. Tutti dunque i fluidi aeriformi sono compressibili, e godono di una perfetta elasticità.

Di questi ultimi studi alcuni son detti vapori, gli altri son detti gas.
Tra i vapori ed i gas esiste questa differenza, che il vapore più o meno fortemente compresso si riduce in liquido, ciò che non avviene per i gas.
Tal differenza però è relativa, poichè molti gas furon dai Chimici già ridotti allo stato liquido, ma con pressioni enormi, ed hanvi più tuttavia tre gas i quali non si sono ancor potuti ridurre in liquidi; la vera differenza consiste dunque nella grandissima differenza di forza, che bisogna impiegare per ridurli allo stato liquido.
Distinti in ogni in solidi, liquidi e fluidi elastici, ne risulta la divisione della Meccanica in tre scienze distinte.
La Stereo-Meccanica, o Meccanica propriamente detta, ed è la Meccanica dei solidi,
L'Idro-Meccanica, od Idraulica, o Meccanica dei liquidi,
La Pneumatica, o Meccanica dei fluidi aeriformi, questa dipende dagli stati più -più dell'Idraulica.

Noi ci occuperemo della prima di queste scienze, l'Idraulica e la Pneumatica formando un corso a parte.

Prima di addentrarci nello studio della Meccanica, sarà bene di dare un ragguaglio del sistema metrico decimale, di pesi e misure, ponendolo nello stesso tempo a confronto col sistema antico di Piemonte, per stabilire con ciò le unità di ogni specie, di cui avremo bisogno in progresso di tempo.

Esposizione del vecchio sistema di pesi e misure del Piemonte.

L'unità lineare del vecchio sistema è il piede liprando, e si suddivide in 12 once, l'oncia in 12 punti, il punto in 12 atomi.
Sei piedi formano il trabucco, 2 trabucchi una pertica, 600 tr. un miglio.
Il miglio è l'unità di misura itineraria.
Oltre il piede liprando havvi il piede manuale di 8 one, e la tesa di 40 one.
Unità di misura quadrata è il trabucco quadrato.
Unità di misura cubica è il trabucco cubo. Le misure quadrate e le cubiche si dividono come le lineari.
Per le misure agrarie l'unità è la tavola = 4 trab. quad. 100 tavole fanno una giornata di terreno. La tavola si divide in 12 piedi di tav. ed il piede di tavola si suddivide come il piede liprando.
Per le misure di capacità abbiamo due unità. L'emina per le materie sciolte asciutte, come il grano, la farina, il carbone ecc., questa si divide in 8 coppi, il coppo in 24 cucchiaj; cinque emine formano il sacco.
La brenta per le materie liquide; la brenta si divide in 36 pinte, la pinta in due boccali, il boccale in due quartucci; 10 brente in alcuni paesi, in altri 12 formano un carro.
Fra la brenta, e l'oncia cuba, e fra l'emina e l'oncia cuba esiste un rapporto inesprimibile in numeri esattamente.
L'unità di peso è la libbra Torinese. La libbra dividesi in 12 once, l'oncia in 8 dramme, La dramma in 3 denari, il denaro in 24 grani. Il Rubbo è di 25 lib., cinque rubbi fanno il quintale.

a) La libbra non ha alcuna relazione semplice coll'unità lineare.

L'unità di moneta è la lira piemontese identica col franco.

Sezione 6ª Oltre l'inconveniente grandissimo del non essere adottato in tutti i paesi del Piemonte egualmente, molti sono gli inconvenienti di questo sistema, i quali tutti spariscono nel sistema metrico decimale, che vo adesso a descrivere.

Tre sono i principali vantaggi di quest'ultimo sistema.

1° La relazione, che hanno l'unità fondamentale del sistema, e tutte le altre unità con fenomeni naturali indipendenti da ogni convenzione, da ogni abitudine locale, per cui non oppongasi alla loro adozione per tutti i popoli alcuna difficoltà ragionale, mentrechè nell'antico sistema le unità erano affatto convenzionali.

2° Chi conosce la legge con cui dal nome fondamentale delle unità si deriva i nomi delle loro suddivisioni, e con cui si formano tali suddivisioni delle unità, basta, che ritenga i nomi delle unità principali per tosto saper derivare tutti gli altri nomi delle suddivisioni, ed i valori di esse.

3° La relazione, che esiste tra una unità, e tutte le altre, cosa, che non avea luogo nel vecchio sistema.

Esposizione del novello sistema decimale di pesi e misure

L'unità fondamentale è l'unità lineare. Questa deve essere comoda, nè troppo piccola, nè troppo grande, e tale che quanto è possibile si connetta con un fenomeno naturale invariabile. Si è creduto non poter scegliere una misura più invariabile, che quella, che ha una relazione con le dimensioni

Del globo terrestre. Si è eletta la quarantamilionesima parte del meridiano, ossia la diecimilionesima parte del quarto del meridiano. Presa per unità l'antica tesa di Francia una commissione Francese misurò un grado con tutta l'esattezza, dedusse quindi la lunghezza del quarto del meridiano, questa lunghezza la suddivise di 10 in 10 parti, finchè giunta alla diecimilionesima parte riconoscendola una misura assai comoda da potersi prendere per unità, la detto per unità di misura lineare, chiamandola metro, parola Greca, che significa misura.

Per i multipli e le suddivisioni del metro adottarono il sistema decimale, però presero per multipli del metro 10 m., 100 m., 1000 m., 10000 m., per le suddivisioni adottarono il decimo, il centesimo, il millesimo di metro; divisero pure in tal modo tutte le altre unità, che accennarono. Questa maniera di divisione ha il preziosissimo vantaggio di essere d'accordo col nostro sistema di numerazione datoci dagli Arabi. Il decuplo del metro si chiama decametro, Il centuplo ettometro, mille metri ricevono il nome di Chilometro. Diecimila metri fanno un miriametro.

La Decima parte del metro fu chiamata decimetro, La centesima centimetro, la millesima millimetro.

I nomi dei multipli e delle suddivisioni delle altre unità del sistema sono formate col nome, che indica l'unità, nello stesso modo, che i multipli e le suddivisioni del metro col vocabolo metro.

Per indicare i multipli si scrivono avanti i nomi delle unità i vocaboli Deca, Ecto, Chilo, Miria derivati dal greco, e per indicar le suddivisioni si scrivono avanti i nomi delle unità i vocaboli Deci, Centi, Milli tratti dal latino.

Per le misure dei terreni l'unità è l'ara, che è un quadrato di un decametro di lato. Dei multipli dell'ara è soltanto in uso l'ettara, ossia cento are, e delle suddivisioni il centiara, ossia metro quadrato.

Per tutte le altre misure superficiali, come per misurare una parete, una volta, un tetto, un pavimento, etc. si adopera il metro quadrato, il quale si suddivide in decimetri quad., centimetri q., millesimi q. di metro quadrato.

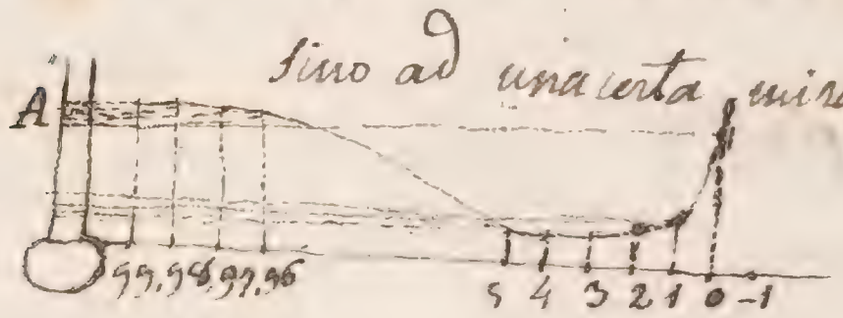
Dopo le misure superficiali vengon le solide.

La misura cubica per designare il volume di un corpo qualunque è il metro cubo. La legge ha creduto più commodo dargli un nome speciale, lo stero.

La misura, che serve per le materie sciolte asciutte, e per le materie liquide è il decimetro cubo, chiamato litro. Ha per multipli usati il decalitro, e l'ettolitro, e per sottomultipli il decilitro. Nel commercio a queste misure si da la forma cilindrica. Si adoperano cilindri di altezza eguale al diametro della base per le materie secche, come i grani, il carbone, etc. e cilindri di altezza doppia del diametro della base per le materie liquide.

Se dalle misure vogliamo passare ai pesi, e connettere l'unità di peso coll'unità di misura, bisogna, che scegliamo per unità di peso il peso di un dato volume di un dato corpo. Si è scelta l'acqua, ed il peso di un centimetro cubo di tal corpo per unità, questo peso si chiamò gramma.

Siccome l'acqua cambia volume al cambiar della temperatura, così non basta pesare un centimetro cubo di acqua, bisogna anche stabilire a che temperatura si dovesse pesar l'acqua. La fisica insegna, che vi ha una certa temperatura, alla quale l'acqua ha il minor volume possibile. Tal temperatura è verso i 4, od i 5 gradi del termometro centigrado. Per convincersi di ciò coll'esperienza prendiamo un tubo di vetro { i cangiamenti di volume del vetro col cambiare della temperatura sono insensibili }, a cui connettiamo una palla, come nella fig.a, empiamo



fino ad una certa mira l'istrumento di acqua, alla temperatura dell'acqua bollente l'acqua arrivi in A, lasciandola raffreddare, si vedrà diminuire di poco passando pei gradi 99. 96, poi calare sempre più fino verso i 5 gradi, allivata a tale mira il suo volume non diminuisce più, per due o 3 gradi si mantiene quasi lo stesso, passando ai due gradi di nuovo cresce, finchè giunta alla temperatura del ghiaccio, ossia di zero gradi il suo volume cresce di una quantità straordinaria rispetto agli accrescimenti antecedenti.

L'acqua pesando l'unità di peso fu pesata alla temperatura di 4,05 gradi circa, perciò il volume dell'acqua è il minor possibile. Il gramma è dunque il peso di un centimetro cubo di acqua alla temperatura di circa 4 gradi. I multipli del gramma i più usati sono il decagramma, ~~il~~ lo l'ettogramma, ed il Chilogramma. Per commodo del commercio si tollerano nei multipli del gramma due

denominazioni improprie. cento Chilogr. si chiamano quintale metrico, e mille
tonnellata di mare, o semplicemente tonnellata.

Ragioni fondamentali tra le misure, i pesi antichi, e le misure e
i pesi nuovi del sistema decimale.

Piede liprando = metri 0,513766, quindi il
Trabucco = metri 3, 082596
Oncia = met. 0, 042814
Tesa = met. 1, 71255
Palo = met. 0, 599394
miglio = met. 2466, 0768

Trab.° quadrato = met. quad.i 9, 502400
Tavola = are 0, 380097
Giornata = are 38, 0097

Piede cubo = metri cubi 0, 135611
Trab.° cubo = m.i cubi 29, 29208
Trab.° canerale = m.i cubi 4, 068342
Oncia cuba = m.i cubi 0, 000074
Tesa di fieno = m.i cubi 5, 022644

Brenta = litri 49, 2847
Pinta = litri 1, 3690
Emina = lit. 23, 006
Coppo = lit. 2, 876

Libbra = grammi 368,84 = 0,36884 chil.

Unbbo = gram. 9221,00 = 9,22100 chil.

Oncia = gram. 30,74

Dramma = gram. 3,84

Denaro = gram. 1,28

Viceversa

Metro = piedi liprandi 1,946411

Metro quad. = piedi quadrati 3,788517

Ara = tavole 2,630914

Litro = pinte 0,730450

ettolitro = bronte 2,029027

ettolitro = emine 4,346776

litro = coppi 0,347742

Stero = piedi cubi 7,374011

Stero = tese cube 0,199098 = trabi romanali 0,245800

Chilogramma = libbre 2,711170

Grauma = ottavi 0,288292

Fine dei Prolegomeni.

Statica.

Lezione 7.ª

In ogni forza occorrono tre cose da considerarsi; l'intensità, il suo punto d'applicazione, e la sua direzione.

L'Intensità si desume o dal moto, che la forza produce, o dalla pressione, che esercita contro gli ostacoli, che impediscono il moto.

Nella Statica, che prendiamo ad esporre le forze si fanno equilibrio, e per conseguenza i loro effetti si risolvono in pressioni, quindi dalla pressione sola bisognerà desumere la misura delle intensità delle forze, e già abbiam accennato, come si possano in tal modo misurare le forze.

Il punto d'applicazione di una forza, e la direzione di essa si determinano o in disegno, o con numeri.

Il Punto d'applicazione di una forza è il punto di un corpo, su cui opera immediatamente detta forza. Per direzione intendesi la linea retta, secondo cui si muove o tende a muoversi il punto d'applicazione; così la direzione della gravità è verticale. Nella Statica bisognerà, che cerchiamo di conoscerla senza, che la forza produca il movimento.

La posizione del punto d'applicazione si determina nello spazio nello stesso modo, che nella Geometria si determinano le posizioni dei punti.

Per rappresentarlo con disegno, scelti ad arbitrio due piani facenti angolo tra di loro, dal punto si tirano due rette parallele a direzioni date, la lunghezza di queste rette comprese tra il punto ed i piani fissi bastano per determinare il punto geometricamente. Comunemente i piani si scelgono uno verticale, l'altro orizzontale, e dal punto da determinarsi si abbassano due perpendicolari sui tali piani. Per rendere più comoda la costruzione i due pi

Si aprono coricandoli uno sopra l'altro, così facendo i piedi delle perpendicolari, i quali son detti, proiezioni del punto, vengono a trovarsi tutti in una stessa retta perpendicolare alla comune intersezione dei due piani, e la lunghezza delle rette projettanti basterà per determinare sulla carta le due projezioni del punto.

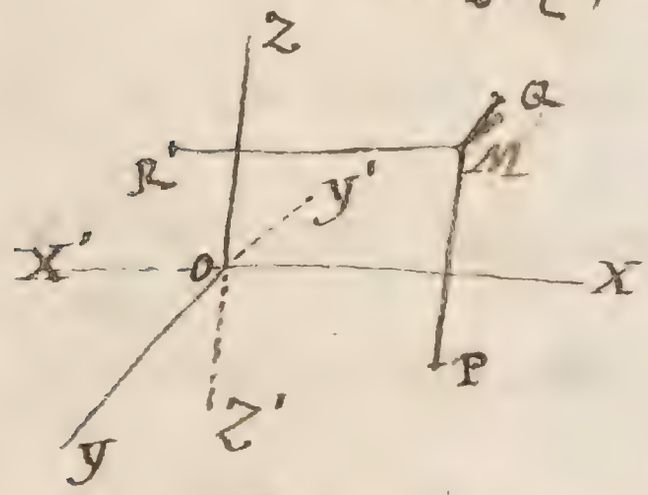
Numericamente la posizione di un punto nello spazio si determina riferendo il punto ad alcuni punti, o rette, o piani fissi.

I due sistemi più usati sono quelli delle coordinate rettangolari, e delle coordinate polari.

Col mezzo del primo sistema si determina un punto riferendolo a tre piani fissi perpendicolari a vicenda l'uno sopra l'altro, le lunghezze delle perpendicolari abbassate dal punto sopra questi 3 piani determinano il punto. Questi 3 piani formando intersecandosi un'angolo solido triedro, i tre spigoli di questo angolo si denominano colle lettere OX, OY, OZ, e son detti assi delle coordinate, di piani, contenendo ciascuno due di questi spigoli, ~~quei~~ son detti piani delle xy, delle xz, e delle yz. Le perpendicolari abbassate dal punto sopra di questi tre piani, ossia le parallele tirate dal punto alle rette OX, OY, OZ son dette coordinate del punto;

La coordinata parallela ad OX si chiama x, le altre due rispettivamente y e z. Date in numeri x, y, z la posizione del punto è determinata nello spazio, vediamo come ciò è.

Sia pun.° $x=a$, $y=b$, $z=c$, se alla distanza a dal piano yz immaginiamo
questo piano due piani paralleli uno a ~~dritta~~ destra, l'altro a ~~dritto~~ sinistra, il punto da
determinarsi sarà sopra uno di questi piani, come pure sarà sopra uno dei
piani condotti ~~alla~~ parallelamente al piano xz alla distanza b da esso pi
e per conseguenza ~~sopra~~ sopra una delle 4 rette intersezioni di questi quattro
piani; il punto essendo inoltre alla distanza c dal piano xy si troverà anc
sopra uno dei due piani paralleli al piano xy alla distanza c, e perciò sarà
uno degli 8 punti, in cui questi piani tagliano le 4 rette sud.te
Per determinare quale di questi punti sia il cercato non basta dunque aver
i numeri x, y, z, ma bisogna ancora esprimere con qualche segno conven-
zionale, se la dist.a x va presa a destra od a sinistra

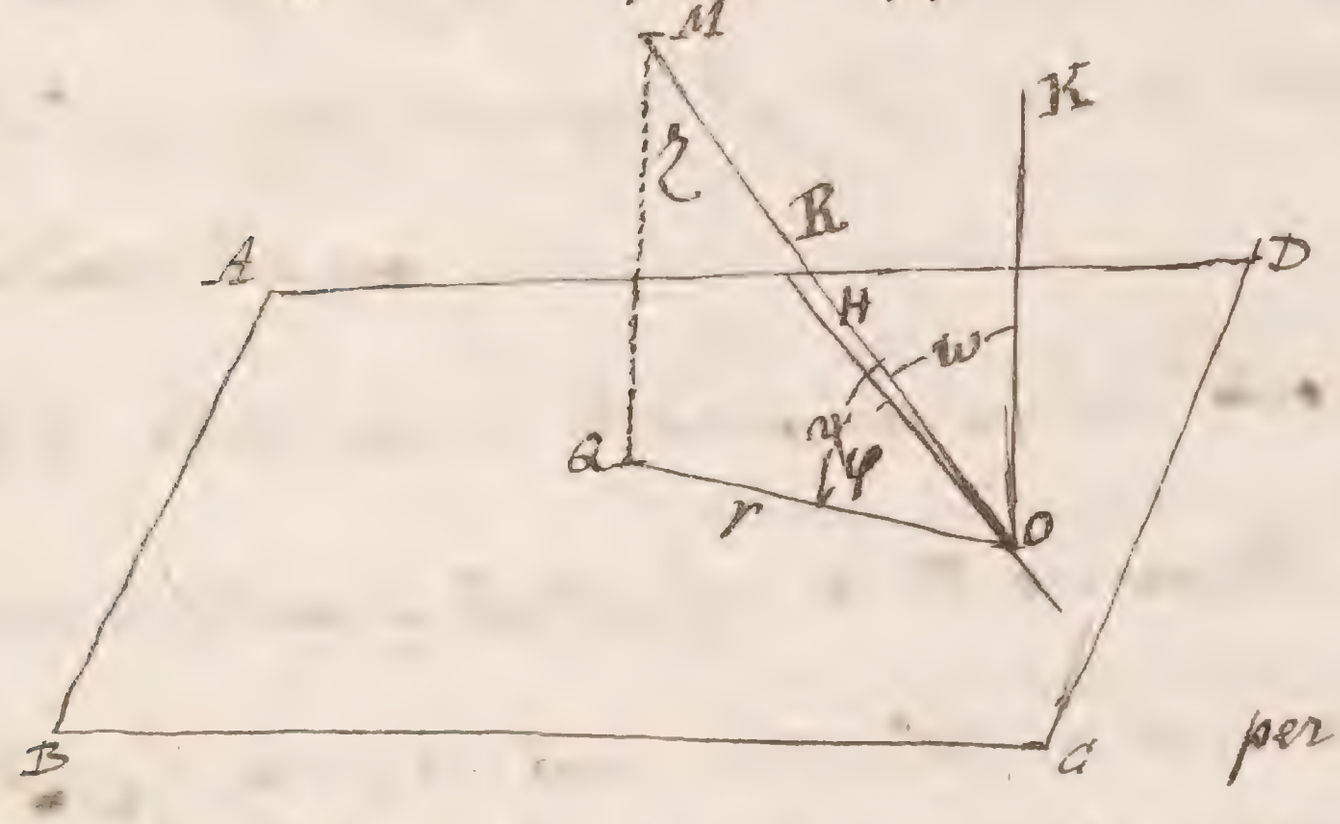


del piano yz, se la dist.a y va presa ~~sul~~ dinnanzi, o dietro
il piano xz, se la dist.a z va portata al disopra o al
disotto del piano xy.

Fu convenuto di dare il segno + alle distanze da prendersi a destra del piano
yz, od avanti il piano xz, o al disopra del piano xy, di dare il segno — alle
distanze da prendersi a sinistra del piano yz, o dietro il piano xz, od al disotto
del piano xy; perciò furon chiamati semiassi positivi gli OX, OY, OZ, semiassi
negativi i loro prolungamenti OX', OY', OZ'.
Quindi le coordinate di un punto M bisogna, che sieno date in numeri, ed in
segno, perchè il punto sia completamente determinato.

Le coordinate polari sono quelle, fra le quali vi ha una o due linee rette e due
~~due~~ d'un' angolo. Esaminiamo questi due casi, di una retta, e due angoli, e
di un'angolo e due rette.

Una ~~retta~~ angolo, e due ~~angoli~~ rette bastano per determinare un punto nello spazio. Infatti supponiamo dato un piano indefinito nello spazio, ed in questo ABCD supponiamo data una linea retta di posizione OH.



Consideriamo un punto M fuori del piano. Projettiamolo sul piano fisso per mezzo della perpendicolare MQ, la posizione del punto M sarà conosciuta, quando conosceremo 1° la lunghezza z della perpendicolare MQ, e quando sapremo se questa lung.a dobbiamo portarla sul di MQ al disopra del piano fisso, o sul prolungamento di essa al disotto, 2° la distanza r dal piede Q della perpendicolare ad un punto fisso O preso sulla retta fissa, 3° ~~quest~~ l'angolo φ, che la retta QO fa colla OH, e sapremo inoltre, da qual parte della retta OH debbano contarsi gli angoli φ.

Gli angoli φ si è convenuto di contarli da destra verso sinistra di OH, ~~E~~ a z si è convenuto di dare il segno + quando il punto i al disopra del piano fisso, il segno — quando è al disotto.

Dunque date z, r, φ, col segno di z il punto M è completamente determinato. Il punto fisso O dicesi polo.

Si adopera anche un'altro sistema di coordinate polari, in cui il punto M vien determinato da una coordinata lineare, e due angolari.

Tali coordinate sono la distanza R dal punto M al punto fisso O, l'an-golo ψ che questa fa colla sua proiezione ortogonale OQ, e l'angolo φ, che quest'ultima fa colla retta fissa OH. In questo sistema ψ si misura partendo da OQ da zero ago° al disopra, o da zero a giù° al disotto, l'ang. φ si misura come nel sistema antecedente, ma ordinariamente invece di ψ si tien conto del suo complemento w, che la retta MO fa colla perpendicolare OK. Adoperando ~~OH~~ w, nel contarlo si parte sempre da OK, e si conta da zero fino a 180°; così se sarà w acuto, il punto M diremo, che è al disopra del piano fisso, ~~che~~ che M è al disotto se sarà w ottuso.

Ciò posto, date R, w, φ il punto M è completamente determinato.

Dal sistema rettangolo si può sempre passare ad uno di questi due sistemi polari, le formole del passaggio al primo sistema sono

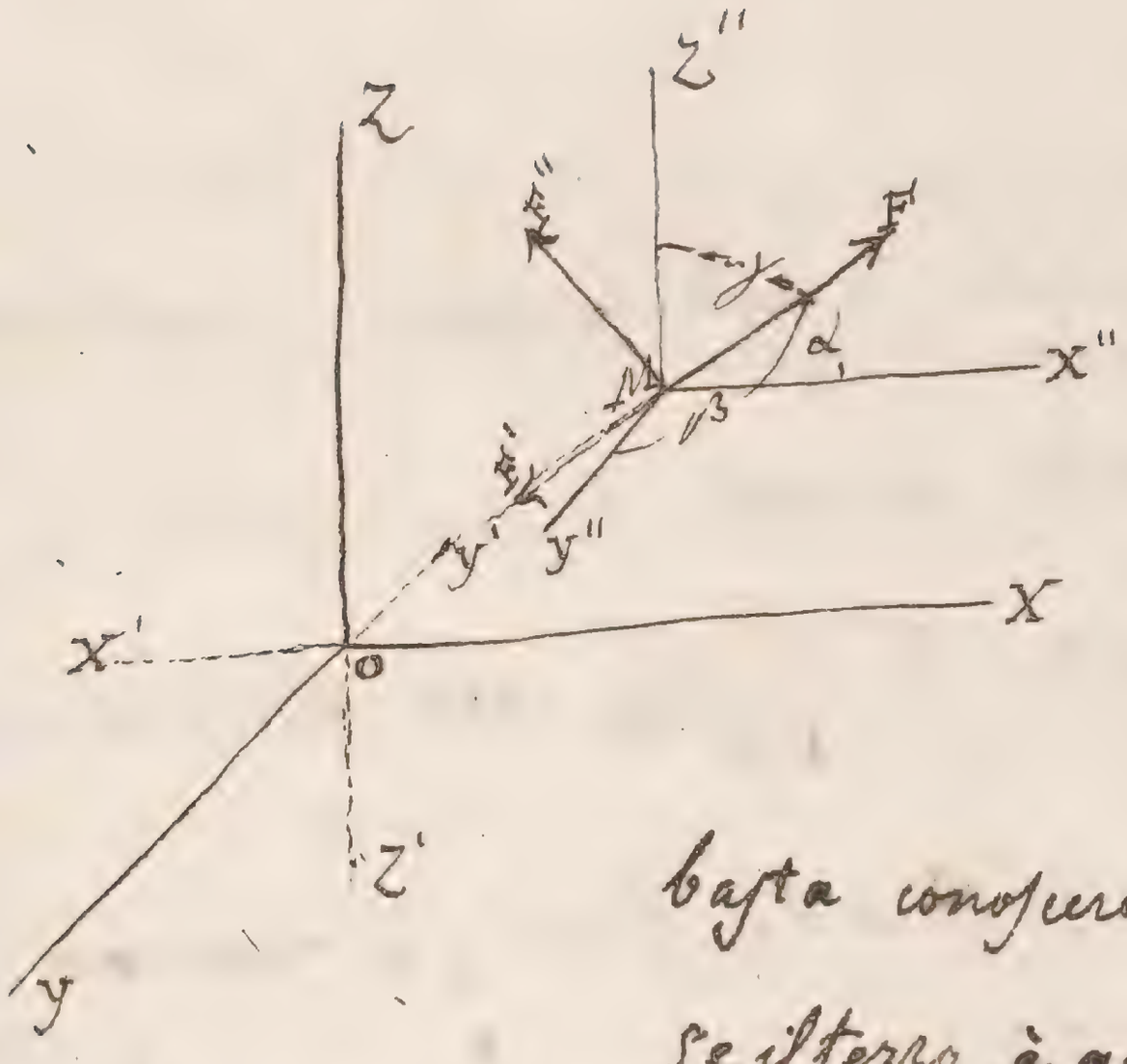
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\operatorname{sen}\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

e quelle del passaggio al secondo

$$\begin{cases} x = R\operatorname{sen} w\cos\varphi \\ y = R\operatorname{sen} w\operatorname{sen}\varphi \\ z = R\cos w \end{cases}$$

Nell'ipotesi, che la retta fissa Ho coincida con l'asse delle x, il piano di questa retta AB CD coincida col piano xy, ed il punto fisso o coll'origine delle coordinate x, y, z.

Per determinare la direzione MF di una forza conduciamo tre assi arbitrii ox, oy, oz; Habbiamo il verso, per cui le considereremo positive, del verso per cui le considereremo negative, e sieno ox, oy, oz i semiassi positivi, ox', oy', oz' i negativi; se sia M il punto d'applicazione della forza, per esso punto M si conducano tre rette parallele, e nello stesso senso dei semiassi positivi, e sieno ox'', oy'', oz''

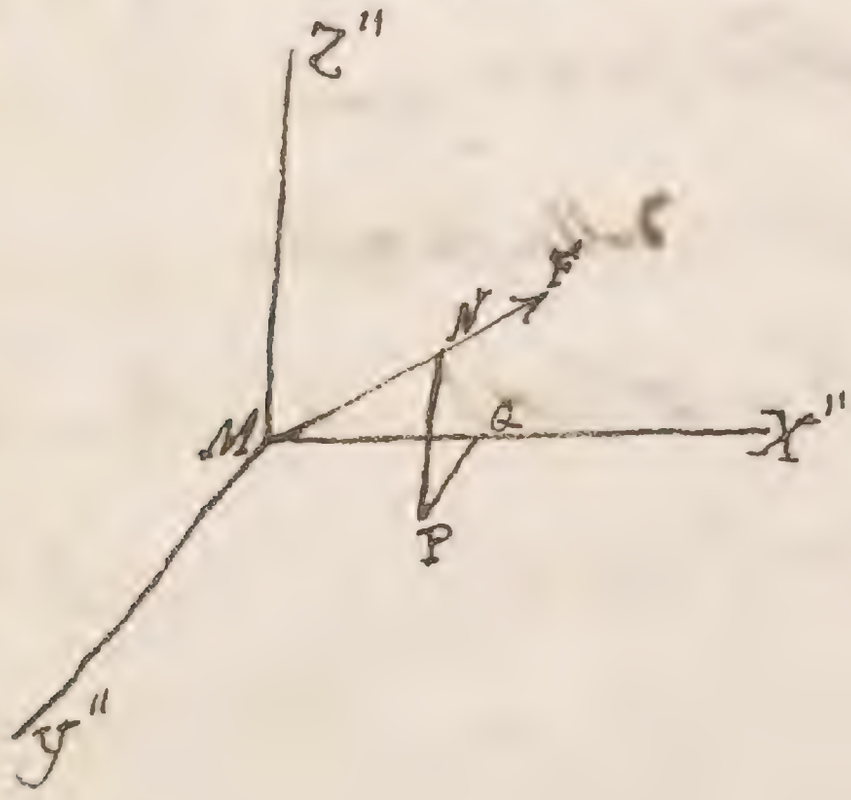


La direzione MF della forza sarà determinata dagli angoli L. B. J. che essa fa colle rette MX'', MY'', MZ''; che dunque basta conoscere due dei 3 angoli, e sapere se il terzo è acuto od ottuso.

Infatti essendo dato L ne viene, che MF sarà sopra un cono retto, il cui asse è MY'', e la cui direttrice fa un'angolo L coll'asse; parimente essendo dato J ne viene, che MF sarà sopra la Sup.e di un cono retto, il cui asse è MZ'', ed il cui lato fa coll'asse un'angolo J; MF dunque sarà una delle due intersezioni delle due Sup.e coniche; queste due rette essendo poste simmetricamente una a dextra, l'altra a sinistra del piano Z''MY'', per sapere sopra quale delle due sia trovi MF basterà conoscere se L è acuto od ottuso.

Lo stesso si dimostra analiticamente. Sieno x', y', z' le coordinate di un punto N di MF, MN è diagonale di un parallelepipedo rettangolo, che ha per lati x', y', z', e fa con gli stessi lati angoli L, B, J, e perciò

$$\begin{cases} \cos L = \dfrac{x'}{MN} \\ \cos B = \dfrac{y'}{MN} \\ \cos J = \dfrac{z'}{MN} \end{cases}$$



Si elevino al quadrato i membri di queste equazioni, e si addizionino quindi insieme membro a membro avremo

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{\overline{MN}^2}, \text{ ora } \overline{MN}^2 = x'^2+y'^2+z'^2,$$

dunque $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, e ricavando $\cos\alpha$ si ha $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$, donde si vede, che dati β, γ si hanno due valori di $\cos\alpha$ differenti soltanto nel segno, ossia due valori di α l'uno supplemento dell'altro, e che perciò dati β, γ basta dire se α sia $>0<90^\circ$ per averne il vero valore.

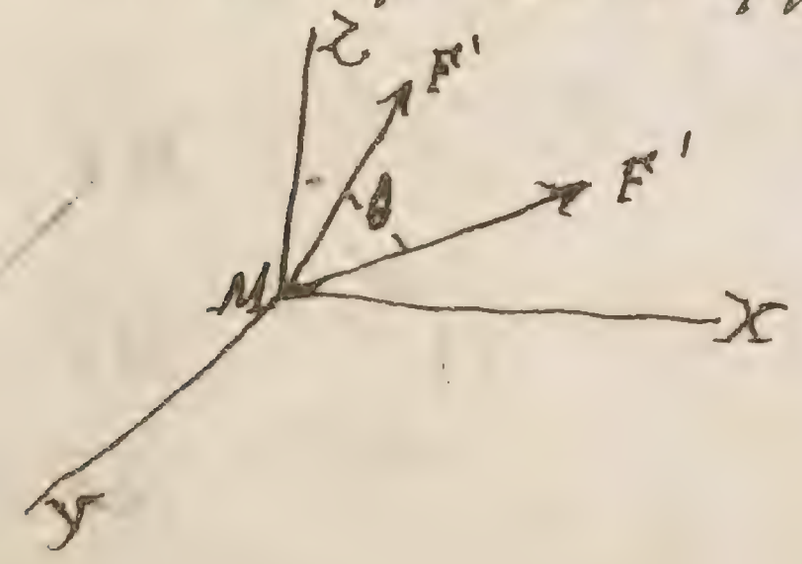
Supponiamo data la direzione della forza ME per gli angoli α, β, γ, che essa fa coi semiassi positivi, se volessi dire, che una forza è in direzione opposta alla prima dirò, che la sua direzione fa coi semiassi positivi degli angoli α', β', γ' supplementi dei primi, che quindi le due forze sono opposte se

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha' &= -\cos\alpha\\ \cos\beta' &= -\cos\beta\\ \cos\gamma' &= -\cos\gamma\end{aligned}\right\}$$

Se due forze F, F' applicate ad uno stesso punto M sono date per gli angoli che le loro direzioni fanno coi suoi assi positivi, si ha l'angolo θ che fanno tra di loro tali direzioni dalla formola

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{matrix}\right\}$$

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$ la quale si dimostra nella Geometria.



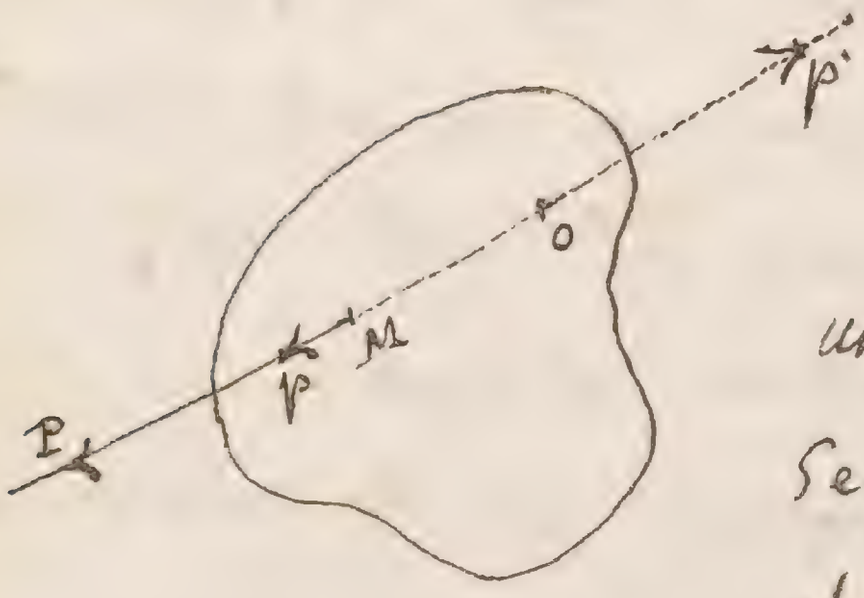
Da questa formola ne deriva, che per essere le direzioni di due forze tre di loro perpendicolari, dovrà essere

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$ e perchè queste direzioni siano opposte bisogna, che sia

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = -1.$$

Osservazione 6ª. Perchè una forza sia assolutamente determinata, abbiam detto doversi conoscere l'intensità di essa, le coordinate del punto d'applicazione, due dei tre angoli, che la sua direzione fa coi semiassi positivi presi ad arbitrio nello spazio, ed il segno del coseno del terzo angolo: vi ha un'altra maniera perfettamente equivalente a questa di determinare una forza.

Quando è data una forza applicata ad un corpo rigido è sempre possibile sostituire al punto d'applicazione della forza un'altro punto della direzione di essa, purchè tal punto sia invariabilmente connesso col primo. Ciò si dimostra facilmente.



Infatti è verità di definizione, che due forze eguali applicate ad un punto, od alle estremità di una verga rigida si fanno equilibrio; inoltre se al corpo applicano due forze, che si facciano equilibrio, queste due forze non cambiano l'effetto della forza prima MP;

possiamo dunque applicare in O due forze eguali ed in direzione opposta, la direzione sia la stessa di quella della forza MP per la forza Op, e sia $Op = Op' = MP$, allora ne deriva, che MP essendo invariabilmente connesso punto O, le due forze MP, Op' si fanno equilibrio, e che però possiamo staccarle senza che il corpo cambii in qualche modo il suo movimento; ma staccandole resta la sola OF eguale e nella stessa linea di MP, è dunque permesso di sostituire al punto d'applicazione di una forza un'altro punto preso sulla direzione di essa purchè questo sia invariabilmente connesso col primo; Questa condizione è adempiuta se il corpo è solido, ed il punto O appartiene alla sua massa, Matematicamente il punto O è anche possibile di prenderlo fuori della massa del corpo, purchè si immagini ~~nella direzione della forza MP~~ una o più verghe rigide, che connettano il punto O alla massa del corpo.

Ciò premesso è evidente, che una forza viene determinata, quando se ne conosce l'intensità, ed è data nello spazio la retta secondo cui essa opera, ed il verso secondo cui agisce una retta è determinata analiticamente per le sue due equazioni, tali equazioni contengono quattro quantità costanti, dette parametri, è quindi necessario conoscere per la determinazione di una forza il numero esprimente la sua intensità, i quattro parametri della retta secondo cui agisce, ed un segno per sapere in che verso opera.

Per vedere, come le due maniere indicate per la determinazione di una forza siano equivalenti, supponiamo determinata la forza nel 1° modo, verrà essa determinata anche nel 2° modo, ossia saranno anche determinate le quantità, che abbiamo indicate necessarie per la sua determinazione nel 2° modo. Infatti siano date le coordinate a, b, c del punto d'applicazione, gli angoli α, β, γ, che la direzione della forza fa coi semiassi positivi, le equazioni della retta secondo cui opera la forza saranno $x - a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(z - c)$, $y - b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(z - c)$;

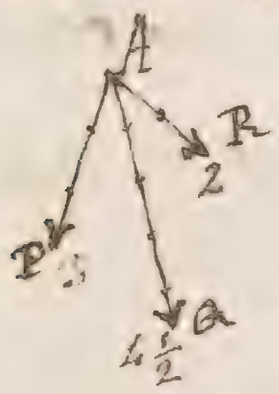
y

Viceversa - Date le equazioni della retta secondo cui opera la forza, le quali sieno $\left.\begin{aligned} y &= mz+\mu \\ x &= nz+\nu \end{aligned}\right\}$ si ha

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \\ \cos\beta &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \end{aligned}\right\}.$$

Fatto ciò, che si può rappresentare per numeri si può anche rappresentare per linee, una quantità per es.° espressa dal numero 5 possiamo rappresentarla con una retta contenente 5 unità lineari, tale rappresentazione non significa altro, che l'essere la quantità data proporzionale alla retta 5, che la rappresenta, ossia che la quantità sta colla unità della sua specie nello stesso rapporto, in cui la retta rappresentatrice sta coll'unità lineare, possiamo dunque esprimere le intensità con linee. Havvi un gran vantaggio ad esprimere in tal modo le intensità delle forze, ed è di avere sulla figura tutte le condizioni necessarie per determinare una forza, così se si prenda sulla direzione MF della forza F a partire dal punto d'applicazione M una lunghezza Ma contenente tante unità = Ma, quante volte l'unità è contenuta per es.° nel numero 5 esprimente l'intensità, sulla fig.ª abbiamo quanto è necessario per determinare la forza F.

Stabilito tuttociò supponiamo, che dopo aver misurate due o più forze in modo da conoscere l'intensità di ciascuna, le applichiamo tutte al medesimo punto A con direzioni differenti. Sieno per es.° tre le forze, e sieno P. Q. R, proporzionali in intensità alle rette AP, AQ, AR, ossia (come nella fig.ª) proporzionali ai numeri 3, $4\frac{1}{2}$, 2.



Se A è fisso, ed al punto A si applica la sola forza P, esso soffrirà una tensione proporzionale per es. a 3 chilog., se tolgo P ed applico la sola Q, ola sola R, il punto A soffrirà una tensione proporzionale a $\frac{9 \text{ chilog.}}{2}$, od a 2 chilog.

Se il punto A è mobile, nell'unità di tempo acquisterà una velocità proporzionale a 3, od a $\frac{9}{2}$, od a 2, secondochè applicherò la sola P, o la sola Q, o la sola R. Sia il punto A fisso, o sia libero, se gli applico tutte e tre le forze nello stesso tempo, il punto soffrirà sempre una tensione nel 1° caso, ~~tenderà~~ si muoverà nel secondo. Per fissare le idee supponiamo A libero, esso per l'azione delle 3 forze è cosa evidente, che si muoverà, ma generalmente percorrerà ne l'una, ne l'altra delle rette AP, AQ, AR, ed è anche evidente che più di una retta non percorrerà nell'unità di tempo acquistando una sola velocità, supponiamo, che per l'effetto di tali forze il mobile si muova nella direzione AS, con una velocità proporzionale ad AS, e concluderemo, che l'effetto delle tre forze possiamo ottenerlo applicando al punto A una forza unica diretta secondo AS, e con intensità espressa da AS, e che in generale

Dato un numero qualsivoglia di forze, che operano su di un ~~punto~~ in direzioni diverse è sempre possibile di determinare una forza unica capace di produrre lo stesso effetto delle altre, e possiam dire equivalente a tutte le forze date.

Una forza unica, la quale equivale ad un numero qualunque di altre forze si chiama la risultante di tali forze, e queste rispetto alla prima si dicono le componenti. Allorquando date le componenti si chiama la risultante, il problema è detto Composizione delle forze. Quando, viceversa, data una forza vogliamo risolverla in un numero dato di altre tutte insieme equivalenti alla forza data, il problema è detto Scomposizione delle forze.

Composizione e Scomposizione delle forze.

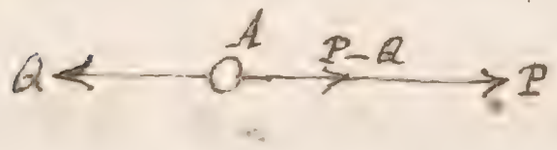
Cominciamo dai casi più semplici.

Evidentemente la risultante delle forze AQ, AP, di cui una ha una intensità espressa da p, l'altra ha intensità q, ed agiscono nello stesso senso è una forza p+q, che agisce nella stessa direzione delle forze date.

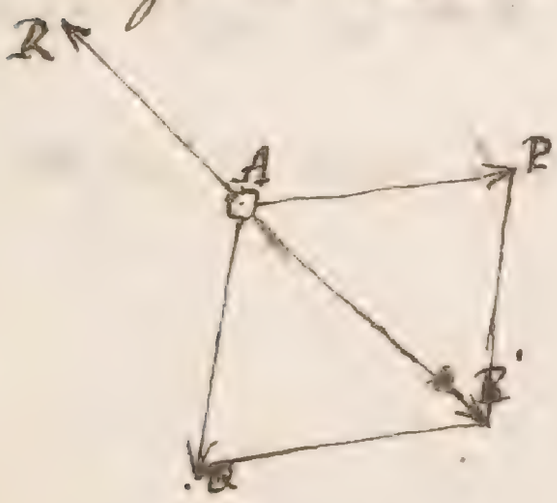
Se il punto A è fisso, la forza p+q produce la tensione p+q su di esso.

Se il punto A è libero, la forza p+q gli imprime una velocità proporzionale a p+q.

Se le forze date P, Q saranno dirette in senso direttamente opposto, la loro risultante sarà diretta nel senso della forza maggiore con intensità p−q.



Tre forze eguali P, Q, R applicate ad uno stesso punto A e facenti tra di loro angoli eguali, ossia di 120° producono equilibrio, poichè non vi ha ragione, perchè A debba muoversi piuttosto in un senso, che in un altro, ciò vuol dire, che ciascuna delle forze distrugge per se sola l'effetto delle altre due, ed in altri termini, che ciascuna delle forze è eguale in intensità, e direttamente opposta alla risultante delle altre due; Dunque due forze equivalenti P, Q applicate ad uno stesso punto, e facenti tra di loro un angolo di 120° hanno una risultante eguale a ciascuna delle componenti, e la cui direzione bisega in parti eguali l'angolo di 120° delle Componenti; dunque se con P, Q si costruisce un



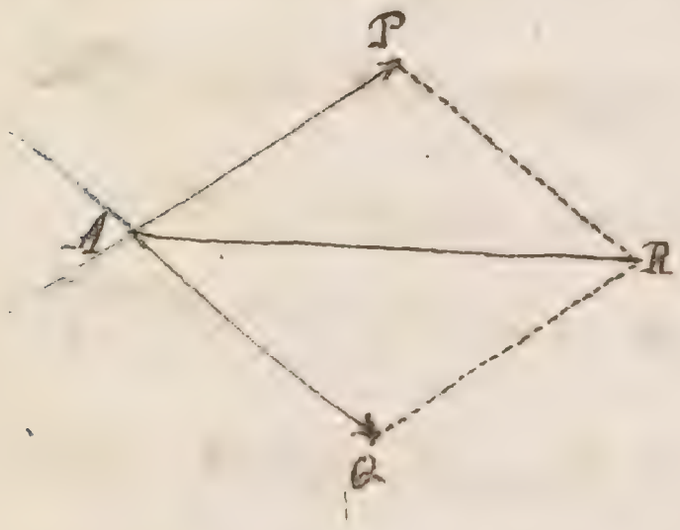
parallelogramma, la diagonale detto esprimerà in intensità, ed in direzione la risultante delle due forze date.

Quel che abbiam detto per 3 forze, è facile applicarlo a 4, 5, etc, e possiamo concludere, che

Se intorno ad un punto sono applicate simmetricamente $2m+1$ forze eguali, la risultante di $2m$ qualunque di tali forze è eguale e direttamente contraria alla $(2m+1)^{sima}$ forza.

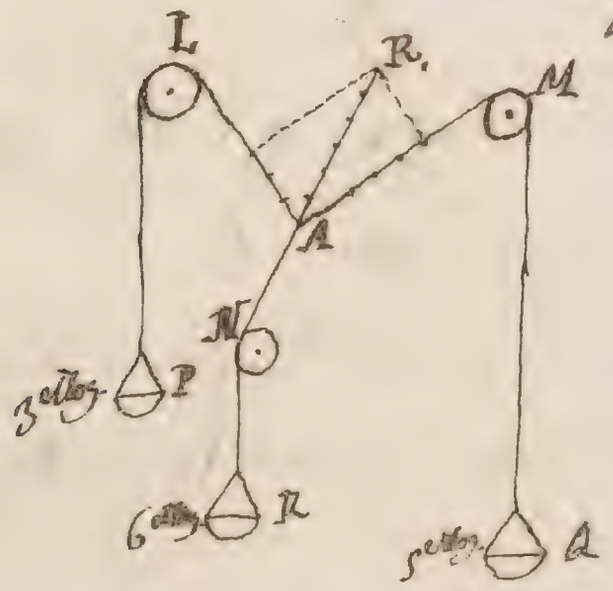
Problema generale rispetto a due forze si riduce a questo

Date due forze espresse in grandezza e direzione dalle linee AP, AQ si domanda la risultante.

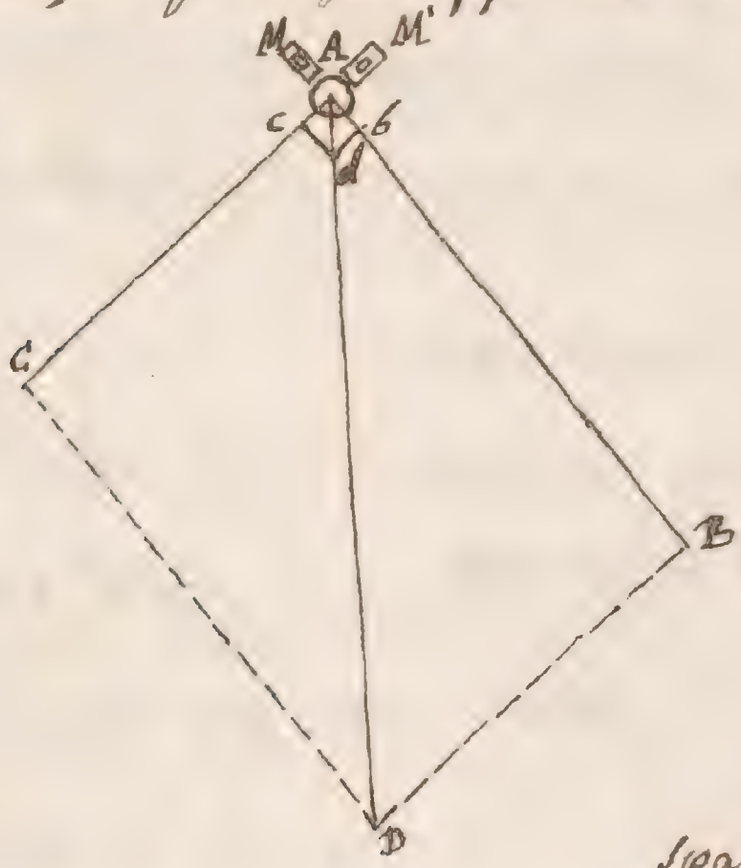


La regola è questa. Sulle linee AP, AQ si costruisca un parallelogramma, la diagonale AR esprimerà in grandezza e direzione la risultante cercata.

Per esempio. Sieno due puleggie L, M, a cui sia avviluppata una fune tenuta tesa in A, da un punto A, che però è mobile, alle due estremità della corda sieno due pesi, uno di 3 ettog., l'altro di 5 ettog., si vuol impedire il punto A di muoversi, ossia applicavi una certa forza in modo, che rimanga in equilibrio. Per ottenere un tal equilibrio bisogna applicare una forza eguale e direttamente contraria alla risultante delle forze P, Q considerandole applicate una da A verso L, l'altra da A verso M. Per avere la risultante portisi da A verso L una lunghezza proporzionale a 3 unità lineari, e da A verso M una lunghezza cinque, costruggasi con queste due linee il parallelogramma AR; sarà la risultante, si misuri questa risultante, trovata per es.° = 6 di attachi una corda in direzione opposta ad AR, si faccia questa corda passare sopra una puleggia, all'estremità di tale corda si ponga un peso di sei ettog., e si avrà il punto A in equilibrio.



sione 9.ª Per dimostrare la verità enunciata relativamente alla risultante di due forze qualunque applicate ad uno stesso punto A supponiamo, che le due forze sieno due impulsi di durata insensibile, che ad ogn.° in A sia una palla, la quale percotiamo nello stesso tempo con due martelli M, M'. L'effetto della percossa M sarebbe per ogn.° di far percorrere nel tempo 1, ossia in un secondo al mobile lo spazio AB, e quello della percossa M' di far percorrere al mobile in un secondo lo spazio AC, ed i due impulsi starebbero :: AB : AC, possiamo dunque rappresentare le intensità degli impulsi con AB ed AC; ora supponga, che i due colpi si diano nello stesso istante, si domanda dopo un secondo dove sarà il mobile. In virtù del solo impulso B il mobile impiega un secondo a passare da A al punto B sulla linea BD, il secondo impulso parallelo a BD non ha veruna tendenza ad avvicinare o ad allontanare il mobile dalla linea BD, nè ad allungare od accorciare il tempo impiegato dal mobile ad andare sopra BD, dunque in un secondo il mobile per l'azione dei due impulsi passa ancora sopra BD, ossia sarà sopra un punto di BD, parimente in virtù del solo impulso C il mobile dopo un secondo si trova in C sulla linea CD, il secondo impulso parallelo a CD non tende ad allungare nè ad accorciare il tempo impiegato dal mobile a portarsi sopra CD, il mobile dunque dopo un secondo per l'azione dei due impulsi si troverà in qualche punto di CD, ma per tal azione deve anche trovarsi sopra BD, si troverà dunque dopo un secondo sopra il punto D comune alle due rette CD, BD; se invece di un secondo si fosse preso per unità un minuto terzo, siccome le velocità son proporzionali ai tempi, il corpo per l'azione del solo impulso B sarebbe venuto non in B, ma soltanto per es.° in b, e per l'azione del solo impulso C in c, e ripetendo la stessa dimostrazione si vedrebbe, che il corpo per l'azione delle due impulsi dopo un terzo si trova in d, che è sulla linea AD,



qualunque altra unità di tempo si prenda, lo stesso ragionamento dimostra, che il corpo si trova sempre per l'azione dei due impulsi dopo tale unità sulla linea AD, il mobile dap in tutti gli istanti si trova sopra AD, oppia percorre esattamente la linea AD diagonale del parallelogramma costruito sopra le rette rappresentanti le intensità degli impulsi.

Le forze sieno ora motrici, dico, che il teorema ha anor luogo.

Infatti la forza motrice possiamo considerarla come una serie di impulsi infinitamente vicini, però per un' intervallo infinitesimo di tempo quel che si è detto pergli impulsi vale per le forze motrici, ora se la proposizione è vera per un' istante, è vera qualunque sia il tempo, per cui agisce la forza. Dunque la risultante di due forze è la diagonale del parallelogramma costruito sopra due linee proporzionali alle loro intensità.

Nel parallelogramma (pag.a 44) AQ=PR, QAR=PRA, APR è supplemento di PAQ, quindi se consideriamo soltanto il triangolo APR abbiamo in esso tutti gli elementi, che determinano le due componenti e la risultante. Dunque tutte le sei quantità, due componenti, risultante, 3 angoli, che queste forze fanno tra di loro son rappresentate dai sei elementi del triangolo APR, dunque tutte le proposizioni dimostrate in Geometria, ed in Trigonometria per gli elementi dei triangoli sono immediatamente trasferibili alla teoria della Composizione e Scomposizione delle forze, Dunque delle sei quantità 3 forze, e 3 angoli basta conoscerne tre per avere le altre tre. Quindi sorgono sei questioni. 1.a Date due forze, e l'angolo compreso trovare la risultante R, e gli angoli, che essa fa con le forze date. 2.a Date le due componenti P, Q, e la risultante R trovare gli angoli, che queste forze fanno tra di loro. 3.a Data una componente, la risultante, e l'angolo delle componenti trovare la 2.a componente, e gli angoli delle componenti colla risultante. 4.a Data una delle 3 forze, ~~tre~~ per es.e una componente, e gli angoli, che essa fa con la risultante, e con la 2.a componente, trovare la 2.a componente, la risultante, e l'angolo tra di esse compreso. 5.a Dati i due angoli, delle componenti, e una componente P con la risultante, e la risultante trovare le componenti, e l'angolo, che comprendono la risultante, e la 2.a componente R.

6.a Dati i 3 angoli delle 3 forze tra di loro, trovare le tre forze.

Questi problemi analoghi a quelli che si presentano nella soluzione dei triangoli son facili a risolversi graficamente.

Come nella risoluzione dei triangoli il sesto problema è indeterminato, così anche nel nostro caso non sarà mai possibile dati i 3 angoli delle 3 forze determinare le loro intensità.

Per risolvere analiticamente i cinque primi problemi ci serviamo delle formole data dalla Trigonometria per la soluzione dei triangoli, Applicandole al nostro triangolo APR, in cui chiamiamo α, β gli angoli PAR, PRA abbiamo la proporzione $P:Q:R :: \operatorname{sen} PRA : \operatorname{sen} PAR : \operatorname{sen} APR$, ossia

$$P:Q:R :: \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}(\alpha+\beta),$$

Dunque nel parallelogrammo delle forze ciascuna forza è direttamente proporzionale al seno dell'angolo compreso tra le altre due, quindi si ha la risoluzione del quinto problema

$$\begin{cases} P = R\,\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \\ Q = R\,\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

con queste formole data una forza possiamo risolverla in due, che facciano coi angoli dati tra loro e colla forza data.

Per la risoluzione del 1° problema Date le componenti e l'angolo compreso trovare la risultante, e gli angoli suoi con le componenti, abbiamo, chiamando θ l'angolo delle Componenti

$$\begin{cases} R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta}, \text{ e } \begin{cases} P:R :: \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\theta \\ Q:R :: \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\theta, \end{cases} \text{ donde} \\ \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\theta\,\dfrac{Q}{R} \\ \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\theta\,\dfrac{P}{R}, \end{cases}$$

se le componenti son date eguali, allora ponendo $P=Q$, abbiamo $\alpha=\beta=\frac{1}{2}\theta$, $R=\sqrt{2P^2(1+\cos\theta)}=2P\cos\frac{1}{2}\theta$,

$$\text{e } P=Q=\frac{R}{2\cos\alpha},$$

con questa formola si possono sostituire ad una forza data R due forze eguali P, Q, che facciano un angolo α con essa R.

Se P.Q comprendono un'angolo retto, ossia se $\theta = 90°$, allora $\cos\theta = 0$, $\operatorname{sen}\theta = 1$,

$R = \sqrt{p^2+q^2}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{Q}{R}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{P}{R}$, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$.

Se nell' ipotesi di $\theta = 90°$, dati gli angoli α, β, e la risultante si vogliono avere le componenti, si ha $P = R\cos\alpha$, $Q = R\cos\beta$, Dunque per risolvere una forza data in due altre perpendicolari tra di loro basta moltiplicarla pei coseni degli angoli tra la forza stessa e le componenti

Quando son date nel 2° problema le forze P, Q, R, la trigonometria ci da gli angoli α, β, θ per i loro semi

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-P)(\frac{1}{2}s-R)}{PR}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-Q)(\frac{1}{2}s-R)}{QR}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-P)(\frac{1}{2}s-Q)}{PQ}} \end{cases}$$

essendo $s = P+Q+R$

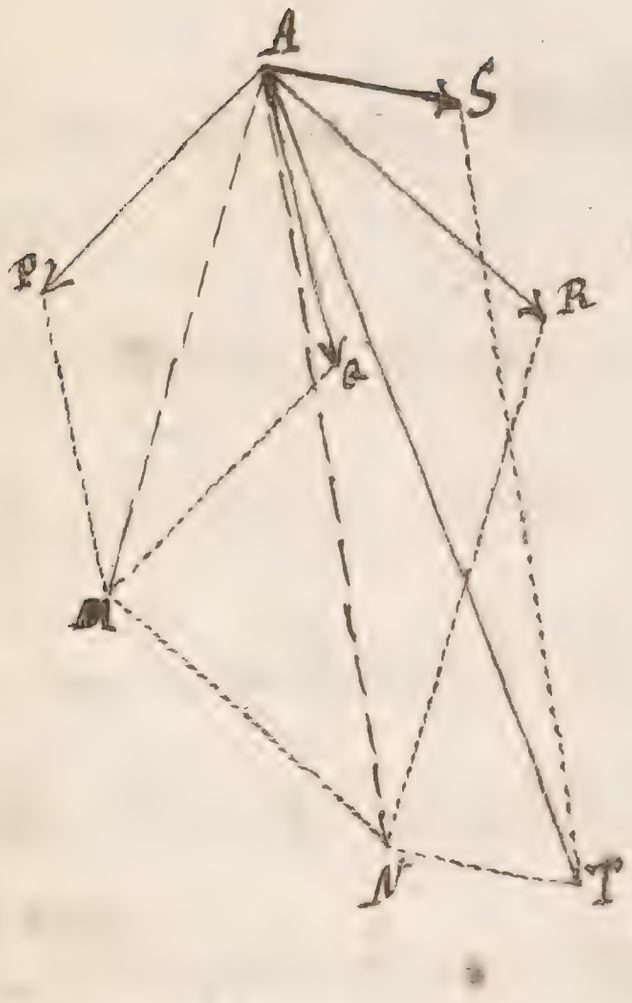
Dati nel 3° problema θ, P, R si ha

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\theta\,\frac{P}{R} \\ Q = R\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} \\ \alpha = \cancel{180°-(\theta+\beta)} = \theta-\beta \end{cases}$$

Supponiamo dati nel 4° prob. α, θ, P avremo

$$\begin{cases} \beta = \cancel{180°-(\theta+\alpha)} = \theta-\alpha \\ Q = P\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)} \\ R = P\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)} \end{cases}$$

Risolto il problema della Composizione delle forze per il caso di due forze facile è il passaggio al caso di un sistema di più forze.



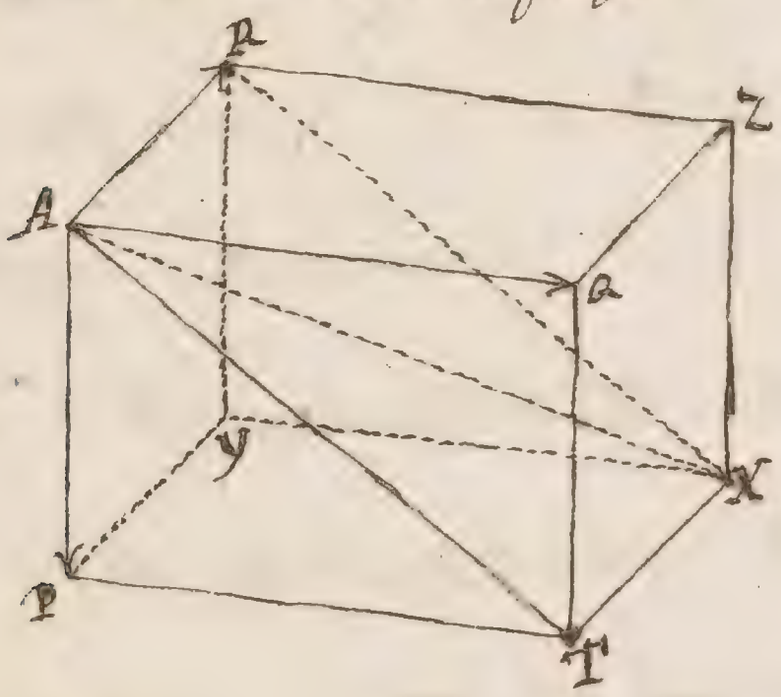
Sieno da comporsi le quattro forze P. Q, R, S applicate tutte allo stesso punto A, ossia debba trovarsi la loro risultante. Per trovarla basterà trovare la risultante di due di queste forze, per es. P. Q, trovare quindi la risultante di questa risultante A M, e di una delle forze restanti per es. R, sia questa A N, si trovi la risultante delle due forze N, ed S, sia essa ~~sopp~~ AT, AT equivalendo alle forze S. ed N, N essendo equivalente alle forze M ed R, M equivalendo alle forze P, Q, evidentemente AT equivarrà alle forze P. Q. R. S, ossia ne sarà la risultante. Qualunque sia il numero delle forze componendole successivamente nel modo suddetto si può sempre ottenerne la risultante.

Per ottenerla non è però bisogno di costruire successivamente i parallelogrammi APMQ, AMNR, etc, ma basta, che si formi un poligono piano, o sghembo (se le forze non agiscono sovra piani diversi) coi lati paralleli ed eguali alle forze, la retta, che chiude questo poligono è la risultante.

Se avessi composte con diverso ordine le forze P. Q, etc sarei giunto allo stesso punto T compiendo il poligono suddetto. Quindi ne deriva un bellissimo teorema di Geometria, che se si formano tanti poligoni con le stesse linee poste nelle stesse direzioni, disponendo le linee in diversi modi, tutti i suddetti poligoni se li comincio ad uno stesso punto A vanno a finire ad uno stesso punto T.

Per la risultante di tre forze, che non giacciono in uno stesso piano esiste un teorema, detto Teorema del Parallelepipedo delle forze, ed

che la diagonale di un parallelepipedo costrutto sopra tre forze date è la risultante di tali forze.

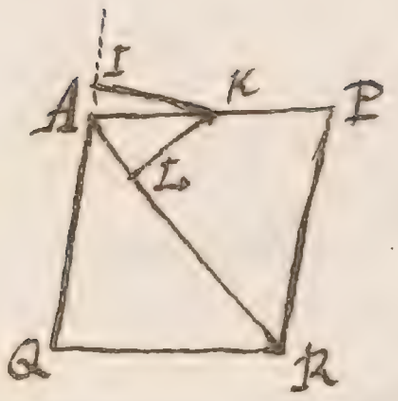


Infatti se si immagina costrutto il parallelepipedo sulle tre forze, si vede, che la faccia APTQ non è che il parallelogramma costrutto sulle linee AP, AQ proporzionali alle intensità delle forze P, Q; per la diagonale ~~per AR~~ AT di questo parallelogramma ~~e per AR~~ si immagini un piano, questo piano taglierà il parallelepipedo secondo il parallelogramma ATXI i cui lati sono la risultante AT delle forze P, Q, e la linea AR proporzionale alla intensità della forza R, la diagonale dunque di questo parallelogramma è la risultante delle tre forze P, Q, R, ora questa diagonale AX è anche diagonale del parallelepipedo.

Se le tre componenti sono perpendicolari a vicenda tra di loro, si ha per determinare la risultante, che diciamo S, $S = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, e chiamando α, β, γ gli angoli che essa fa colle componenti P, Q, R, $\cos\alpha = \frac{P}{S}$, $\cos\beta = \frac{Q}{S}$, $\cos\gamma = \frac{R}{S}$.

Data S ed i 3 angoli α, β, γ abbiamo le componenti

$P = S\cos\alpha$, $Q = S\cos\beta$, $R = S\cos\gamma$; gli angoli α, β, γ non possono prendersi tutti e tre arbitrarii, poichè sono legati dalla relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, quindi quando è data una forza, e due dei 3 angoli che essa fa colle componenti, si può essa forza scomporre in ~~tre~~ perpendicolari tra di loro.



del sistema di tre forze due componenti, d una risultante due forze stanno inversamente proporzionali alle perpendicolari abbassate sopra le loro direzioni da un punto preso ad arbitrio sulla terza forza.

Infatti nel parallelogrammo APRQ, da un punto K preso ad arbitrio su AP si abbassino due perpendicolari una su AR l'altra su AQ, esiono KL, KI, ne risultano due triangoli AKL, AKI, da cui si ha $\begin{cases} KI = AK \operatorname{sen} PAQ \\ KL = AK \operatorname{sen} PAR \end{cases}$

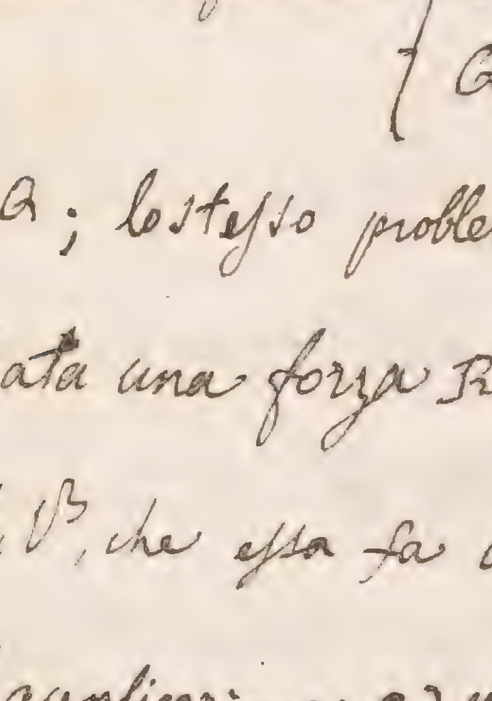
e quindi $KI : KL :: \operatorname{sen} PAQ : \operatorname{sen} PAR$,

ora abbiamo anche $R : Q :: \operatorname{sen} PAQ : \operatorname{sen} PAR$, dunque $R : Q :: KI : KL$.

Lezione 10ª

Per risolvere una forza data in due altre perpendicolari tra di loro, abbiamo trovate le formole $\begin{cases} P = R \cos\alpha \\ Q = R \cos\beta \end{cases}$, R essendo la forza data, α, β gli angoli, che essa fa colle forze da determinare P, Q; lo stesso problema può presentarsi sotto un'altro aspetto;

Data una forza R in intensità e direzione determinata dagli angoli α, β, che essa fa con due assi rettangolari OX, OY tirati ad arbitrio pel punto d'applicazione O della forza, sostituire adesso due forze una diretta nel senso dell'asse delle x, l'altra nel senso dell'asse delle y; Graficamente il problema è sciolto costruendo il rettangolo OPRQ avente per diagonale OR,

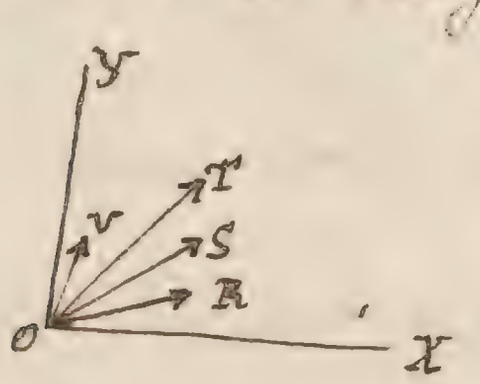


OP, OQ rappresenteranno in intensità e direzione le forze richieste; in numeri si ha $\begin{cases} P = R \cos\alpha \\ Q = R \cos\beta \end{cases}$.

Se invece di OR fosse data Or nell'angolo XOy', il problema enunciato come sopra non avrebbe alcun significato, perchè non sia assurdo bisognerà modificare

l'enunciato dicendo, che ti cercano due componenti una secondo OX, l'altra secondo il prolungamento di OY, poichè è impossibile trovare una componente secondo OY; β essendo in questo caso ottuso, le formole $\begin{cases} P = R\cos\alpha \\ Q = R\cos\beta \end{cases}$ ci dicono ~~tutte~~, che la componente $R\cos\beta$ diventa negativa. Dunque una forza affetta dal segno — dobbiamo supporla diretta in senso contrario a quello, che prima supponevamo. Se la forza data R fa un'angolo ottuso con l'asse delle x, allora una componente è diretta nel senso delle y, l'altra secondo il prolungamento di OX, infatti le formole ci danno la componente P negativa; se R fa un'angolo ottuso con OX, ed un'angolo ottuso con OY, allora le componenti son ambedue dirette secondo i prolungamenti di OX, e di OY, e le formole ci danno P, Q negative.

Dalla soluzione di questo semplicissimo problema ne deriva una soluzione numerica semplicissima del problema ~~grafico~~ generale della composizione di un numero qualunque di forze poste in uno stesso piano, e applicate ad uno stesso punto. Sieno R, S, T, etc le forze date, pel punto d'applicazione di queste forze si conducano ad arbitrio due assi rettangolari OX, OY, si misurino gli angoli, che le direzioni delle forze fanno con questi assi, sieno α, β gli angoli della forza R con OX, OY; α', β' quelli della forza S; α'', β'' quelli della forza T, etc; decomponiamo ciascuna di queste forze in due altre dirette nel senso degli assi OX, OY, in luogo delle quattro forze date nel nostro caso possiamo considerare le 8 equivalenti



$$\begin{cases} P = R\cos\alpha \\ Q = R\cos\beta \end{cases}, \quad \begin{cases} P' = S\cos\alpha' \\ Q' = S\cos\beta' \end{cases}, \quad \begin{cases} P'' = T\cos\alpha'' \\ Q'' = T\cos\beta'' \end{cases}, \quad \begin{cases} P''' = V\cos\alpha''' \\ Q''' = V\cos\beta''' \end{cases},$$

ed avremo ottenuto l'enorme vantaggio che le quattro forze P, P', P'', P''' agiscono nella stessa linea OX, e le 4 forze Q, Q', Q'', Q''' agiscono nella stessa linea OY, e che quindi si possono subito ridurre in due X, Y, chiamando X la forza operante secondo l'asse delle x, e Y la forza operante secondo l'asse delle y, avremo

$$\begin{cases} X = R\cos\alpha + S\cos\alpha' + T\cos\alpha'' + \text{etc.} \\ Y = R\cos\beta + S\cos\beta' + T\cos\beta'' + \text{etc.} \end{cases}$$

ed adottando, per non iscrivere formole tanto lunghe, i Σ che si usano nel calcolo per esprimere le somme finite, avremo

$$\begin{cases} X = \Sigma R\cos\alpha \\ Y = \Sigma R\cos\beta \end{cases}$$

, per $\Sigma R\cos\alpha$ si intenderà una somma di termini dell'forma $R\cos\alpha$, per $\Sigma R\cos\beta$ una somma di termini formati come $R\cos\beta$.

Per avere la risultante delle forze date basta ora trovare la risultante delle due componenti ortogonali X, Y, chiamando F tal risultante, a, b gli angoli di essa con le componenti, abbiamo $F = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$$\begin{cases} \cos a = \dfrac{X}{F} \\ \cos b = \dfrac{Y}{F} \end{cases}$$

; Per semplicità di figura e di concetto ho supposte le forze R, S, T, etc. tutte nell'angolo XOY, ossia tutti gli angoli $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, etc acuti; se di essi giacciano i ottuso, il suo coseno essendo negativo, indica, che la forza facente tale angolo si scompone in due forze ortogonali, ed ambe operanti verso i prolungamenti degli assi, ossia una operante nel senso positivo, e l'altra nel senso negativo, in tal caso egli è evidente, che nel ridurre tutte le forze parallele agli assi OX, OY alle sole X, Y bisogna sommare quelle, che son dirette nel senso di OX, o di OY, e dalle somme

sottrarre quelle dirette in sensi contrarii, ma il calcolo provvede da se a tutto.

Quindi la seguente regola per comporre numericamente un numero grande di forze operanti nello stesso piano, e ridurle ad una sola. Pel punto d'applicazione si conducano arbitrariamente due assi ortogonali, si misurino gli angoli, che ciascuna forza fa con tali assi, si moltiplichino le forze pei coseni di questi angoli, si sommino i prodotti pei coseni degli angoli fatti con OX, ed i prodotti pei coseni degli angoli fatti con OY tenendo conto dei segni, le due somme appartenenti due forze equivalenti a tutte le forze date facendone i quadrati, sommandole, ed estraendo dalla somma la radice quadrata si avrà la risultante F; le formole $\frac{X}{F}$, $\frac{Y}{F}$ danno i coseni degli angoli, che essa fa cogli assi OX, OY.

Cercando X, Y, può avvenire di trovare $X>0$, od $X=0$, od $X<0$, nel 1° caso le forze date si possono ridurre a due, di cui una nel senso delle x, nel 2° caso le forze date si possono ridurre ad una sola nel senso delle y, nel 3° caso si possono ridurre a due, di cui una nel senso delle x negative, lo stesso dicasi riguardo a Y. Tutto ciò è evidente dalle formole $\begin{cases} \cos a = \frac{X}{F} \\ \cos b = \frac{Y}{F} \end{cases}$, F va sempre considerata come positiva.

Se le forze date son soltanto due R, S abbiamo $\begin{cases} X = R\cos\alpha + S\cos\alpha' \\ Y = R\cos\beta + S\cos\beta' \end{cases}$, e quindi

$F = \sqrt{R^2 + S^2 + 2RS(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta')}$, poichè essendo $\alpha+\beta=90°$, $\cos\alpha = \sin\beta$,

ora chiamando θ l'angolo delle due forze hassi ancora

$F = \sqrt{R^2 + S^2 + 2RS\cos\theta}$, donde paragonando questi due valori di F, e osservando,

che $\theta = \lambda' - \lambda$, si ha $\cos(\lambda' - \lambda) = \cos\lambda\cos\lambda' + \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\lambda'$, poichè $\cos\beta = \operatorname{sen}\lambda$ $\cos\beta' = \operatorname{sen}\lambda'$; ecco trovata in una maniera affatto nuova una formola delle fondamentali della Trigonometria.

Quanto si è detto per le forze collocate su di uno stesso piano trasportiamolo al caso delle forze comunque dirette nello spazio.

Sia un sistema di forze R, S, T, etc. si conducano arbitrariamente tre assi ortogonali OX, OY, OZ, si misurino gli angoli delle forze con questi assi, sieno per R $\begin{cases}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{cases}$, per S $\begin{cases}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{cases}$, per T $\begin{cases}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{cases}$, etc. è manifesto, che risolvendo ciascuna delle forze in tre parallele ai tre assi, e sommando quelle dirette nello stesso senso,

$\begin{cases}R\cos\alpha\\ R\cos\beta\\ R\cos\gamma\end{cases}$, $\begin{cases}S\cos\alpha'\\ S\cos\beta'\\ S\cos\gamma'\end{cases}$, $\begin{cases}T\cos\alpha''\\ T\cos\beta''\\ T\cos\gamma''\end{cases}$, etc, [come dal parallelepipedo delle forze]

si saran ridotte le forze date a tre parallele agli assi

$$\begin{cases} X = R\cos\alpha + S\cos\alpha' + T\cos\alpha'' + \text{etc.} = \Sigma R\cos\alpha \\ Y = R\cos\beta + S\cos\beta' + T\cos\beta'' + \text{etc.} = \Sigma R\cos\beta \\ Z = R\cos\gamma + S\cos\gamma' + T\cos\gamma'' + \text{etc} = \Sigma R\cos\gamma \end{cases}$$

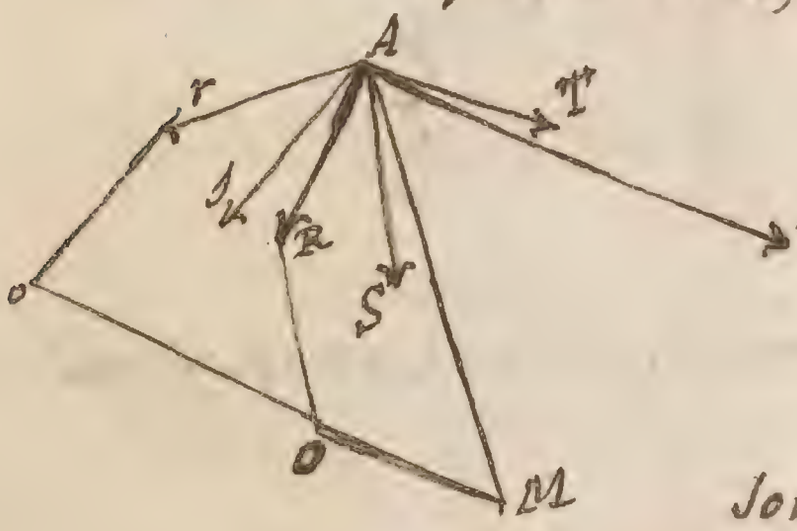
Quindi si ha la risultante F delle forze date $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, e gli angoli a, b, c, che essa fa coi 3 assi pei loro coseni $\begin{cases}\cos a = \frac{X}{F}\\ \cos b = \frac{Y}{F}\\ \cos c = \frac{Z}{F}\end{cases}$ questi coseni possono essere positivi o negativi secondo i segni di X, Y, Z.

Se le forze date sono due R, S troveremo $F = \sqrt{R^2 + S^2 + 2RS(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')}$.

ma, se chiamiamo θ l'angolo delle forze, dal parallelogramma delle forze abbiamo $F = \sqrt{R^2 + S^2 + 2RS\cos\theta}$, dunque pel confronto di queste due valori di F $\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$ formola, già a noi conosciuta per mezzo della Geometria.

In alcuni casi invece di ridur tutte le forze ad una sola si vuol ridurle ad un dato numero di altre forze equivalenti.

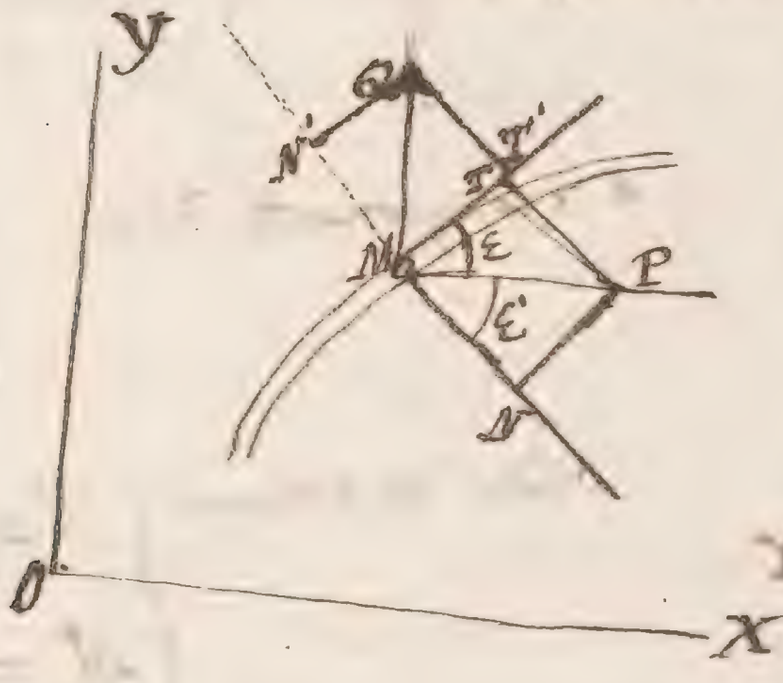
Per esempio si domanda di sostituire alle forze R, S, T altre tre, di cui due sieno r, s. Per risolver questo problema graficamente osservo, che cercando la risultante del sistema dato questa deve essere identica colla risultante del sistema richiesto; ora per avere la risultante di un sistema di forze bisogna cominciando dal punto A d'applicazione costruire un poligono, i cui lati sieno paralleli alle direzioni delle forze, ed eguali in lunghezza alle rette, che le rappresentano, la linea, che chiude il poligono è la risultante, cercando pel sistema di forze dato si ha AM, il poligono dunque formato per trovare la risultante del sistema cercato dovrà essere chiuso da AM, ora due dei lati di questo poligono sono conosciuti, poichè paralleli ed eguali ad r, dunque il 3° sarà necessariamente OM, ma questo deve essere parallelo ed eguale alla linea rappresentante la 3ª forza, dunque dico A si tira una linea At parallela ed eguale ad OM, il sistema delle forze r, s, t sarà il cercato.



Generalmente, quando è un dato un sistema di forze di cui AM è la risultante, se faccio un'altro poligono qualunque, che venga a terminare in M, i suoi lati somministrano un sistema di forze equivalente al dato.

Noi ci occuperemo di un solo sistema, cioè, del passaggio da un sistema di due forze ortogonali ad un'altro sistema di due forze, sistema, che ci sarà utile nel seguito dei nostri studii.

Supponiamo un tubo piegato secondo una curva qualunque, che contenga un piccolo globicino di diametro tale, che possa correre lungo il tubo, a questo siano applicate due forze perpendicolari tra di loro P, Q (qualunque sia il numero di forze sappiamo ridurle a due P, Q)



vogliamo sostituire a questo sistema un'altro sistema di due forze, di cui una tiri secondo la tangente MT, l'altra secondo la normale MN alla curva descritta dal tubo piegato.

Prima di tutto bisogna che stabiliamo perchè verso vogliamo considerare positive le forze sulla tangente, e sulla normale; sieno MT e MN, ossia quelle parti, che faranno un angolo acuto coll'asse delle x positive.

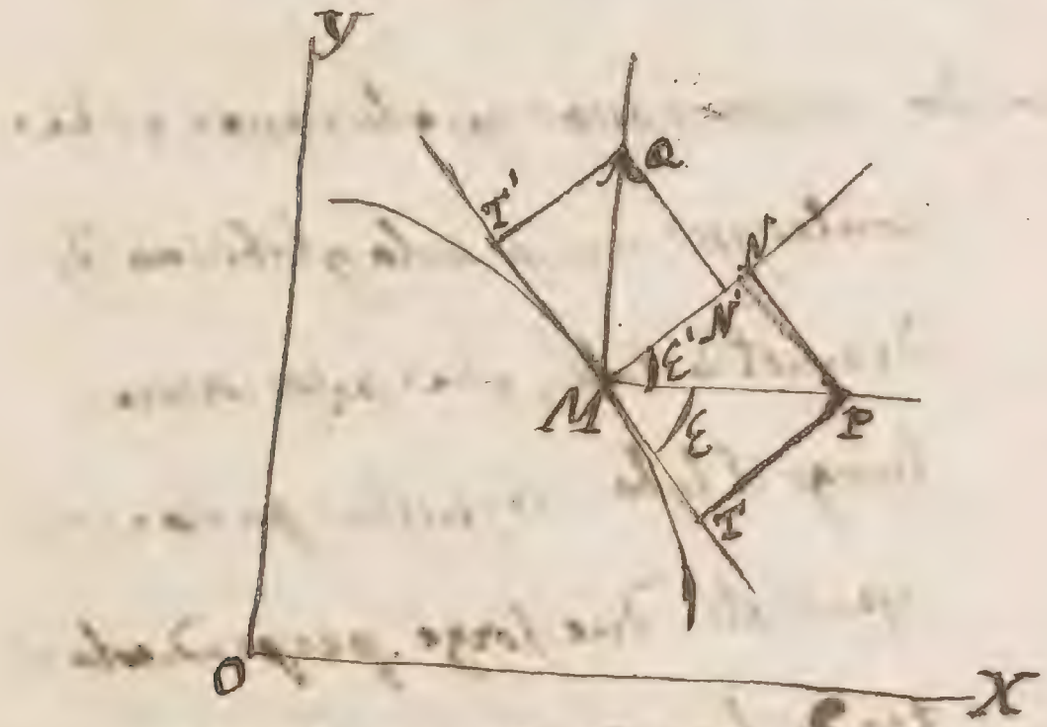
Prendiamo per assi OY, OX paralleli alle ~~forze~~ direzioni delle forze P, Q.

Supponiamo la curva del tubo riferita a tali assi, e supponiamo inoltre, che si sappia tirare una tangente ed una normale, ossia, che si sappiano gli angoli ε, ε', che la tangente e la normale fanno coll'asse delle x.

Per fare la nostra scomposizione, prendiamo prima P, scomponiamola, le forze saranno P cos ε sulla tangente, P cos ε' sulla normale, scomponiamo quindi Q, la forza tangenziale sarà Q cos ε', la normale − Q cos ε, poichè la direzione della forza Q fa con MN un'angolo ottuso, dunque se chiamiamo T, N le

forze cercate abbiamo $\begin{cases} T = P\cos\varepsilon + Q\cos\varepsilon' \\ N = P\cos\varepsilon' - Q\cos\varepsilon \end{cases}$; abbiam supposta la curva γ_1

se la curva fosse di ordinata decrescente, come nella fig^a adjacente, allora



le componenti di P sarebbero $\begin{cases} P\cos\varepsilon \\ P\cos\varepsilon' \end{cases}$,

e le componenti di Q $\begin{cases} -Q\cos\varepsilon' \\ Q\cos\varepsilon \end{cases}$

onde le formole $\begin{cases} T = P\cos\varepsilon - Q\cos\varepsilon' \\ N = P\cos\varepsilon' + Q\cos\varepsilon \end{cases}$.

Dal calcolo differenziale abbiamo $\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}$, $\cos\varepsilon' = \frac{dy}{ds}$, essendo ds il differenziale dell'arco di curva. Ora poichè nella 1^a fig^a x, y, s crescono insieme, dx, dy, ds sono tutti tre positivi, perconseguenza anche $\cos\varepsilon$. $\cos\varepsilon'$,

quindi $\begin{cases} T = \frac{P dx + Q dy}{ds} \\ N = \frac{P dy - Q dx}{ds} \end{cases}$. Nella 2^a fig^a passando da un punto al seguente della curva x, s crescono, y diminuisce, ossia dx, ds sono positivi, dy negativo, quindi

$\frac{dx}{ds}$ positivo, $\frac{dy}{ds}$ negativo, $\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}$, $\cos\varepsilon' = -\frac{dy}{ds}$, poichè questo 2° coseno deve essere positivo per ipotesi. Dunque in questo secondo caso, il sistema cercato è $\begin{cases} T = \frac{P dx + Q dy}{ds} \\ N = \frac{-P dy + Q dx}{ds} \end{cases}$. Queste formole risolvono il problema.

Il problema inverso è subito risolto risolvendo queste formole rispetto a P, Q.

ione 1ª delle formole trovate per passare dal sistema parallelo agli assi al sistema delle forze tangenziale, l'altra normale, abbiamo trovati due sistemi diformole uno pel caso dell'ordinata della curva crescente, l'altro pel caso dell'ordinata decrescente, questi sistemi possiamo comprenderli in un solo $\begin{cases} T = \frac{P dx + Q dy}{dS} \\ \pm N = \frac{P dy - Q dx}{dS} \end{cases}$ convenendo di dare a dN il segno superiore nel 1° caso, e l'inferiore nel 2°.

Se queste equazioni si moltiplicano la prima per dx, la 2ª per dy, e si sommano, si ha $T dx \pm N dy = P dS$, se si moltiplicano quindi la prima per dy, la 2ª per dx, e si sottraggono, si ha $T dy \mp N dx = Q dS$.

da queste due ultime equazioni ricavansi le formole

$$\begin{cases} P = \frac{T dx \pm N dy}{dS} \\ Q = \frac{T dy \mp N dx}{dS} \end{cases}$$

per passare dal sistema di forze tangenziale e normale al sistema parallelo agli assi OX, OY.

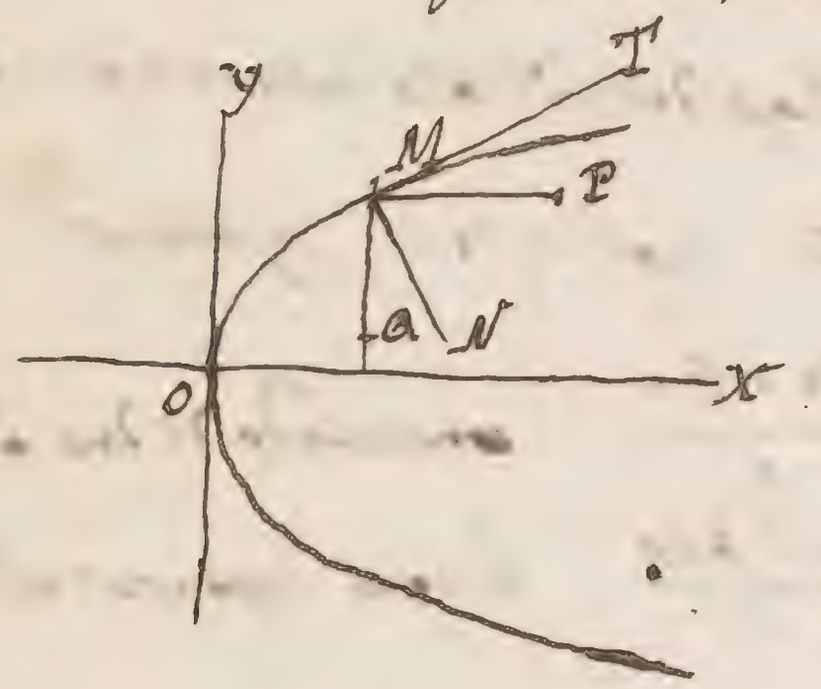
Se le forze P, Q si ricavano dalle formole dando i valori di T, N in funzione di $\varepsilon, \varepsilon'$, abbiamo pel caso dell'ordinata crescente $\begin{cases} P = T\cos\varepsilon + N\cos\varepsilon' \\ Q = T\cos\varepsilon' - N\cos\varepsilon \end{cases}$, e pel caso dell'ordinata decrescente $\begin{cases} P = T\cos\varepsilon + N\cos\varepsilon' \\ -Q = T\cos\varepsilon' - N\cos\varepsilon' \end{cases}$

e abbracciando queste due sistemi di formole in un solo

$$\begin{cases} P = T\cos\varepsilon + N\cos\varepsilon' \\ \pm Q = T\cos\varepsilon' - N\cos\varepsilon \end{cases}$$

Facciamo qualche applicazione di tutte queste formole.

Si abbia un'arco parabolico, dell'asse ox, del cui parametro sia p, sul ramo superiore prendo un



punto $M\{x=a\}$; a questo punto sono app

cate due forze una diretta nel senso delle x

positive. $P=5$ chilog., l'altra Q diretta nel

senso della y negativa, eguale a 4 chilog., come

abbiamo convenuto sarà $Q=-4$. Si vogliono

a queste forze sostituirne altre due una tangenziale, l'altra normale.

Per risolvere il problema trovo i cosni di ε. ε' che la tangente e la normale fanno co

asse delle x positive; $\cos\varepsilon = \frac{\text{sottang.}}{\text{tang.}}$, ora la sottangente pel punto M è $2a$, la tange

è eguale a $\sqrt{4a^2+y^2}$, dunque $\cos\varepsilon = \frac{2a}{\sqrt{4a^2+y^2}}$, essendo $\varepsilon+\varepsilon'=90^\circ$, si ha

anche $\cos\varepsilon' = \sqrt{1-\frac{4a^2}{4a^2+y^2}} = \sqrt{\frac{y^2}{4a^2+y^2}}$, e per essere $y^2=pa$, abbiam

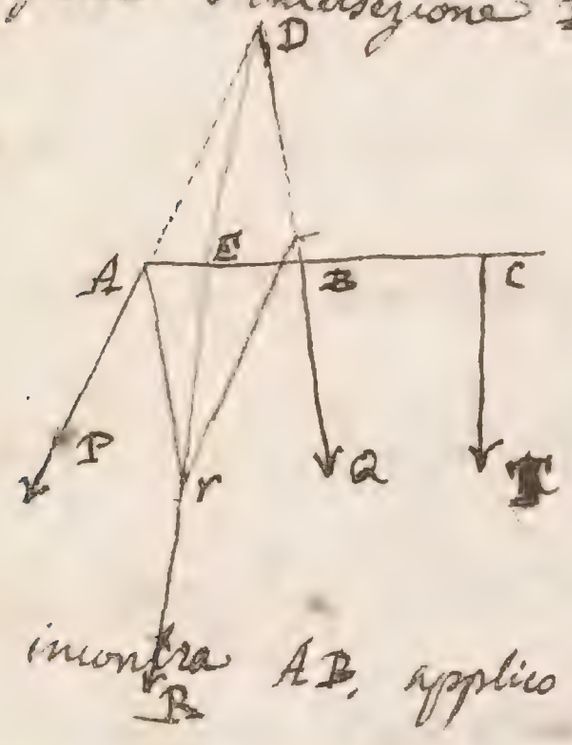
$$\begin{cases} \cos\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{4a+p}} \\ \cos\varepsilon' = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{4a+p}} \end{cases}, \text{ quindi } \begin{cases} T = \dfrac{2P\sqrt{a} - Q\sqrt{p}}{\sqrt{4a+p}} \\ N = \dfrac{P\sqrt{p} - 2Q\sqrt{a}}{\sqrt{4a+p}} \end{cases};$$

i segni di T, e di N diranno in che senso dovranno dirigersi tali forze se sulla tang

e sulla normale, o se nei loro prolungamenti.

Finora abbiam considerate più forze applicate ad un solo punto, abbiam trovato il modo di sostituirne sempre una sola equivalente; ad una sola data di sostituirne più altre producenti ugualmente lo stesso effetto; ~~ed~~ e di sostituire ad un sistema qualunque di forze un altro sistema equivalente di un numero dato di forze.

Ora si abbiano più forze applicate non più ad un sol punto, ma ad una verga rigida inflessibile, siccome si può trasportare il punto d'applicazione di una forza ad un punto qualunque della sua direzione, trasporto i punti d'applicazione A, B delle forze P, Q nel punto d'intersezione D delle loro direzioni prolungate, considero applicate le forze P, Q da D in p. da D in q, costruggo il parallelogramma, ed avrò la loro risultante DR, trasporto il punto d'applicazione D di essa al punto E ove essa sua direzione ~~prolungata~~ incontra AB, applico da E in R una forza eguale ad r, sarà essa la risultante delle due forze P, Q, avendo nello stesso modo la risultante delle due forze R, T, avrò la risultante delle 3 forze P, Q, T, seguitando in questo modo qualunque sia il numero delle forze, si può trovarne la risultante.

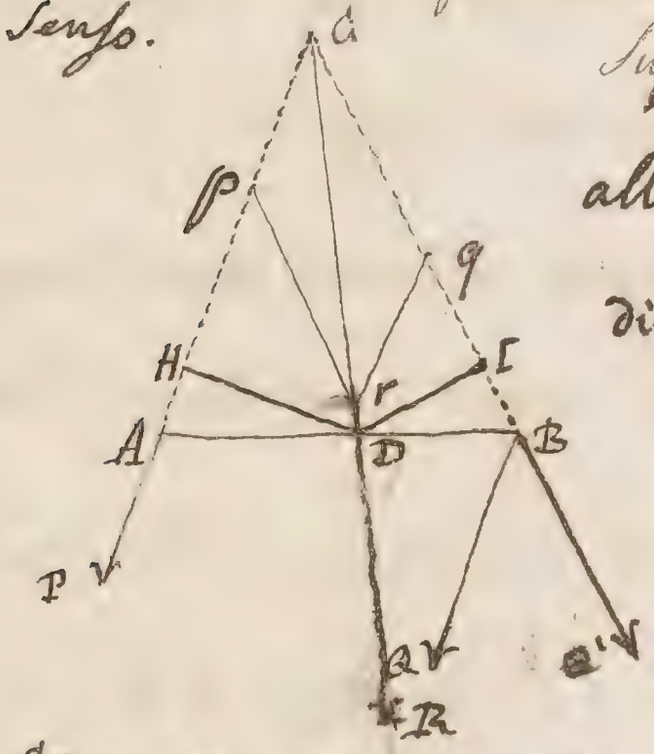


Se tra le forze date, alcuna è diretta in senso contrario alle altre, trasportando i punti d'applicazione per costruire i parallelogrammi, bisognerà sempre avvertire di applicare al nuovo punto la forza nella direzione primitiva; in questi casi alcune volte la direzione della risultante di tutte le forze prolungata non incontra la retta, che congiunge i punti d'applicazione, allora è impossibile di applicare su di tal retta una forza equivalente a tutte le altre, ma bisogna

applicarla sul suo prolungamento. Non importa, che i punti d'applicazione siano in linea retta, comunque siano posti, conducendo successivamente le forze s'arriva sempre alla risultante. Vi ha però dei casi, che sfuggono a questo metodo generale, è il caso delle forze parallele.

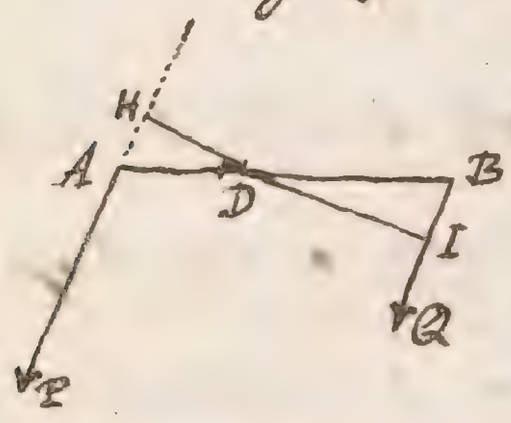
Si arriva però anche in questo caso con altri metodi ad ottener la risultante.

Sieno due forze parallele P. Q applicate alla verga rigida AB, e dirette nello stesso senso.



Supponiamo per un momento, che la forza Q non sia parallela alla forza P, ma sia nella direzione BQ' facente con la direzione di P un'angolo QBQ', si avrà la risultante delle forze P. Q' prolungando le loro direzioni fino ad incontrarsi in C, costruendo portando da C verso A Cp = AP, e da C verso B Cq = BQ' = BQ, costruendo quindi coi lati Cp. Cq il parallelogramma, la diagonale Cr sarà la risultante, la quale bisognerà applicare da D verso R, perchè produca l'effetto delle due forze date P, Q'; Ora quanto più l'angolo QBQ' diminuisce, diminuisce anche l'angolo pCq, che gli è eguale, e l'angolo Cpr tenda a diventare = 180°, ossia Cp. pr tendono a disporsi sulla stessa linea, che quando l'angolo QBQ' sarà divenuto infinitamente piccolo si confonderà colla diagonale Cr, nel caso dunque, in cui l'angolo QBQ' è al limite della picciolezza, ossia zero. Cr è eguale a Cp + pr = P + Q; inoltre l'angolo, che la risultante Cr fa colle forze P. Q' essendo la metà dell'angolo di queste forze, le queste forze fanno tra loro un'angolo piccolissimo, o sono parallele, sarà a fortiori anche a dire parallela Cr. La risultante dunque delle forze P. Q è loro parallela, agisce nello stesso senso, e con un'energia eguale alla somma di quelle di queste forze. Resta a determinarsi il punto, ove si debba applicare. Perciò ricordiamoci, che se da un punto della risultante Cr delle due forze P. Q' caliamo due perpendicolari DI, DH sulle componenti abbiamo P : Q :: DI : DH

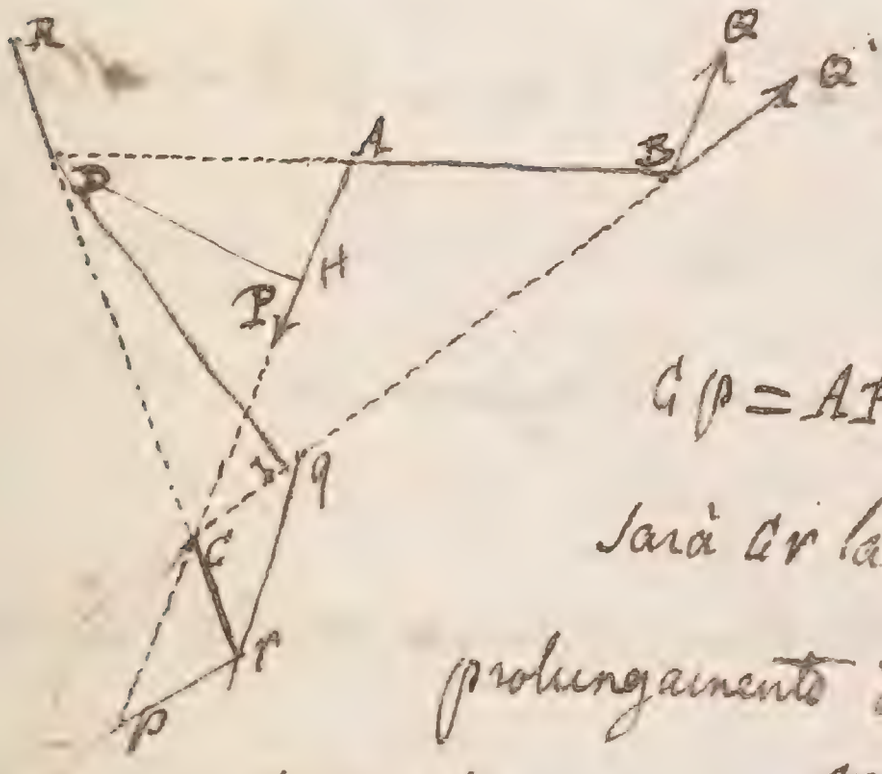
questa proposizione è vera, qualunque sia l'angolo di B con P, dunque è ancora vera, quando quest'angolo è infinitamente piccolo, sottanto che col diminuire di quest'angolo, l'angolo delle perpendicolari tende a diventare = 180°, e le perpendicolari a metterſi sul prolungamento l'una dell'altra; Passando al limite dell'angolo QBQ', le perpendicolari saranno rigorosamente in linea retta, ma Harà sempre P:Q::DI:DH;



ma allora ne risultano due triangoli simili ADH, BDI, donde si ha AD:BD::DH:DI, dunque nel caso delle forze parallele AD:BD::Q:P;

Dunque date due forze parallele, e volte nello stesso senso, la loro risultante è parallela ad esse forze, eguale alla loro somma, agisce nello stesso loro senso, e le sue distanze dai punti di applicazione delle componenti sono inversamente proporzionali alle componenti stesse.

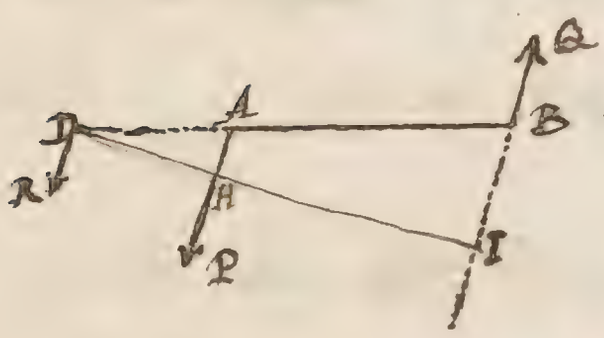
Se le forze parallele P, Q sono dirette in senso contrario, supponendo sempre Q nella direzione Q' ad angolo con la direzione della forza P,



si avrà la risultante di P, Q' prolungando le loro direzioni sino ad incontrarsi in C, portando da C verso B Cq = BQ' = BQ, da C verso p Cp = AP, e costruendo con Cp, Cq il parallelogramma Cprq. Sarà Cr la risultante ed il suo punto d'applicazione sarà sul prolungamento di AB. Diminuendo l'angolo QBQ', diminuisce il suo eguale Cpr, e pr tendendo a disporsi sulla linea Cp; giunto QBQ' al suo limite di piccolezza, Cr prolungata andrà ancora ad incontrare il prolungamento di AB dalla parte della forza maggiore P. Cr, pr disponendosi lungo Cp sarà

$Gr = Gp - pr = P - Q$, e facendo Gr con Gp un'angolo retto, applicata al punto D. che ora determineremo, Gr sarà parallela alle forze P. Q, e verrà nel senso di P.

Per determinare D osserviamo, che qualunque sia l'angolo QBQ', dal punto D abbassando sulle componenti le perpendicolari DH, DI, sta sempre la proporz. $P : Q :: DI : DH$, e che per conseguenza giunto QBQ' allo limite di grandezza Resta ancora $P : Q :: DI : DH$, orain talcaso l'angolo delle perpendicolari DI, DH diventa anche nullo, e si hanno due triangoli simili ADH, BDI, donde



$AD : BD :: DH : DI$, dunque anche nel caso delle forze parallele a volte in senso contrario $AD : BD :: Q : P$.

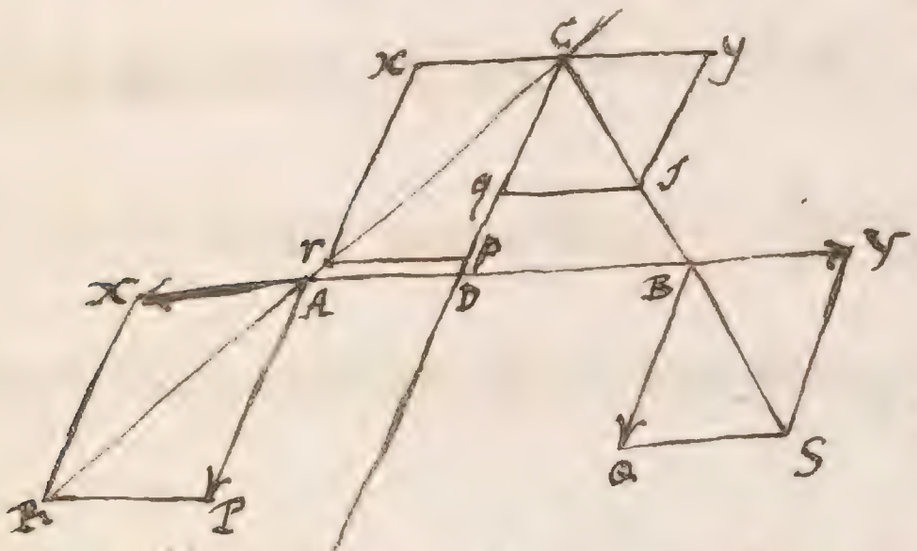
Dunque la risultante di due forze parallele e volte in senso contrario è parallela alle Componenti, eguale alla loro differenza, opera nel senso della maggiore, il suo punto d'applicazione cade sul prolungamento di AB dalla parte della forza maggiore P, e le sue distanze dai punti d'applicazione delle componenti sono inversamente proporzionali alle componenti.

Lezione 12ª

I ragionamenti fatti nella lezione antecedente per la ricerca della risultante di due forze parallele sono sofistici, ma potendo nulla meno lasciare alcuno di vago nella mente, cerchiamo di arrivare con dimostrazioni elementari ai risultati già trovati.

Abbiamo già usato altra volta un' artifizio, che si impiega sovente in Meccanica, cioè di aggiungere ad un mobile, a cui sono applicate delle forze, più forze che si facciano equilibrio. Prendendo a trattare in primo luogo il caso delle forze parallele e coppiranti P, Q, applichiamo agli estremi della verga rigida

AB supposta senza peso due forze eguali X.Y ed in direzione opposta,
avremo così quattro forze da comporre invece di due, e componendo
P.X. e Q.Y, le risultanti AR. BS comporranno un sistema equivalente
al sistema delle forze P.Q, per conseguenza trovando la risultante delle

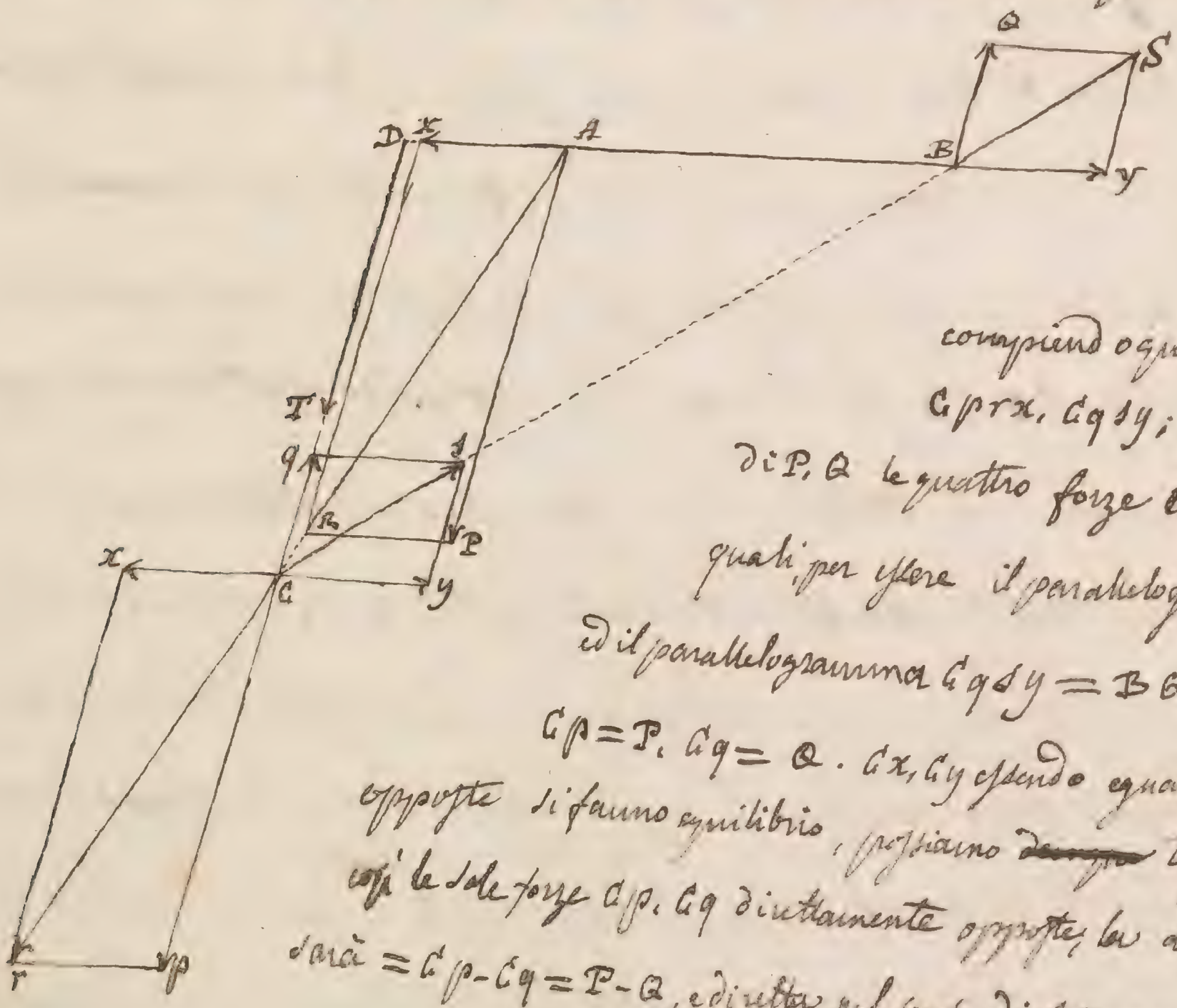


forze AR & BS, il che si può, poichè le
loro direzioni non sono più parallele,
essa sarà ancora risultante delle
forze date P.Q.

Ma invece di fare questa composizione, che non ci lascierebbe scoprire
la legge per trovar in ogni caso la risultante di due forze parallele,
applichiamo in C intersezione dei prolungamenti di AR. BS
le due forze AR. BS, il che si può sempre fare purchè C si supponga
connesso invariabilmente ~~connesso~~ coi punti A.B. Si scompongano
quindi ~~Ecli~~ ciascuna di tali forze in due, una parallela ad AB, l'altra
in direzione parallela alle forze P.Q; per ciò i fili da C una
parallela ad AR. Duna parallela alle forze P.Q, si costruiscano
quindi i parallelogrammi Cxrp. Cysq aventi per diagonali Cr = AR,
CS = AS, avremo sostituite così alle due forze r. s. quattro forze
Cx. Cy. Cq. Cp; ora i triangoli Crp, Csq essendo rispettivamente eguali
ai triangoli APR, BQS, ne segue, che anche i parallelogrammi Cxrp, AXRT,
e Cysq, BYSQ ~~sono~~ identicamente eguali, donde risulta Cx = X = Y = Cy,
Cp = P, Cq = Q. Ciò posto le forze Cx. Cy essendo eguali, e direttamente
opposte si fanno equilibrio, si possono dunque togliere, e restano Cp. Cq,
equivalenti alle forze date P, Q; La loro risultante dunque = Cp + Cq = P + Q
applicata al punto D, ove Cp incontra AB sarà la risultante richiesta.

Dunque la direzione della risultante è parallela alle direzioni delle componenti, e la intensità è eguale alla somma delle intensità delle componenti, per trovar D, dai triangoli simili CAD, Crp abbiamo AD:pr :: CD:Cp, e dai triangoli simili CBD. Csq abbiamo BD:ps :: CD:Cq, e poichè pr=X, ps=Y, Cp=P, Cq=Q, abbiamo $\begin{cases} AD:X :: CD:P \\ BD:Y :: CD:Q \end{cases}$, donde, poichè X=Y, si ha AD.P=BD.Q ossia AD:BD::Q:P. Dunque il punto d'applicazione D della risultante è sulla linea AB a distanze dai punti d'applicazione A,B inversamente proporzionali alle forze P, Q.

Le forze P, Q sieno ora dirette in senso contrario. Applichiamo ancora nei punti A,B due forze eguali X, Y operanti secondo i prolungamenti di AB in direzione opposta, troviamo le risultanti AR, BS delle forze P, X, e delle forze Q, Y, equivarranno delle alle forze date P, Q. Queste forze AR, BS trasportiamole in C intersezione dei loro prolungamenti sia Cr=AR, Cs=BS, si scompongano Cr, Cs ciascuna in due una in direzione parallela ad AB, l'altra alle direzioni delle forze date, tirando per C una parallela ad AB, ed una parallela alle forze P, Q, compiendo quindi i parallelogrammi Cprx, Cqsy; avremo allora invece di P, Q le quattro forze Cx, Cp, Cy, Cq, delle quali, per essere il parallelogramma Cprx=APRX, ed il parallelogramma Cqsy=BQSY, Cx=X=Y=Cy, Cp=P, Cq=Q. Cx, Cy essendo eguali e direttamente opposte si fanno equilibrio, possiamo ~~dunque~~ toglierle, e ci restano così le sole forze Cp, Cq direttamente opposte, la cui risultante però sarà =Cp-Cq=P-Q, e diretta nel senso di Cp, questa risultante



essendo anche la risultante delle forze P. Q bisognerà che la trasportiamo sul suo prolungamento in D, da D verso T. La risultante dunque di due forze parallele P. Q volte in senso contrario, è DT = P − Q, se P è la forza maggiore, applicata sul prolungamento di AB dalla parte di P, e diretta nel senso di P.

Per trovare D abbiamo i triangoli simili drp, CAD, da cui si ha AD : pr :: CD : Cp, ossia AD : X :: CD : P, come pure i triangoli simili CBD, Cfg, da cui si ha BD : qs :: CD : Cq, ossia BD : Y :: CD : Q, dalle quali proporzioni, poichè X = Y. si ha AD.P = BD.Q, e AD : BD :: Q : P, dunque anche in questo caso le distanze del punto d'applicazione della risultante dai punti d'applicazione delle componenti sono inversamente proporzionali alle componenti.

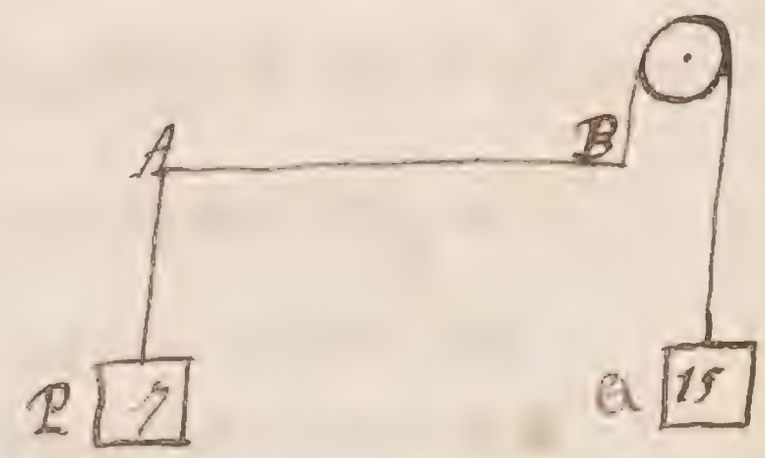
Componendo la proporzione AD : BD :: Q : P, basta AD : BD : AD+BD :: Q : P : P+Q, ciò che significa nel caso delle forze cospiranti, che AD : BD : AB :: Q : P : R; risolvendo la stessa proporzione basta AD : BD : BD − AD :: Q : P : P − Q, ossia nel caso delle forze contrarie AD : BD : AB :: Q : P : R; Dunque tanto per le forze parallele cospiranti, come per le contrarie è vero, che ciascuna delle forze applicate ad una verga rigida, delle quali due son componenti ed una risultante, è proporzionale alla distanza tra i punti d'applicazione delle altre due.

Questa proposizione ci somministra la soluzione di tutti i problemi che si presentano per la composizione di due forze parallele in una, o per la scomposizione di una in due parallele.

Così se si abbia una sbarra inflessibile AB lunga 110 centim. alle cui

estremità sieno in direzioni contrarie attaccate due forze una P proporzionale a 7 chilog., l'altra Q proporzionale a 15 chilog., e si voglia aver la grandezza di tali forze, ci serviamo delle proporzioni $\begin{cases} AD:AB :: Q:R \\ BD:AB :: P:R \end{cases}$, donde abbiamo, essendo $R = Q+P =$

$$\begin{cases} AD = \dfrac{Q \cdot AB}{R} = \dfrac{110^{cent.} \cdot 15}{22} = 206,\ldots^{cent.} \\ BD = \dfrac{P \cdot AB}{R} = \dfrac{110^{cent.} \cdot 7}{22} = 96,\ldots^{cent.} \end{cases}$$



se invece di $Q = 15^{chil.}$ si avesse $Q = 10$,

allora $\begin{cases} AD = \dfrac{10 \cdot 110}{3} = 366^{cent.} \\ BD = \dfrac{7 \cdot 110}{3} = 256^{cent.} \end{cases}$,

se Q fosse dato $= 7{,}01$, allora

$$\begin{cases} AD = \dfrac{(7{,}01)\,110}{0{,}01} = 701 \cdot 110 = 77110^{cent.} \\ BD = \dfrac{7 \cdot 110}{0{,}01} = 700 \cdot 110 = 66110^{cent.} \end{cases}$$

, da questi 3 risultanti di valore di AD, e BD si vede chiaramente che quanto più Q tende a diventare eguale a P, il punto d'applicazione D della risultante tende ad allontanarsi dal punto A, per $Q = P$, la risultante è dunque applicata ad una distanza infinita, allora $R = 0$; le formole infatti ci danno $AD = \dfrac{Q \cdot AB}{R} = \infty$, poichè $R = 0$. Non havvi dunque nel caso di due forze eguali, parallele, contrarie e non opposte, alcuna risultante. Ciò di più dimostrare, dicendo non esservi ragione in tal caso, in cui tutto è simmetrico, perchè la risultante debba essere applicata piuttosto sul prolungamento di AB dalla parte di A, che dalla parte di B, o che trovandosi tra A, e B debba trovarsi piuttosto vicina ad A, che a B, o che trovandosi nel punto di mezzo di AB debba esser diretta piuttosto in un senso, che in un'altro. Si dimostra poi assai più rigorosamente, osservando,

che quando applico due forze in tal modo ad una retta, tali forze tendono a produrre un moto rotatorio, poichè moto progressivo non le possono produrre, e fanno girare AB attorno al suo punto di mezzo, ora con una forza unica è impossibile di produrre un moto di rotazione senza produr moto di traslazione.

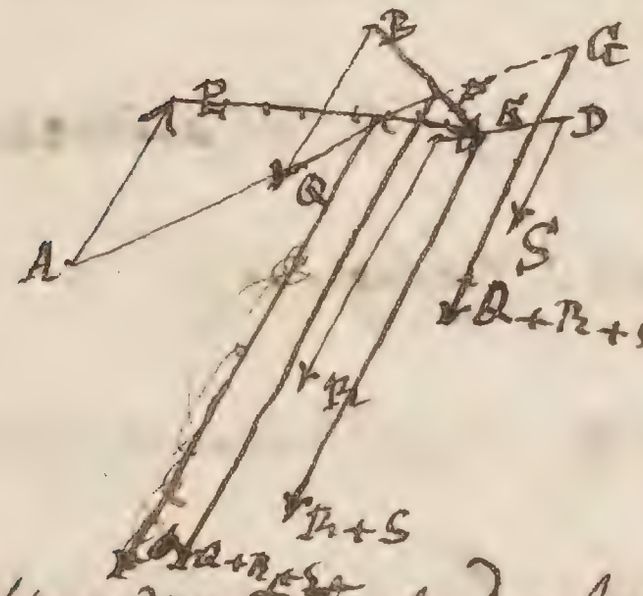
Tale sistema non essendo trasformabile, lo considereremo a parte, e perciò gli dà un nome particolare, e brevemente lo dice una coppia. Quindi il sistema di due forze P, -P contrarie e non opposte è una coppia. Il valore P delle forze costituenti la coppia dicesi intensità della coppia. La comune perpendicolare alle direzioni delle forze dicesi il braccio della coppia. Parleremo dipoi del sistema in appresso, ora continuiamo la teoria della composizione e decomposizione delle forze.

Lezione 13.ª

Le due proposizioni dimostrate relativamente alla composizione di due forze parallele si possono estendere alla composizione di un numero qualsivoglia di forze seguendo la stessa norma seguita per le forze convergenti, la quale è di comporre due qualunque delle forze date, comporre quindi la risultante con una 3ª forza data, la risultante di queste con una 4ª delle forze date, e così di seguito fino a tanto che si siano comprese tutte le forze date.

Se sono tutte volte in un senso, qualunque ordine tenuto nel comporre è indifferente per il risultato. Se sono volte alcune delle forze in un senso, altre in un altro, vi ha una scelta da fare nell'ordine, in cui le

forze si compongono. Infatti se le forze cadono dalla stessa parte non si giungerà mai ad una coppia; ma supponiamo, che agiscano le une per un verso, le altre nel verso contrario, che prese delle forze date P, Q, R, S tre agiscano in un senso,



e la quarta P in senso contrario, il principio della composizione successiva delle forze è inapplicabile, se vogliamo cominciare a comporre le forze P, Q, quando queste forze sono eguali, poichè abbiam dimostrato, che due forze P, Q hanno resultante, quando sono eguali, bisogna dunque nel comporre le forze parallele sempre cercare di evitare inconvenienti di tal sorta; ora non vi ha mezzo più chiaro per evitarli, che quello di comporre tutte le forze, che agiscono in un senso in una forza unica, tutte le forze, che agiscono nell'altro anche in una forza unica, e cercare quindi la risultante di queste due forze contrarie; se saranno ancor disuguali il sistema dato concluderemo, che la sua risultante, da quale potremo determinare, se saranno eguali concluderemo non esservi risultante.

Torneremo ancora a questo problema dandone una soluzione analitica, come abbiam fatto per la composizione delle forze concorrenti in un punto.

Per tutte proposizioni, di cui ci siamo serviti per la composizione delle forze parallele servono per la loro decomposizione.

Il problema di decomporre una forza data in due altre parallele è indeterminato, poichè quattro sono le cose da determinarsi, e due soltanto le relazioni per determinarle, le quali sono, essendo sempre P, Q le componenti, R la risultante, A, B, D i loro punti d'applicazione, $R = P \pm Q$, e $P : Q : R :: BD : AD : AB$, dicui la prima $R = P \pm Q$ è inclusa nelle altre due, poichè da queste ricavando P, Q, e sommandole si ha $P + Q = R \frac{AD + BD}{AB} = R$, e sottraendole nel caso, che P, Q siano di verso contrario $P - Q = R \frac{BD - AD}{AB} = R$.

Per supplire alla mancanza di relazioni per avere il problema determinato bisognerà, che diano altre la forza R due altre cose, per es.e i punti d'applicazione A, B, ossia le distanze AD. BD. allora hassi $P = \frac{R \cdot BD}{AB}$, $Q = \frac{R \cdot AD}{AB}$; se il punto D d'applicazione della forza R è dato tra i punti A, B, le componenti saranno volte dalla stessa parte, se il punto D è dato fuori di AB, ossia nel suo prolungamento, le componenti saranno applicate in senso contrario, la più vicina a D nel senso di R, l'altra in senso contrario, in questo caso le distanze AD. BD devono esser date di segno contrario.

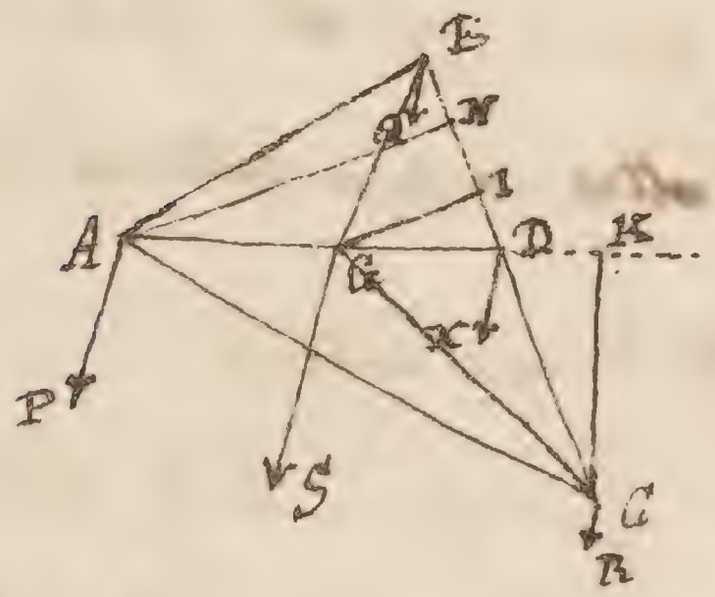
Possiamo in secondo luogo dati R, una componente P, e il punto d'applicazione di questa, ossia AD trovare le altre grandezze Q, BD, AB.

si ha $Q = R - P$, $BD = AD \frac{P}{R-P}$, $AB = AD + BD$; se P è dato minore di R, allora il punto D è tra i punti A, e B, e le 3 forze agiranno, se $P > R$, allora Q essendo negativa sarà volta in senso contrario alle altre due forze P, R, e BD essendo anche negativa dovrà esser portata da D verso A nello stesso senso di AD, e per conseguenza il punto D sarà sul prolungamento di AB.

Finalmente possiamo dati R, P, BD, avremo $Q = R - P$, $AD = BD \frac{R-P}{P}$, $AB = AD + BD$, in questo caso come nel precedente se sarà $P < R$, il punto D sarà tra A e B, se sarà $P > R$, il punto D sarà sul prolungamento di AB.

Risolti questi problemi semplicissimi passiamo a risolverne uno un poco più complicato.

Su un piano comunque situato, resistente ed inflessibile prendasi un punto G, a questo punto G si immagini applicata una forza S non contenuta nel piano, prendansi quindi tre altri punti sul detto piano in modo, che G cada entro al triangolo formato unendo i tre punti, si chiede di risolvere la forza S in tre altre forze ad essa parallele ed applicate nei tre punti dati A, B, C.



Per risolvere questo problema procederemo in ordine inverso a quello, con cui abbiamo proceduto per la composizione delle forze parallele.

Da A si tiri al punto G una retta, la quale si prolunghi fino ad incontrare il lato BC in I, si decomponga quindi la forza S in due altre parallele P, X una applicata in A, l'altra in I; si decomponga quella applicata in I, cioè X in due altre parallele una applicata in B, l'altra in C, avremo così le forze S, P, X la relazione $S : P : X :: AI : GI : AG$ e tra le forze X, Q, R la relazione $X : Q : R :: BC : IC : BI$, in ogni caso dati i quattro punti A, B, C, G, si potranno trovare BI, IC, allora dalla 1ª relazione abbiamo P, X, sostituendo X così ricavato nella 2ª le avremo Q, R. Ciò richiederebbe per ogni caso particolare una serie di operazioni piuttosto provviste preliminare X, ora lo scopo delle Matematiche è di dare per la soluzione generale di un problema delle formole, in cui, passando dal generale ai casi particolari, non si abbiano a sostituire, che i numeri esprimenti le grandezze date; Per stabilire tali formole per la soluzione del nostro problema si osservi, che nella 1ª relazione si ha il rapporto $X : AG$, nella 2ª il rapporto $X : BC$, onde perciò le moltiplichiamo tutti i termini delle seguenti della prima proporzione

continua per BG, di ~~portioni~~ termini conseguenti della 2ª per AG,
le due continue proporzioni, che otterremo

$$\begin{cases} S:P:X :: AD\cdot BC : GD\cdot BC : AG\cdot BC \text{ , avendo un rapporto} \\ X:Q:R :: AG\cdot BC : AG\cdot CD : AG\cdot BD \text{ , comune } X : AG\cdot BG \end{cases}$$

potremo ridurle in una sola proporzione continua

$$S:P:Q:R :: AD\cdot BC : GD\cdot BC : AG\cdot CD : AG\cdot BD ,$$

A questo punto la soluzione del problema possiamo considerarla come finita, ma vediamo ancora di interpretare geometricamente questa soluzione. Ciascuna forza delle quattro S.P.Q.R essendo proporzionale ai prodotti rispettivi AD·BC, GD·BC, AG·CD, AG·BD, vediamo cosa rappresentino questi prodotti. Assumendo a considerare il 1° prodotto AD·BC, abbiamo in esso BC base del triangolo ABC, la quale moltiplicata per l'altezza AH di tal triangolo è eguale al doppio della di lui area, ed $AD = \frac{AH}{\operatorname{sen} ADB}$,

dunque $AD\cdot BC = \frac{AH\cdot BC}{\operatorname{sen} ADB} = \frac{2\,\overline{ABC}}{\operatorname{sen} ADB}$.

Nel 2° prodotto ~~ottenuto~~ GD·BC, ~~abbiamo~~ BC, che possiamo considerar come base del triangolo BGC, e $GD = \frac{GI}{\operatorname{sen} ADB}$, essendo GI l'altezza del triangolo BGC, dunque $GD\cdot BC = \frac{GI\cdot BC}{\operatorname{sen} ADB} = \frac{2\,\overline{BGC}}{\operatorname{sen} ADB}$.

Nel 3° prodotto AG·CD possiamo considerare AG come base del triangolo AGC, la cui altezza è CK, allora CD l'abbiamo $= \frac{CK}{\operatorname{sen} CDK} = \frac{CK}{\operatorname{sen} ADB}$,

ed $AG\cdot CD$ risulta $= \frac{AG\cdot CK}{\operatorname{sen} ADB} \Rightarrow \frac{2\,\overline{AGC}}{\operatorname{sen} ADB}$.

Nel 4° prodotto AG·BD, AG, BD essendo rispetto al triangolo ABG lo stesso, che AG, CD rispetto ad AGC, possiamo subito concludere, che $AG\cdot BD = \frac{2\,\overline{ABG}}{\operatorname{sen} ADB}$.

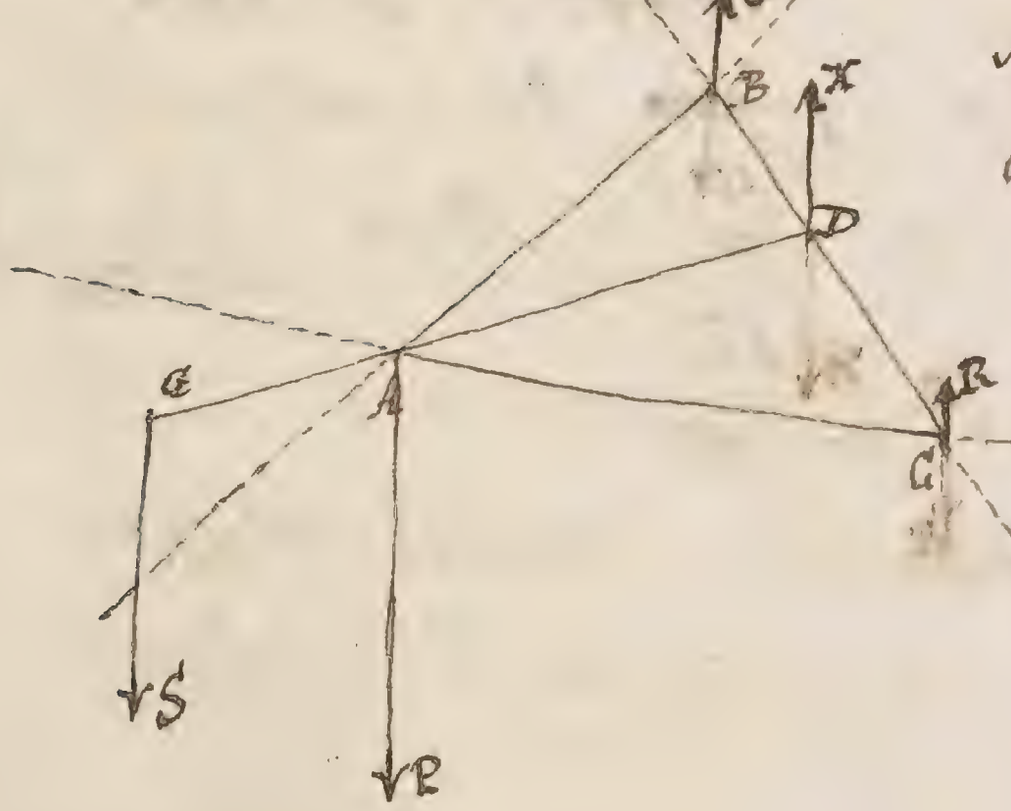
Da queste considerazioni risulta, che i prodotti suddetti stanno, come le aree dei triangoli ABC, BGC, AGC, ABG, e finalmente, che S:P:Q:R :: ABC:BGC:AGC:ABG ossia, che ciascuna forza è proporzionale all'area del triangolo formato unendo i punti di applicazione delle altre tre.

Questo teorema elegantissimo, e perfettamente analogo all'altro teorema relativo alle 3 forze parallele P, Q, R applicate alla stessa verga rigida AB, è dovuto ad Eulero.

Fintantochè G è dentro il triangolo ABC, è necessariamente in qualche luogo di AD, perciò le componenti P, X operano dalla stessa parte della forza data S, parimente X essendo tra B e C, le sue componenti Q, R sono volte dalla stessa parte che X, in questo caso dunque, in cui G è nel triangolo ABC le quattro forze S, P, Q, R sono dirette nello stesso senso.

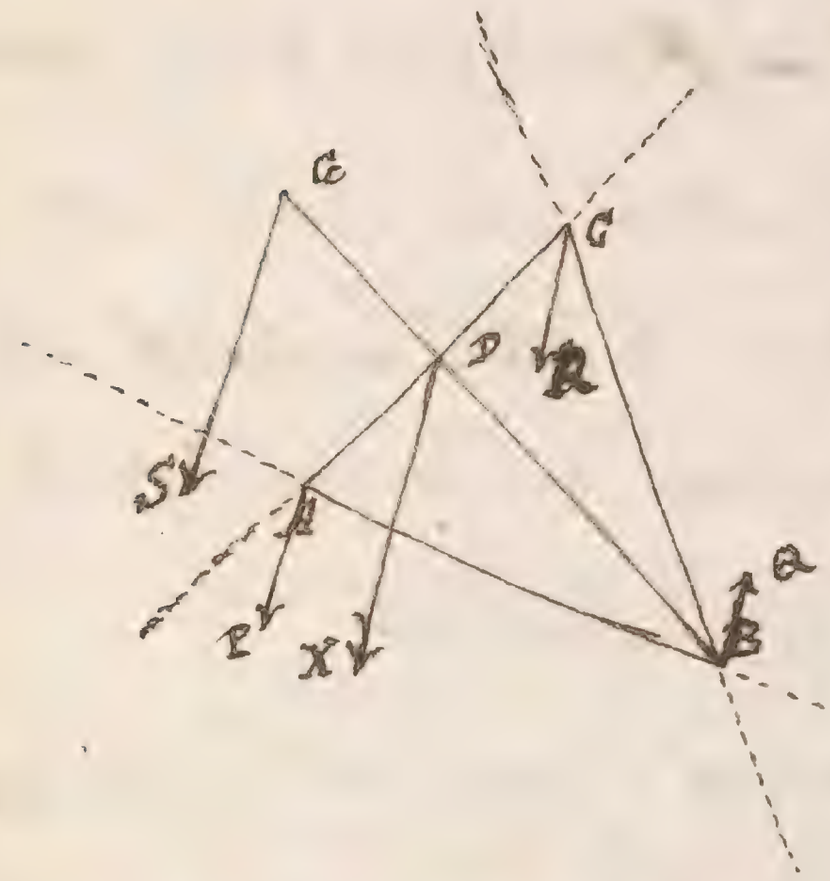
Cadendo ora il punto G fuori del triangolo, ~~potrà~~ esso cadrà in una delle 6 regioni, in cui i tre lati prolungati dividono il piano, tre opposte rispettivamente ai 3 angoli A, B, C, e tre opposte rispettivamente ai 3 lati AB, AC, BC

Sia in primo luogo il punto G in una delle tre prime regioni, per es. in quella opposta all'angolo A, tirata GA e prolungata fino ad incontrare BC in D,



scomponendo S in due forze P, X una applicata in A, l'altra in D, la forza P sarà diretta nel senso di S, la forza X in senso contrario, e scomponendo X nelle due Q, R applicate in B, C, esse saranno dirette nello stesso senso di X; quanto ai valori assoluti di P, Q, R essi si troveranno nello stesso modo. Facile essendo il dimostrare, che il teo-

-reina d'Eulero ha anco luogo quando G cade fuori del triangolo.
Se il punto G è nella regione opposta ad un lato, per ex.° al lato AC,



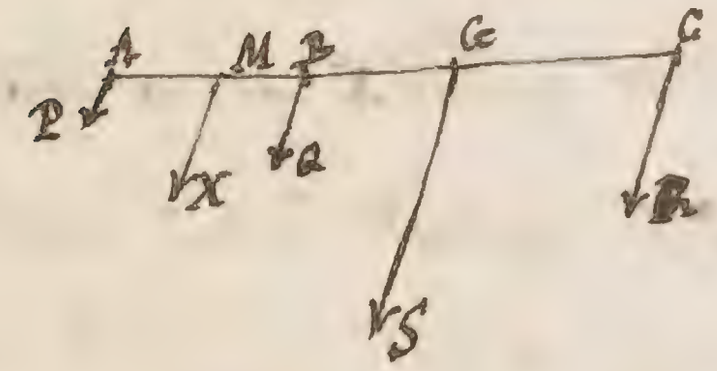
da G tiriji GB, sia D il suo punto d'inter-
-sezione con AC, scomponendo S in due
forze Q, X applicate in B ed in D, X sarà
diretta nel senso di S, Q in senso contrario,
scomponendo quindi X in due altre
forze P, R applicate in A, C, queste
forze saranno dirette nel senso di X, o di S.

Da tutto ciò ne deriva, che quando G è nel triangolo ABC le componenti P, Q, R cospirano colla forza data, che quando il punto G è nella regione opposta ad un' angolo, la componente applicata a questo angolo cospira con S, e le altre no, e finalmente, che quando il punto G è nella regione opposta ad un lato, le Componenti applicate agli estremi di questo lato cospirano colla forza S, la terza è volta in senso contrario.

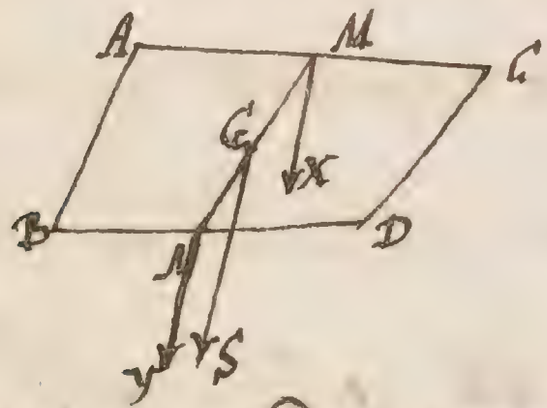
Se si chiedesse di scomporre una forza in un numero di forze maggiore di tre il problema sarebbe indeterminato, e lo sarebbe ancora il problema precedente, se i 3 punti dati A, B, C fossero in linea retta.

Per dimostrar questa 2ª parte della proposizione enunciata supponiamo nel triangolo ABC (pag.ª 72) diminuire BC, quantunque piccolo BC lo supponiamo, starà sempre la proporzione tra le forze, e le aree ~~dei tre~~ ABC, BGC, AGC, AGB, facciamo però diminuire BC fino a diventar nullo, le quattro aree allora saranno zero, ~~e lo~~ e il rapporto delle forze stendo ancora quello delle aree sarà $= \frac{0}{0}$ simbolo dell'indeterminazione.

La stessa cosa si dimostra anche nel modo seguente. Sieno A.B.C i punti dati, tra A e B posto prendere ad arbitrio un punto M, risolvere S in due forze R, X, risolvere X in due forze P, Q avrò così un sistema di forze P.Q.R equivalente alla forza data S, ora siccome M fu preso ad arbitrio, potrò prendere invece di M una infinità di altri punti, e avrò una infinità di sistemi equivalenti alla forza S; il problema avendo una infinità di soluzioni è dunque indeterminato.



Il problema è parimenti indeterminato, se si vuol scomporre S in più di 3 forze parallele, per es. in quattro. Siccome sieno A, B, C, D i punti dati, pel punto d'applicazione G della forza S tirando ad arbitrio una retta MN sino all'incontro delle rette AC, BD, troverò quattro componenti di S, scomponendo S in due forze X, Y applicate in M, N, scomponendo quindi X in due applicate in A, C, e parimente Y in due forze parallele applicate in B, D.

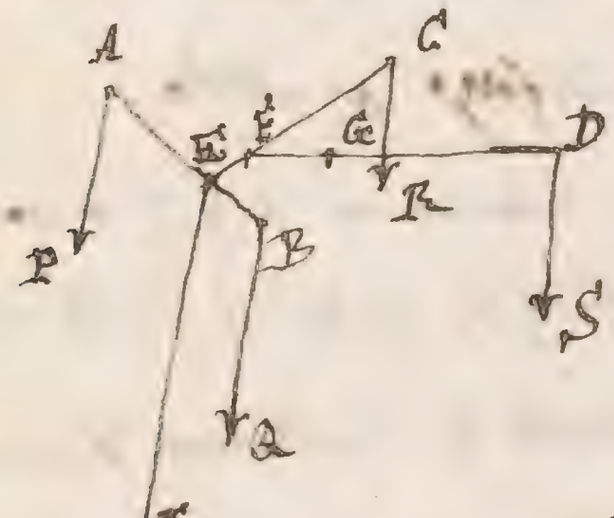


Essendo MN presa ad arbitrio, posso trovare un'infinità di altri sistemi di quattro forze applicate in A, B, C, D equivalente alla forza data S, per conseguenza il problema è indeterminato. Il ragionamento fatto per quattro forze può applicarsi ad un numero qualunque di forze. Sull'indeterminazione di questo problema torneremo col tempo per dimostrare come provenga questa indeterminazione, e come si tolga nei casi pratici.

Lezione 14ª

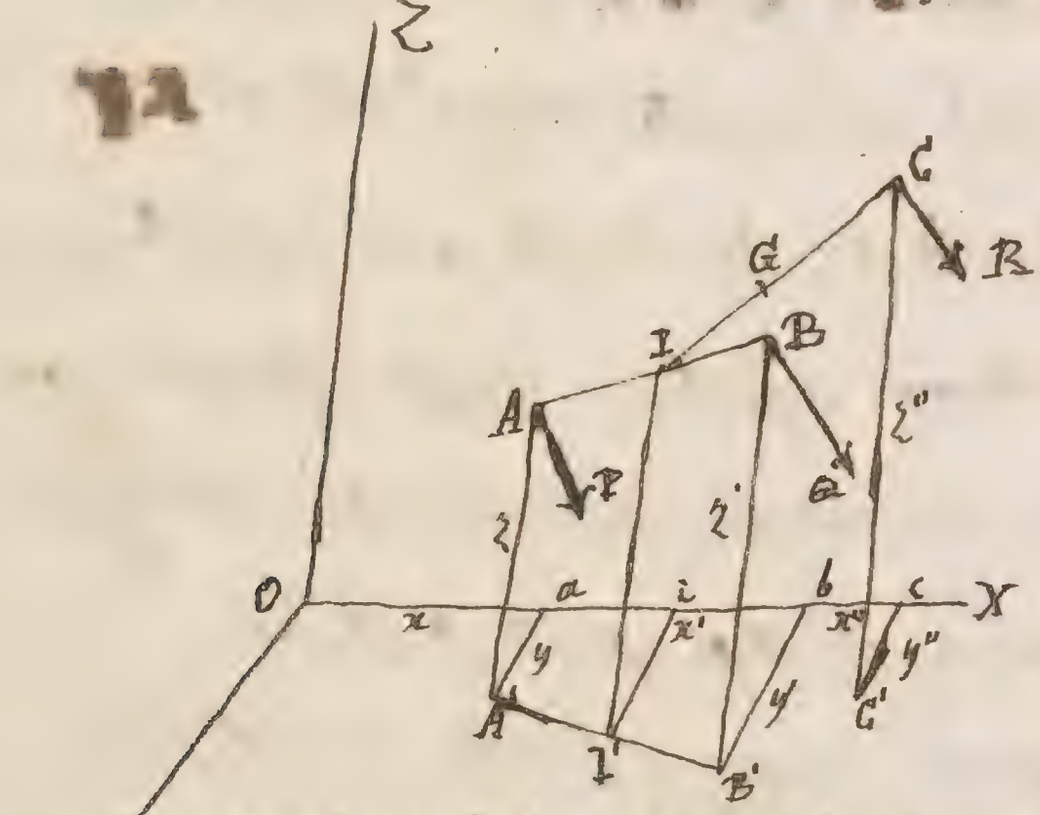
Perchè la soluzione del problema della composizione delle forze parallele possa dirsi compiuta è necessario ridurre a formole generali analitiche tal soluzione, di modo, che in tali formole generali non si abbiano a sostituire in ciascun caso particolare i numeri esprimenti le quantità date. Consideriamo in primo luogo il caso, in cui le forze sono concorrenti, sarà facile modificare quel che diremo per applicarlo al caso, in cui alcune forze fossero in senso contrario.

Perchè la risultante sia determinata, bisogna, che sia determinato il suo valore, oppia l'intensità, il punto d'applicazione, e la direzione.
Il valore della risultante del sistema di forze parallele dato è eguale alla somma dei valori delle forze date, le forze agiscono tutte in un senso; se alcune agiscono in un senso, altre in un' altro, la risultante è eguale alla somma delle prime meno la somma delle seconde. Ciò si è dimostrato.
Generalmente dunque diremo, che un sistema qualunque di forze parallele ammette una risultante unica eguale alla somma algebrica delle componenti; dico generalmente, poichè havvi il caso di eccezione, oppia il caso della coppia, nel quale caso il sistema non ha risultante.
Il punto d'applicazione della risultante di un sistema di forze parallele è detto centro delle forze parallele. Queste forze cangino di direzione nello spazio in modo, che formino un nuovo sistema di forze parallele, ed eguali in intensità alle prime senza, che cangino i punti d'applicazione A, B, C, D, -, il punto d'applicazione della risultante determinandosi indipendentemente dalla direzione delle forze sarà ancora lo stesso pel nuovo sistema, poichè esso si ottiene tirando AE dividendola in parti in-



-versamente proporzionali a P, Q, nel punto E, unendo il punto E con C, dividendo EC in parti inversamente proporzionali ad [illegible], nel punto F, tirando FD, e così di seguito operando fino ad ottenere il punto G. Questa costruzione per trovar G ci dice soltanto, che G sarà lo stesso, qualunque sia la direzione delle forze, ma che saranno ancora gli stessi i punti E, F, etc.
Il centro delle forze parallele possiam dunque definirlo quel punto, per cui passa costantemente la direzione della risultante delle forze, comunque si faccia variare la loro direzione comune.
Da questa proprietà del centro delle forze parallele nasce un metodo

per determinare sperimentalmente tal punto, dò di cercare un punto, a cui applicando una forza eguale ~~contraria~~ alla somma delle forze del sistema, il sistema sia in equilibrio, il centro del sistema si troverà in un punto della direzione di tal forza, cangiata quindi la direzione del sistema, cercare nel nuovo sistema un punto, a cui ~~applicando~~ applicando la stessa forza di prima, si abbia di nuovo equilibrio, il centro del sistema si troverà ancora in un punto della direzione di questa forza, e per conseguenza sarà il punto d'intersezione delle direzioni delle forze producenti l'equilibrio nei due casi. Ma quel che noi vogliamo si è un mezzo generale analitico per cui si possa avere il centro G dati analiticamente i punti A,B,C...; le forze P,Q,R..., ossia date le coordinate dei punti A,B,C..., le forze ad essi applicate P,Q,R.... In altre parole si domandano tre formole, nelle quali sostituendo i valori di P,Q,R..., e delle coordinate dei punti A,B,C..., si ricavino i valori delle coordinate del centro di tutte le forze P,Q,... Per ottenere tali formole, prendiamo un sistema di un numero determinato di forze parallele, per es.e di tre P,Q,R, quelche diremo di questo sistema sarà applicabile ad un sistema di un numero qualunque di forze parallele.



Chiamiamo x, y, z le coordinate del punto A, x', y', z' quelle del punto B, x'', y'', z'' quelle del punto C, denotiamo le coordinate del centro comune che per x_1, y_1, z_1. Per determinar questo punto tiriamo AB, dividiamola in I in parti inversamente proporzionali alle forze P, Q, il punto I si projetterà sopra A'B' in I', e per una semplice proposizione di Geometria I' dividerà A'B' nello stesso rapporto, in cui I divide AB, da I' tiriamo I'i parallela ad OY, per la stessa proposizione di Geometria i dividerà ab come I' divide A'B', e come I divide AB, ossia sarà ai : ib :: Q : P; denotiamo $\frac{Q}{P}$ con la lettera greca

ξ, essendo $0A = x$, $ai = \xi - x$, $ib = x' - \xi$, sarà $\xi - x : x' - \xi :: Q : P$,

donde $Q(x' - \xi) = P(\xi - x)$, $(P+Q)\xi = Px + Qx'$, e finalmente

$\xi = \dfrac{Px + Qx'}{P+Q}$, ora l'è il centro delle forze parallele P, Q, ξ e l'

ascissa di questo punto, dunque questa formola ci dà l'ascissa del centro di due forze parallele, e tradotta in regola generale insegna, che per avere l'ascissa del centro di due forze parallele bisogna moltiplicare rispettivamente i valori di tali forze per i valori delle ascisse dei loro punti d'applicazione, sommare i prodotti, e dividere la somma per la somma delle forze Date.

Volendo comporre P, Q, R sicome la forza applicata in I, che, per non introdur tante lettere, chiamerò I, equivale alle forze P, Q, così compongo le forze I, R; perciò tiriamo IC, sia C il centro delle forze I, R, applicando la regola sudetta avrassi l'ascissa di tal centro $x_1 = \dfrac{I\xi + Rx''}{I+R}$, e sostituendo per ξ il suo valore ottenuto, per I il suo valore $P+Q$, $x_1 = \dfrac{Px + Qx' + Rx''}{P+Q+R}$. Questa formola tradotta in parole ci dà per aver l'ascissa del centro di tre forze parallele la stessa regola, che già abbiam dato per la ricerca dell'ascissa del centro di due forze parallele. Come s'è dimostrato per i sistemi di due e di tre forze parallele si può dimostrare per un sistema di un numero qualunque di forze parallele, Dunque concludiamo, che dato un sistema qualunque di forze parallele $P, Q, R, \ldots$, e chiamate

$x, x', x'', \ldots$
$y, y', y'', \ldots$
$z, z', z'', \ldots$

etc. le coordinate dei diversi punti d'applicazione,

s'ha l'ascissa del centro di un tal sistema $x_1 = \frac{Px + Qx' + Rx'' + etc}{P + Q + R + etc}$ ..

Possiamo estendere un poco più questo teorema, e dire, che le altre coordinate del centro sono $y_1 = \frac{Py + Qy' + Ry'' + etc}{P + Q + R + etc}$, poichè invece, che abbiamo proiettati i punti A, B, C, I sul piano XY, potevamo proiettare gli stessi punti sul piano YZ, o sul piano XZ, avevamo tra y, y', y'' ed y_1 ~~le stesse relazioni~~ o tra z, z', z'' e z_1 le stesse relazioni, che tra x, x', x'' ed x_1.

$$z_1 = \frac{Pz + Qz' + Rz'' + etc}{P + Q + R + etc},$$

Adottiamo ancora qui il simbolo Σ, e le tre formole richieste per i valori delle coordinate del centro di un sistema di forze parallele ~~stanno~~

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Sigma . Px}{\Sigma . P} \\ y_1 = \dfrac{\Sigma . Py}{\Sigma . P} \\ z_1 = \dfrac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P} \end{cases}$$

La direzione della risultante essendo parallela a quella delle componenti, ~~la~~ risultante è perciò compiutamente determinata delle forze date potendo essere volte in senso contrario alle altre, bisognerà, che in ciascun caso stabiliamo per qual verso dovremo considerarle positive, allora quelle, che saranno volte nel senso contrario saranno negative. Inoltre potendo essere negative alcune delle coordinate $x, x', x'' \ldots, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots$ ne segue che secondo i diversi casi le somme $\Sigma . Px$, $\Sigma . Py$, $\Sigma . Pz$, $\Sigma . P$ potranno essere positive, o negative, o nulle, ossia che tali somme sono somme algebriche. Vediamo cosa significhino questi diversi risultati.

Se $\Sigma . P$ non è zero dopo la sostituzione dei valori di P, Q, R, etc, comunque ~~siano~~ risultino le altre tre somme è sempre facile cosa il vedere dove sia situato il ~~punto~~ centro.

Se $\Sigma . P = 0$, e le altre tre somme non sono nulle, non havvi centro, ed il sistema

si riduce ad una coppia.

Se nello stesso tempo sono nulle le quattro somme, le forze sono in equilibrio, e per conseguenza il centro delle forze, le cui coordinate si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$, non c'è, poiché dovunque portiamo il centro, le forze si distruggono sempre.

Se $\Sigma P = 0$, $\Sigma Px = 0$, il sistema si riduce ad una coppia contenuta in un piano parallelo a quello delle yz, o sostituita in un piano parallelo a quello delle xz. Se $\Sigma P = 0$, $\Sigma . Py = 0$, o contenuta in un piano parallelo a quello delle xy. Se $\Sigma P = 0$, $\Sigma . Pz = 0$.

Dimostreremo tutto ciò.

Lezione 15ª

Le tre formole trovate per la Composizione delle forze parallele si possono enunciare in un modo più generale.

Sia un sistema di forze parallele, attraverso adesso si conduca un piano comunque, si abbassino dai punti d'applicazione tutte delle forze del sistema tante perpendicolari sul di un tal piano, si moltiplichino per i valori delle forze, si sommino i prodotti, si divida la somma per la somma dei valori delle forze, il quoziente darà la lunghezza della perpendicolare abbassata sul piano dal centro del sistema dato.

Ma siccome di queste formole avremo da fare un'uso continuo, modificheremo il loro enunciato introducendo alcune denominazioni particolari.

I prodotti delle forze per le perpendicolari abbassate dai loro punti d'applicazione sopra un piano tirato comunque, si chiamano momenti delle forze rispetto a quel piano, così i prodotti Px, Qx', Rx'', etc sono i momenti delle forze P, Q, R, ... rispetto al piano yz. Le formole suddette danno luogo al seguente teorema.

I tre momenti della risultante di un sistema di forze parallele rispetto ai tre piani coordinati sono eguali alle somme algebriche dei momenti delle componenti rispetto agli stessi piani.

Infatti dalle formole $x_1 = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P}$, $y_1 = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P}$, $z_1 = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P}$, si ha

$x_1 \Sigma P = \Sigma Px$, $y_1 \Sigma P = \Sigma Py$, $z_1 \Sigma P = \Sigma Pz$, ora $x_1 \Sigma P$, $y_1 \Sigma P$, $z_1 \Sigma P$ poichè ΣP esprime il valore della risultante, sono i momenti della risultante rispetto ai 3 piani coordinati, e ΣPx, ΣPy, ΣPz sono le somme algebriche dei momenti delle componenti.

Quando si tratta di formare i momenti di una forza rispetto ad un piano, bisogna convenire da qual parte si debbano prendere positive le perpendicolari, allora si da loro il segno —, quando sono in parte contraria.

In Meccanica la parola momento si prende in diversi significati. Fra breve parleremo dei momenti rispetto a linee, da punti; ci serviremo della parola momento per esprimere tutt' altra cosa, parlando dei momenti d'inerzia. Il Momento, di cui ora trattiamo dicesi Momento rispetto ad un piano.

Dalle equazioni $x_1 = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P}$, $y_1 = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P}$, $z_1 = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P}$, si deduce, che se i punti d'applicazione del sistema sono in uno stesso piano, il centro cade sul piano, poichè possiamo prendere il piano per piano coordinato, per es. delle xy, allora $\Sigma Pz = 0$, e ΣP generalmente non essendo zero, ne deriva, che sarà zero z_1; ossia che il centro è sul piano delle xy.

Se i punti di applicazione del sistema sono in linea retta, il centro cade su di tal retta, poichè posso prendere tal retta per uno degli assi, per es. per l'asse delle x, allora $\Sigma Py = 0$, $\Sigma Pz = 0$, e ΣP generalmente non essendo zero, ne deriva, che y_1, o z_1 saranno zero, ossia che il centro è sull'asse delle x.

Qualunque sia il numero delle forze, abbiamo tra la risultante, le componenti, e le coordinate dei loro punti d'applicazione, quattro relazioni, che chiamando S la risul.

sono $\begin{cases} S = \Sigma P \\ x_1 \Sigma P = \Sigma P x \\ y_1 \Sigma P = \Sigma P y \\ z_1 \Sigma P = \Sigma P z \end{cases}$, le quali però si riducono a tre sole

veramente distinte fra loro.

Infatti ci è lecito di intendere trasportati

i punti d'applicazione delle forze

nei punti A, B, C, D, etc, in cui le loro

direzioni incontrano un piano condotto ad arbitrio, come pure di prendere

questo piano per piano delle xy, allora z, z', z'' etc essendo nulle, anche

z_1 sarà nulla, e la 4ª equazione svanirà per identità, restando soltanto

le tre prime equazioni.

Quindi ne viene, che ogniqualvolta avremo un problema di composizione

o di decomposizione di forze parallele da risolvere, il problema sarà indeter-

-minato, se vi conterrà più di tre incognite. Generalmente dunque il

problema: Date le componenti ed i punti d'applicazione trovare la risultante

è determinato. Il problema inverso: Data la risultante ed i punti d'applicazione delle componenti trovare le componenti

può essere indeterminato, e lo sarà ogniqualvolta, che i punti

Data non essendo su di una retta

~~Le componenti da determinarsi~~ siano più di ~~tre~~ due, e ogniqualvolta, che questi essendo

~~che i punti d'applicazione delle componenti~~ non vi è una tradizione ~~tutte~~ le componenti siano più di tre, e ogniqualvolta

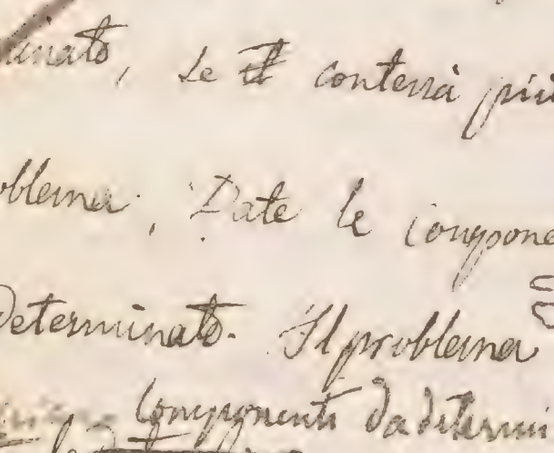
~~Vi ha indeterminazione quando i punti d'applicazione sono in linea~~

~~retta~~. Si è già ciò dimostrato, dimostriamolo ora coll'Analisi

Sia OXY il piano condotto attraverso il sistema, tagli esso in G

la risultante, se i punti A, B, C--etc sono

in linea retta, G sarà su questa retta.



Supponga formata l'equazione di tal retta,

e che essa sia $y = ax + b$, i coefficienti

a, b dovranno esser tali, che l'equazione abbia luogo, quando vi sostituisco

$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$. dunque dovrà essere

† Se è data non solo l'intensità, ma anche la direzione della risultante, allora le quattro equazioni generali che servono a determinare le componenti si riducono a tre sole veramente distinte fra loro, perchè ci è lecito di intendere trasportati i punti d'applicazione delle forze nei punti in cui le loro direzioni incontrano una linea comune ad arbitrio.

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b \\ y' &= ax'+b \\ y'' &= ax''+b \\ y_1 &= ax_1+b \end{aligned}\right\}$$, ora per determinare le componenti abbiamo le relazioni,

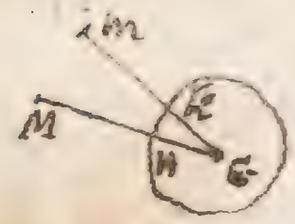
$$\left.\begin{aligned} (P+Q+R)x_1 &= Px+Qx'+Rx'' \\ (P+Q+R)y_1 &= Py+Qy'+Qy'' \\ P+Q+R &= S \end{aligned}\right\}$$ le quali in apparenza sono tre, ma in realtà due soltanto veramente distinte; infatti nella seconda relazione si sostituiscano ad y, y', y'', y_1 i loro valori per x, x', x'', x_1 ricavati dalle prime equazioni, essa diverrà

$$(P+Q+R)(ax_1+b) = P(ax+b)+Q(ax'+b)+R(ax''+b)$$, od anche

$$(P+Q+R)ax_1+(P+Q+R)b = (Px+Qx'+Rx'')a+(P+Q+R)b$$, equazione, la quale, togliendovi il fattor comune a si riduce alla prima, la seconda delle relazioni sovrascritte è dunque identica colla prima. Due essendo le relazioni, e tre le incognite, il problema è indeterminato. †

Fisicamente parlando il problema della riduzione di una forza in un numero qualunque di altre parallele è determinato non meno che il problema di risolverla in due. Per recarne un esempio supponiamo più uomini, i quali sopportino una trave sulle spalle, le loro forze costituiscono la pressione compongono un sistema di forze parallele, la cui risultante è eguale al peso della trave ed è applicata in un punto della trave, poichè vediamo benissimo, che vi ha un tal punto, pel quale sospendendo la trave, essa sta in equilibrio, secondo l'analisi il peso sostenuto dagli uomini sarebbe indeterminato, ora chiamate interrogate uno di essi se ciò sia, vi dirà certamente, che vi ha dunque una apparente contraddizione tra i risultati dell'analisi, e dell'esperienza. La ragione di questa contraddizione è, che noi abbiamo supposti dei corpi inflessibili, i quali in natura non esistono. Quando avremo trovato il modo di introdurre nei calcoli d'analisi la flessibilità dei corpi, non vi avrà più la sudetta contraddizione.

Il caso delle forze parallele è il più frequente, che avremo a considerare.
Infatti tutti i corpi [illegible] descrivendo linee perpendicolari alla superficie
delle acque stagnanti, ognuno le non molto estese possa considerare
come piana. Una direzione perpendicolare alla superficie delle
acque stagnanti è quella che si dirama direzione linea verticale. Tutte le
molecole dei corpi cadendo descrivono linee verticali.
Le superficie molto estese però non sono più superficie piane, ma
bensì curve, concave al di fuori, e di forma visibilmente sferica.
I corpi cadono sulla terra nella direzione dei raggi della terra tirati
dai corpi al centro. La curvatura della suddetta superficie è inapprezzabile
per estensioni non molto grandi. Supponiamo infatti per un esempio
due corpi uno in M, l'altro in m, abbandonati a



se stessi cadranno nelle direzioni dei raggi MG, mG
facenti tra di loro l'angolo $hGH = 32'',4$, [illegible] se sia $hH = 1000^{m}$,
poichè 1000^{m} essendo la diecimillesima parte del quarto del meridiano,
l'angolo hCH sarà anche la diecimillesima parte di 90°, ha è $32'',4$;
quest'angolo è già piccolissimo; supponiamo ora, che hH sia $= 10^{m}$,
allora $hCH = 0'',324$, angolo che non si può misurare coi più
esatti istrumenti di astronomia; ora le molecole dei corpi, che
considereremo sono situate a distanze ancor più piccole, perciò noi
possiamo considerare le linee verticali come parallele. Dunque
ogni corpo pesante può riguardarsi come un sistema di forze
parallele e verticali; epperò tutto ciò, che abbiamo detto riguardo

alle forze parallele è immediatamente applicabile alla Dottrina dei corpi pesanti. I corpi cadendo nel vacuo descrivono spazii eguali in tempi eguali, la forza di gravità è dunque la stessa per le masse di diversa sostanza. I pesi sono proporzionali alle masse.

Lezione 16.a

Vediamo sovente due corpi dello stesso volume opporre resistenze diverse alle forze, che operano sù di loro; ciò proviene dalla maggior quantità delle molecole contenute in uno dei corpi, vi sono dunque dei corpi, che sotto lo stesso volume possono comprendere una quantità differente di materia, ossia che hanno masse differenti. Quel corpo, che contiene sotto lo stesso volume maggior numero di molecole, lo chiamiamo più denso. Chiamiamo densità il rapporto tra la quantità di materia di volume di un corpo; per ridurla a misura numerica bisogna, che eleggiamo una unità.

Un corpo può essere più o meno materia, che in un'altro corpo per due ragioni 1° perchè può avere maggior volume, 2° perchè la unità di volume può contenere più materia, che non l'unità di volume dell'altro corpo. quindi due modi di misurar le densità.

La densità d'un corpo è tanto maggiore quanto esso contiene più materia sotto l'unità di volume, possiamo però prendere per misura della densità di un corpo la quantità di materia compresa sotto l'unità di volume,

allora se d'un certo corpo chiamiamo V il volume, M. la massa, D la densità, diremo, che, poichè sotto il volume V vi ha la massa M, sotto il volume 1 vi ha la massa $\frac{M}{V}$, ma questa l'abbiamo chiamata densità, dunque $D = \frac{M}{V}$, di qui si ha $M = DV$, $V = \frac{M}{D}$, cosiché potremo dire, che la densità è eguale alla massa divisa pel volume, che la massa è eguale al prodotto della densità per il volume, e che il volume è eguale alla massa divisa per la densità.

Vi ha un'altra maniera di ridurre la densità ad espressione numerica, ed è la seguente; Fra tutte le sostanze naturali scegliamone una, che prenderemo per campione, la sua densità prendiamola per unità di densità, paragoniamo la densità di un corpo qualunque con tale unità, il numero, che esprimerà il rapporto tra la densità del campione, e quella del corpo, sarà l'espressione numerica della densità di questo. Si suol prendere per campione di densità la densità dell'acqua distillata al suo massimo grado di densità, ossia alla temperatura di circa 4 gradi, come già abbiam veduto in una delle Lezioni antecedenti; Per calcolar la densità di un corpo, per es. dell'oro, siccome le densità sono proporzionali alle masse comprese sotto lo stesso volume, prendiamo due volumi eguali di oro, e d'acqua, dividiamo la massa compresa sotto il volume dell'oro per quella dell'acqua, il quoziente esprimerà la densità dell'oro.

Per calcolar le masse possiamo appoggiarci al principio dimostrato, che le velocità impresse ad due corpi, perchè perdendosi si facciano equilibrio, sono inversamente proporzionali alle masse, allora ci prendiamo una unità di massa, cerchiamo quella velocità da imprimersi al corpo, la cui massa è uno, ed al corpo dicui vogliamo conoper la massa, perchè perdendosi si facciano equilibrio; e sieno V, V' le velocità avremo la massa ricercata $M = \frac{V}{V'}$.

Generalmente, quando non si avverte precedentemente, sotto il nome di densità si intende la massa compresa sotto l'unità di volume.

Quando un corpo è così costituito, che tagliando via da qualunque parte di esso un picol volumetto, tali volumetti hanno la stessa densità, chiamasi Omogeneo; quindi Corpo Omogeneo è quello, la cui densità è uniforme.

Se la densità non è uniforme, il Corpo dicesi Eterogeneo.

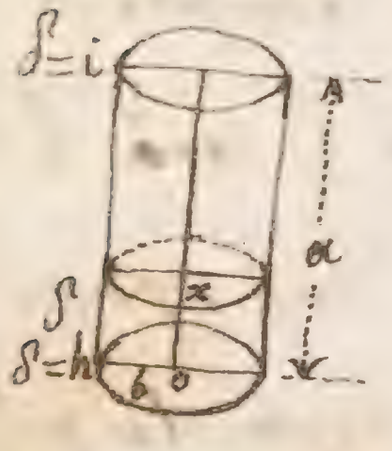
L'equazione $M = VD$ si riferisce ai Corpi Omogenei, vediamo come vada essa modificata, quando il corpo è eterogeneo.

Se si riferiscono le posizioni del corpo a tre assi di coordinate, la densità variando per ciascun elemento infinitesimo del corpo, ossia cambiare delle coordinate, è funzione di esse coordinate.

Facendo in diversi punti del corpo dei piccoli cubetti, misurandone le densità, si può arrivare a conoscere tal funzione, sia essa, chiamando δ la densità, x, y, z le coordinate, $\delta = f(x, y, z)$, di cui sia la massa del corpo, conoscendone la figura e le dimensioni. Per risolver questo problema si concepisca il corpo diviso in elementi infinitesimi $dx\,dy\,dz$, a questi elementi, in cui

postiamo considerare la densità uniforme postiamo applicare la formola $M = VD$, e diremo, che $dM = dx\,dy\,dz\,f(x,y,z)$; per aver M bisognerà integrare questa espressione tre volte per comprendere tutti i limiti del corpo.

La funzione $f(x,y,z)$ può esser tale, che non sia necessaria una triplice integrazione. Per esempio si domanda la massa di un cilindro retto, il quale è formato di strati cilindrici piccolissimi, di baji parallele alla baja del cilindro, ed omogenei in se, ma tali, che la densità varia da un strato all' altro proporzionalmente alle altezze, e stando data la densità dello strato inferiore eguale ad h, la densità dello strato superiore $= i$, l'altezza del cilindro a, il raggio della baja b.



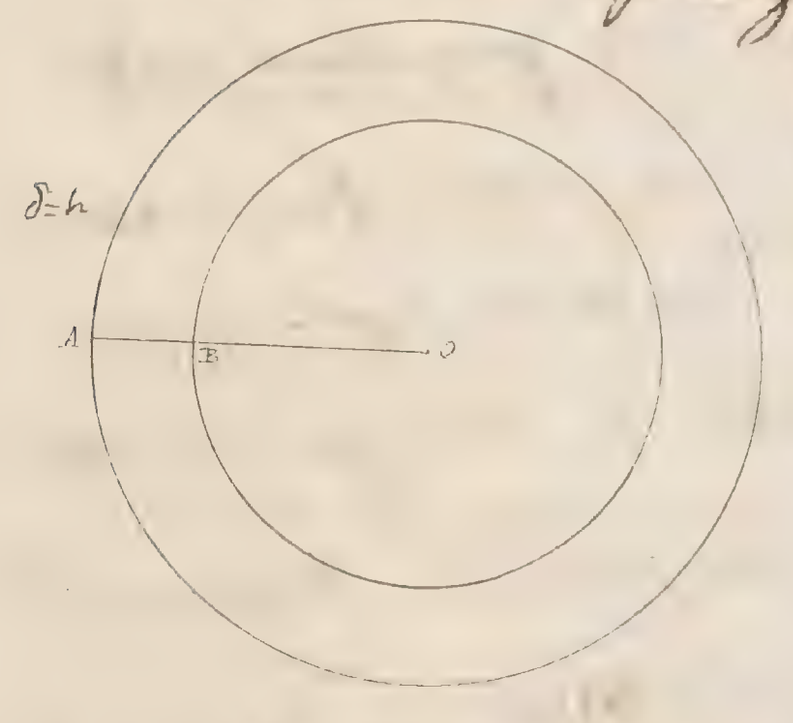
~~Cont~~ La funzione, che esprimerà il valore di S, sarà dipendente dall'altezza, che chiamerò x, per averla, osservo, che le densità dei divesi strati dall' inf.e al superiore formano una progressione aritmetica, in cui il num.o dei termini è espresso da ~~dx~~ x, il 1.o termine è h, l'ultimo è i, avrò la ragione di tal progressione $w = \frac{i-h}{a}$, ed il termine $(x+1)^{simo}$, ossia $S = h + \frac{i-h}{a}x$. La funzione dunque è $S = h + \frac{i-h}{a}x$.

Considero uno strato infinitamente sottile, questo strato avrà per baji due circoli eguali al circolo baja, una att.a dx, perciò il suo volume sarà $\pi b^2 dx$, dunque $dV = \pi b^2 dx$, e $dM = S\,dV = \pi b^2 dx\left\{\frac{i-h}{a}x + h\right\}$, integro quest'espressione fra i limiti $0, a$, ed ho

$$M = \pi b^2 \int_0^a \left(\frac{i-h}{a}x + h\right) dx = \pi b^2 \left\{\frac{i-h}{a}\frac{a^2}{2} + ha\right\} = \pi b^2 a \frac{i+h}{2};$$

Questa formola tradotta in lingua volgare dice, che la massa del cilindro dato è eguale alla massa di un cilindro, che avesse lo stesso volume e la densità media delle due basi. Facciamo ancora un esempio.

Ho una sfera cava, ne conosco il raggio esterno, conosco la densità superficiale la quale è h, e so che procedendo dal difuori al dientro la sfera è composta di gusci sferici, omogenei inse, ma tali, che la densità varia da un guscio all'altro in ragione inversa dei raggii. Conosco la massa intera, si domanda la sua spessezza.



Chiamo b il raggio interno della sfera cava, a il raggio esterno OA, la densità di un guscio corrispondente ad un raggio r sarà $\delta = \frac{ah}{r}$, ed il volume di tal guscio sarà espresso dalla sua superficie $4\pi r^2$ moltiplicata per la spessezza dr, moltiplicando questo volume per δ si ha la massa del guscio $dM = 4\pi ahr\,dr$. Per aver la massa totale M bisognerà integrare questa espressione differenziale trai limiti a. b, dunque $M = 4\pi ah \int_b^a r\,dr = 4\pi ah\,\frac{a^2-b^2}{2}$. Da questa equazione si ricavi b, ed il problema sarà risolto.

Supponiamo di avere un'altra sfera cava della stessa dimensione, ma omogenea e di densità h, la sua massa sarà $M' = \frac{4}{3}\pi(a^3-b^3)h$, e volendo il rapporto delle masse delle due sfere, si avrà $\frac{M}{M'} = \frac{3a}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} = \frac{3a}{2}\cdot\frac{a+b}{a^2+ab}$

In questa formola facciasi $b=o$, avrassi $\frac{M}{M'}=\frac{3}{2}$; quest' ultima formola tradotta in lingua volgare ci insegna, che se si hanno due sfere di egual raggio, di cui una sia omogenea, l'altra sia di densità crescente in ragione inversa dei raggii, le loro masse stanno nel rapporto di **2:3**.

Lezione 17.ª

L'energia con cui cade un corpo è proporzionale alla quantità di materia, che in esso è contenuta, ciò si dimostra sperimentalmente in due maniere. La cagione universale per cui i corpi abbandonati a se stessi cadono si dice gravità; ciascuna molecola di un corpo descrive in questo moto una linea verticale, le verticali per distanze piccole sono parallele, la risultante delle forze, che sollecitano ciascuna molecola è ciò che dicesi peso del corpo

Pesiamo due corpi, troviamo essere i loro pesi P, p, dico, che sono proporzionali alle masse M, m. Infatti se gettiamo l'uno contro l'altro i due corpi con velocità V, v inversamente proporzionali ai pesi P, p, troviamo, che incontrandosi i corpi si fermano facendo equilibrio, ora sappiamo, che si fanno equilibrio due corpi urtandosi quando V:v::m:M, dunque m:M::p:P. Si dimostra sperimentalmente anche in questo modo questo teorema.

Se facciamo cadere nel vacuo più corpi, tutti nello stesso tempo cadendo dalla stessa altezza acquistano una stessa

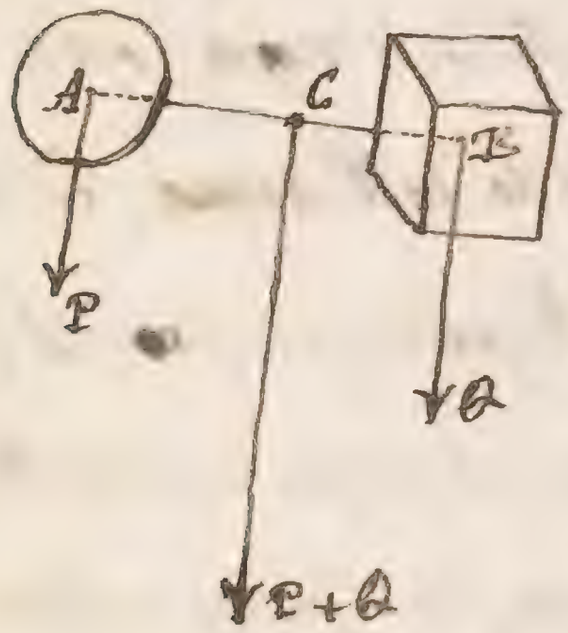
velocità; ~~ora le~~ due corpi di massa M, m acquistano una stessa velocità c, ciò vuol dire, che le quantità di moto, le quali sono espresse dai prodotti delle masse per tale velocità, sono proporzionali alle masse M, m, ma le forze son proporzionali alle quantità di moto, dunque sono proporzionali alle masse, le forze sono dunque, che i pesi P, p dei corpi, dunque P : p :: M : m.

Se dividiamo un corpo in parti di massa eguale, queste parti avranno perciò egual peso, ossia egual tendenza a cadere, ossia saranno sollecitate da forze eguali, queste forze sono inoltre parallele, dunque ogni corpo possiamo considerarlo animato da un sistema di forze eguali e parallele.

Il corpo non solo possiamo dividerlo in parti di massa eguali, ma possiamo di più supporlo diviso in elementi materiali infinitesimi. Ciascun elemento essendo sollecitato da una forza infinitamente piccola, ogni corpo pesante possiamo perciò anche considerarlo sollecitato in tutti i suoi punti da forze infinitamente piccole e parallele. Ora è proprietà di ogni sistema di forze parallele, che comunque cangi la direzione delle forze, la risultante passa sempre per lo stesso punto detto centro delle forze parallele; dunque comunque cangino le direzioni della gravità rispetto al corpo, ciò che avviene ad ogni cambiamento di posizione del corpo, tutte le risultanti del sistema in ciascuna posizione passeranno per un punto, nel quale possiamo riguardar perciò concentrato tutto il peso del corpo. Questo punto dicesi

Centro di Gravità del corpo.

Se si abbiano più corpi connessi tra di loro, i loro pesi saranno tante forze parallele applicate ai centri di gravità di ciascuno di essi, il centro di tali forze è il centro di gravità del sistema. Per esempio; per ragion di simmetria il centro di gravità di una Sfera omogenea è al centro della sfera, per la stessa ragione il centro di gravità di un cubo omogeneo è nel centro di figura, supponiamo connessi insieme la sfera e il cubo, il centro comune di gravità del cubo e della sfera sarà il centro delle forze P, Q rappresentanti i pesi della sfera e del cubo.



Stabilite questi principii generali applichiamoci a svolgerne le conseguenze. I pesi essendo proporzionali alle masse, per calcolarne pesi amole, la ragion dei pesi sarà quella delle masse, e per esprimere questa in numeri, prendiamone una per unità di massa, il suo peso chiamiamolo g, e il peso di un'altra massa sarà P, concludemo, che quella massa è $M = \frac{P}{g}$. Da questa equazione si ha il peso Di un corpo $P = Mg$, ossia eguale al numero, che esprime la massa moltiplicato per il peso dell'unità di massa. In Statica per abbreviare le espressioni il peso g lo chiamiamo la gravità, questo peso g è lo stesso qualunque sia la natura del corpo. abbiam già detto, che chiamando V il volume, D la densità di un corpo, la massa $M = VD$, paragonando questo valore di M a quello, che ora abbiam trovato esprimo pel peso, abbiamo l'equazione $P = gVD$, possiamo dunque dire, che il peso assoluto di

un corpo si ha moltiplicando la gravità per il volume e per la densità.
Quindi nediva, che, poichè due corpi di egual volume possono avere massa
differente, ossia densità differenti, possono anche avere pesi assoluti differenti. Per significar-
-car rapidamente questa idea ci serviamo di questa espressione; Quando
due corpi di egual volume hanno pesi assoluti differenti, quello che ha peso
maggiore diciamo, che è specificamente più pesante dell'altro. Così se pesiamo un
litro d'acqua, ed un decimetro cubo (che in volume equivale ad un litro) di
piombo, e troviamo, che il piombo pesa (11.32) volte più dell'acqua, diciamo
che il piombo è specificamente più pesante dell'acqua, ossia che il peso speci-
-fico del piombo è più grande, che quello dell'acqua, ed (11.32) volte più gran
Dai Meccanici si prende per misura del peso specifico il peso assoluto sotto
l'unità di volume della sostanza di cui il corpo è formato; quindi è evidente
dipendere il peso specifico non dal volume, ma dalla natura della sostanza
di cui il corpo è formato. Per avere il peso specifico di un corpo bisogna dunque
pesarlo, e misurarlo, se si trovi essere P il suo peso assoluto, V il suo volume,
chiamando G il peso specifico, si avrà la proporzione $P : G :: V : 1$, donde
$G = \frac{P}{V}$, e $P = VG$, possiamo dunque dire, che il peso specifico di
un corpo si ha dividendo il peso assoluto per il volume.
Tutto ciò, che finora abbiamo detto sulle proprietà dei corpi è espresso dalle
seguenti equazioni $M = VD$. $P = Mg = VDg$. $P = VG$,
confrontando le due ultime abbiamo ancora quest'altra $G = Dg$, che
ci dà il peso specifico eguale al prodotto della densità per la gravità.
Per poter far uso di queste equazioni bisogna, che abbiamo delle tavole ove
sieno notati i pesi specifici di tutte le sostanze, queste tavole si possono far
pesando tanti solidi del volume di un litro delle diverse sostanze, se l'unità
di volume sia il litro, ma si prende per unità di volume generalmente il metro cubo.

Dai Fisici si chiama peso specifico il rapporto tra il peso di due volumi eguali uno d'acqua, l'altro della sostanza, che si considera, ristrettamente come si chiama densità il rapporto di due masse comprese sotto volumi eguali uno d'acqua pura ridotta al massimo grado di densità, l'altro del corpo in questione. Per vedere come differiscano le due maniere di considerare i pesi specifici dei Meccanici e dei Fisici, preso per unità di volume il piede liprando cubo, e per unità di peso la libbra Norimbergese, prendiamo un piede liprando cubo di legno di quercia, lo pesiamo, troviamo, che il suo peso equivale a 375 lib. Nor., nella maniera dei Meccanici si esprime quest'idea dicendo, che il peso specifico del legno di quercia è 375 lib. Nor. Un Fisico per trovare il peso specifico della stessa sostanza, prende un vaso del volume di un piede liprando cubo, lo riempie d'acqua, lo pesa, trova, che pesa 360 lib. Nor., conchiude, che il peso specifico del legno di quercia è $\frac{375}{360}$, ossia $\frac{25}{24}$.

Si è trovato, che $G = Dg$, supponiamo, che questa equazione si riferisca per es.° all'oro, e che per l'acqua sia $G' = D'g$, nella maniera dei fisici sarà il peso specifico dell'oro $= \frac{G}{G'} = \frac{D}{D'}$, questa equazione ci dice, che i pesi specifici stanno come le densità. Si notino nella maniera dei fisici $\frac{D}{D'}$ esprimendo la densità dell'oro, ne segue, che pei fisici lo stesso numero esprime il peso specifico e la densità.

Fra i vantaggi del sistema decimale vi ha ancor quello di somministrare facilmente i pesi specifici e le densità dei corpi nel

senso Meccanico, quando se ne conoscono i rapporti col peso specifico, e la densità dell'acqua, [redacted] e viceversa. Infatti il peso di un metro cubo d'acqua essendo 1000 chil., se conosciamo per es.° il rapporto tra il peso di un metro cubo di piombo, e quello di un metro cubo d'acqua, e troviamo essere 11,32, per avere il peso specifico del piombo nel senso Meccanico non abbiamo, che a moltiplicar questo rapporto per 1000, ossia trasportar la virgola verso destra di 3 cifre, ed abbiamo pel peso specifico del piombo 11320. Viceversa conosciuto il peso specifico del piombo = 11320 nel senso Meccanico, abbiamo subito il peso specifico della stessa sostanza riferito a quello dell'acqua eguale ad 11,32, dividendo per 1000, ossia ~~trasportar la virgola~~ separando tre cifre da destra verso sinistra. Questo vantaggio non si aveva negli antichi sistemi.

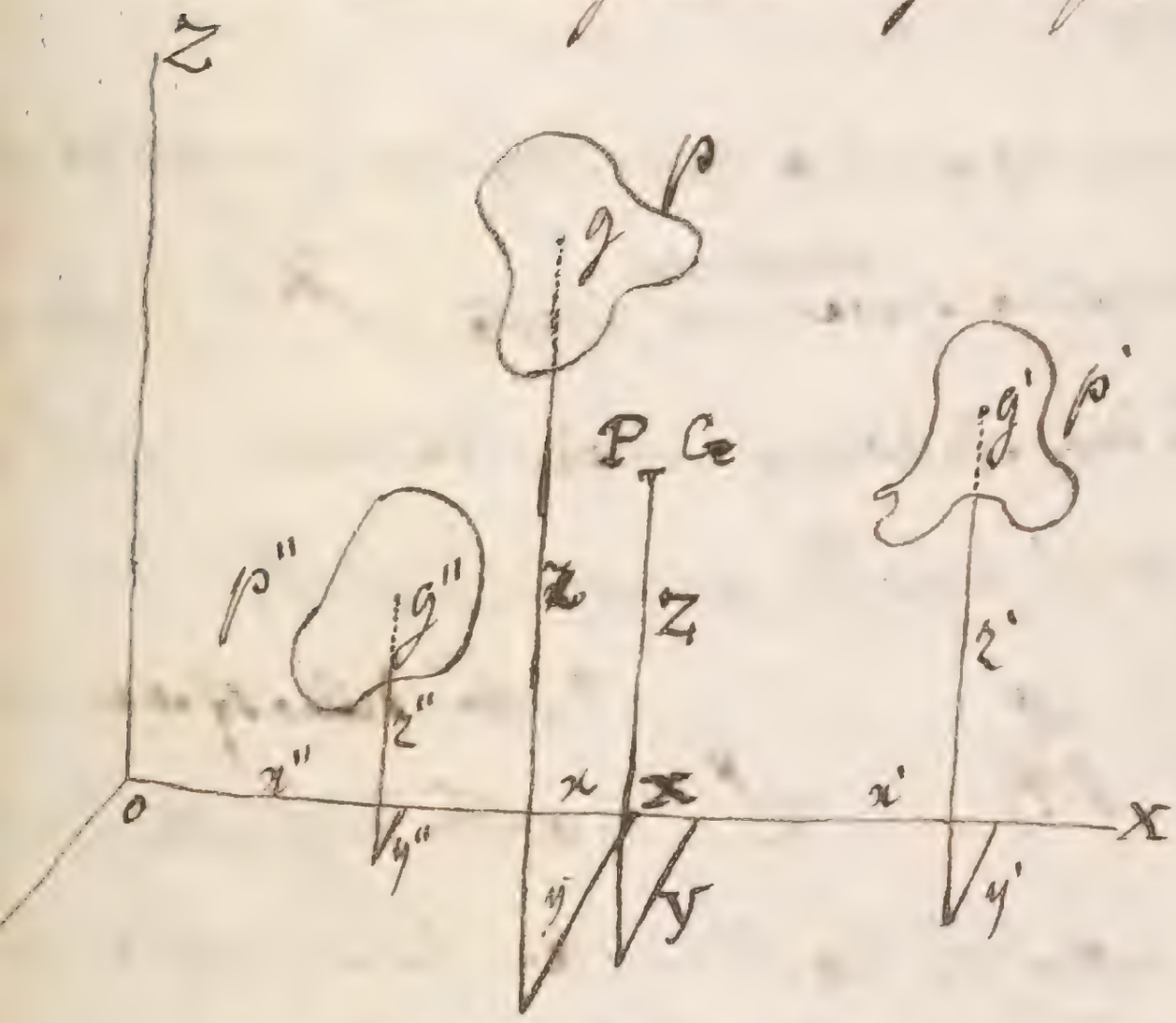
Lezione 16.ª

In un corpo omogeneo il peso specifico è costante in tutte le parti del corpo, nei corpi eterogenei varia il peso specifico colla stessa legge con cui varia la densità; Date le forme e le dimensioni di un corpo, il quale sia funzione delle coordinate dei punti del corpo, ed il peso specifico sia pure funzione delle coordinate dei punti del corpo, quindi avere la massa del corpo, introducendo nelle espressioni differenziali (pag.ª 69) invece di δ il peso specifico G, ossia moltiplicando per g la massa M ottenuta nel modo indicato alla pagina suddetta.

In un sistema di forze parallele ogni volta che le forze tirano tutte in un senso non può esservi Coppia, epperciò il sistema ha sempre una risultante unica nel senso delle Componenti, e che passa pel Centro delle forze parallele, ora Ogni corpo sollecitato da un sistema di forze parallele dirette nello stesso senso, quindi ogni

corpo si può considerare sollecitato da una forza unica applicata al suo centro di gravità. La direzione di questa forza è la stessa per tutti i corpi, ma non è così pel suo punto d'applicazione, ossia centro di gravità; desso varia col variare delle forme e delle dimensioni dei corpi, e delle loro densità; sarà perciò argomento di questa e di alcune prossime Lezioni la determinazione del centro di gravità dei diversi corpi.

Cominciamo dalla ricerca del centro di gravità di un sistema di più corpi connessi invariabilmente tra di loro, quando sono dati i centri di gravità di essi corpi, ed i loro pesi.



Siano p, p', p'', etc i pesi, g, g', g'', etc i centri di gravità di tutti i corpi del sistema, sia G il centro comune di gravità, P il peso di tutto il sistema, avremo

$$P = p + p' + p'' + \text{etc} = \Sigma p.$$

Per determinar G riferiamo il sistema dato a 3 assi ortogonali OX, OY, OZ, e siano $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ le coordinate del punto g, $\begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases}$ del punto g', $\begin{cases} x'' \\ y'' \\ z'' \end{cases}$ del punto g'', etc, chiamiamo X, Y, Z le coordinate del centro comune G, avremo per determinarle le formole (pag.ª 80)

$$\begin{cases} X = \dfrac{\Sigma px}{\Sigma p} = \dfrac{\Sigma px}{P} \\ Y = \dfrac{\Sigma py}{\Sigma p} = \dfrac{\Sigma py}{P} \\ Z = \dfrac{\Sigma pz}{\Sigma p} = \dfrac{\Sigma pz}{P} \end{cases}$$

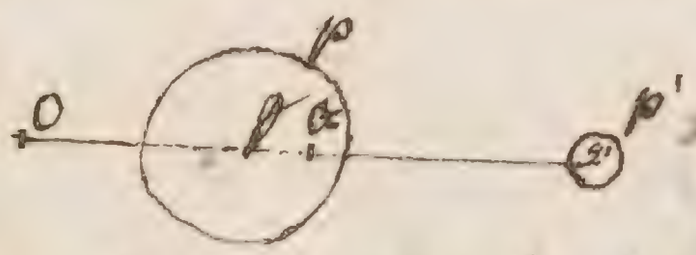
Possiamo anche proporci quest'altro problema. Date tutte le quantità espresse in lettere piccole eccetto quelle, che si riferiscono ad uno dei corpi del sistema, per es.º al primo di peso p, e date X, Y, Z, P, trovare x, y, z, p; od in

altre parole, Dati i pesi ed i centri di gravità di tutte le parti di un sistema di corpi tra loro invincibilmente connessi, ed il centro di gravità di tutto il sistema, trovare il centro di gravità, ed il peso della parte incognita del sistema.

Le formole sovrascritte per la soluzione del 1° problema ci danno anche immediatamente la soluzione del 2°. Infatti possiamo scriverle sotto quest'altra forma $\begin{cases} X = \frac{px + \Sigma p'x'}{P} \\ y = \frac{py + \Sigma p'y'}{P} \\ z = \frac{pz + \Sigma p'z'}{P} \end{cases}$, indicando con i simboli $\Sigma p'x'$, $\Sigma p'y'$, $\Sigma p'z'$, le somme Σpx. Σpy. Σpz diminuite dei termini px. py. pz ossia le somme dei momenti rispetto ai piani coordinati dei centri di gravità delle parti cognite del sistema, e $\Sigma p'$ la somma dei pesi di esse parti, ed abbiamo tosto da esse $P = p + \Sigma p'$

$$\begin{cases} p = P - \Sigma p' \\ x = \frac{PX - \Sigma p'x'}{P - \Sigma p'} \\ y = \frac{Py - \Sigma p'y'}{P - \Sigma p'} \\ z = \frac{Pz - \Sigma p'z'}{P - \Sigma p'} \end{cases}$$

Facciamo qualche applicazione di queste formole. Abbiamo due sfere omogenee, una pesante 25 Kil. l'altra 1 Kil., queste due sfere sono connesse tra di loro, si vuol sapere qual sia il loro centro comune di gravità.



I centri delle sfere saranno i centri di gravità, il centro comune G sarà sulla retta gg' che li unisce, perciò prendo per origine delle coordinate un punto O di gg', misuro Og, Og'. Dette saranno le coordinate x, x' dei centri g, g', tutte le altre coordinate saranno nulle, perciò $OG = X = \frac{px + p'x'}{p + p'}$, $y = 0$, $z = 0$, ed misurandole, si fosse trovato per es. $x = 5^{m.}$, $x' = 31^{m.}$, diremo, che il centro comune delle due sfere è sulla retta gg' ad una distanza dal punto O $X = \frac{125 + 31}{26} = \frac{156}{26} = 6$.

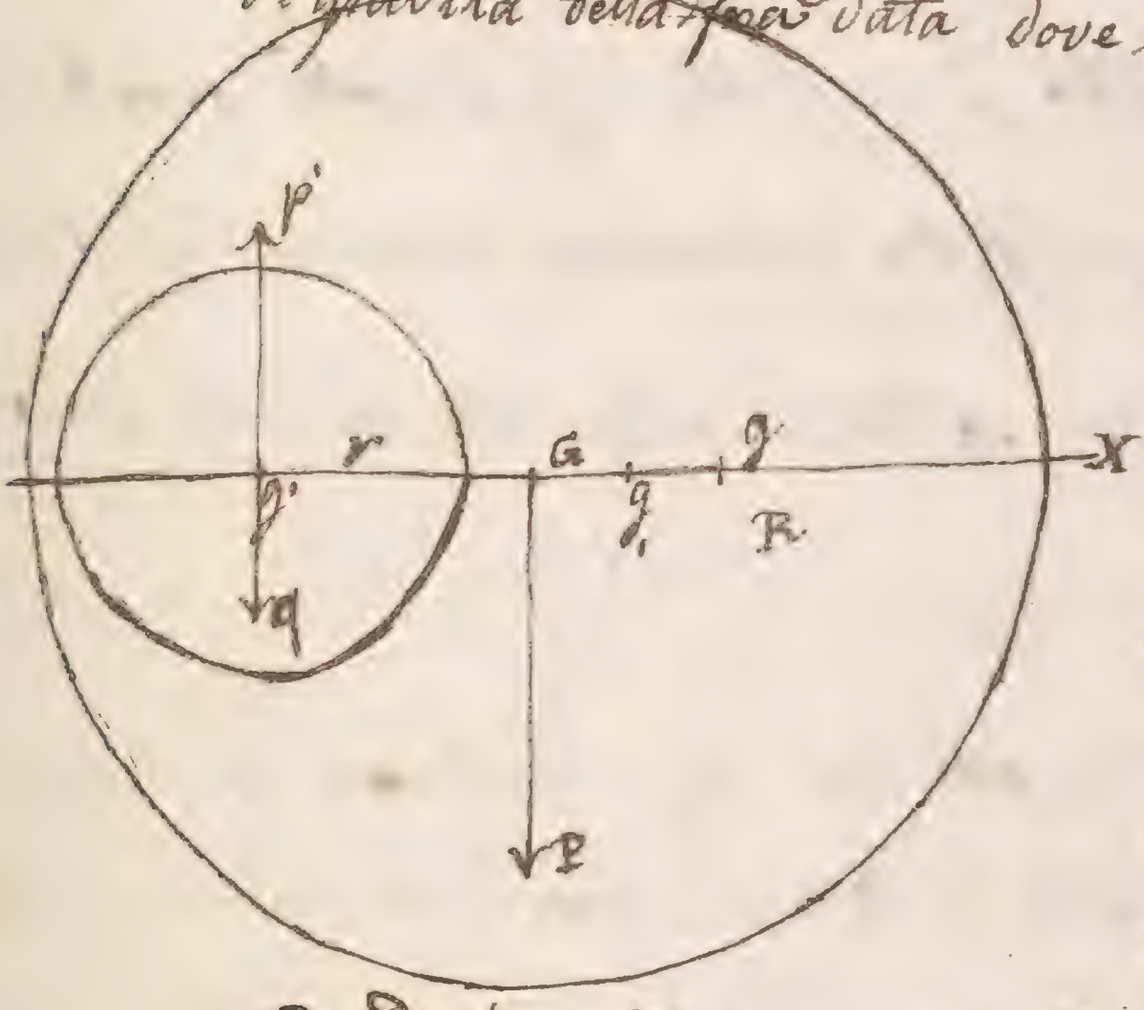
Dimmi ora il centro comune di gravità, il centro della prima sfera, ed i pesi delle due sfere, e domandiamoci ove debba esser collocata la 2ª sfera. Allora avremo incognita x', la quale è determinata dalla formola $x' = \frac{PX - px}{P - p}$; ed in cui pre-

-cedentemente $p = 25^{kil.}$, $p' = 1^{kil.}$, $x = 5^{m}$, e sia $X = 12^{m.}$, risulterà

$$x' = \frac{26.12 - 25.5}{1} = 312 - 125 = 187^{m.}$$, mentre nel problema

antecedente ove era $X = 6$, avevamo $x' = 31^{m.}$ soltanto.

Altro problema. Data una sfera omogenea di peso P, il cui centro di gravità è in G, si fa in essa una cavità sferica togliendo dall'interno di essa una sfera di peso p', il cui centro è g', si chiede il centro di gravità della sfera data dove si porterà.



abbiamo in questo caso un sistema formato di due parti, una di peso p', è la sfera che ho cavata, il cui centro di gravità è in g', l'altra di peso $\pi = P - p'$, ed il cui centro è incognito, conosciamo il peso P, ed il centro comune di gravità del sistema, sia G, quindi il centro g della 2ª parte, perciò poniamo l'origine in G, sia $Gg' = x'$, sarà $X = 0$, epperò $x = \frac{p'x'}{p}$, e se non sia dato p, ma bensì i raggi della sfera data e della sfera tolta R, r, essendo $P : p' :: R^3 : r^3$, avremo $x = \frac{\frac{Pr^3}{R^3}x'}{P - \frac{Pr^3}{R^3}} = \frac{r^3}{R^3 - r^3}x'$.

Supponiamo ora, che la sfera totale sia di ferro, e che invece di togliere la sfera piccola di peso p', si sia riempito il vano di acqua, per avere in questo caso il centro di gravità considereremo il sistema formato dalla sfera totale meno la sfera tolta, di cui precedentemente abbiamo determinato il centro di gravità, e dalla sfera piccola d'acqua, di cui supporrò il peso q, ed avremo l'ascissa del nuovo centro di gravità $x_1 = \frac{(P - p')\frac{p'x'}{P - p'} - qx'}{P - p' + q}$,

ossia $x_1 = x' \frac{p'-q}{P-p'+q}$; ed introducendo r, R in vece di p', ed in vece di q, $\frac{p}{G} = \frac{r^3}{R^3}\frac{P}{G}$

essendo G il peso specifico del ferro nel suo stato fisico, avremo

$$x_1 = x' \frac{\frac{r^3}{R^3}P(1-\frac{1}{G})}{P-\frac{r^3}{R^3}P(1-\frac{1}{G})} = x' \frac{r^3(G-1)}{R^3G - r^3(G-1)} = x' \frac{Gr^3-r^3}{r^3+G(R^3-r^3)} .$$

In un tratto si può risolvere questo problema considerando il sistema come un sist. di 3 forze parallele dirette nello stesso senso ai vertici, proporzionali ai pesi P, q applicate nei punti G, g'. Una diretta in senso contrario, proporzionale al peso p' dell'sfera tolta, è applicata in g'. Infatti avvertendo che $X=0$, e che la forza p' dovrà essere affetta dal segno —, come pure l'ascissa x' del suo punto d'applicazione, abbiamo subito servendoci delle formole generali

$$x_1 = x' \frac{p'-q}{P-p'+q} .$$

Abbiam considerati dei sistemi di due e di tre corpi, qualunque sia il numero dei corpi del sistema colle formole antecedenti si arriva sempre alla determinazione del punto. Se in queste formole ai pesi p, p', p'' etc. sostituiamo i loro valori espressi per le masse m, m', m'', etc., eguali sono $p = mg$, $p' = m'g$, $p'' = m''g$, etc., avremo le formole $x = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}$, $y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}$, $z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}$ di forma identica a quella delle prime le nostre in questo vi sono le masse invece dei pesi; Per questa ragione il centro di gravità si chiama anche centro di massa. L'inerzia appartiene alla materia, questa costituisce la massa di un corpo, perciò il centro di gravità dicesi anche da alcuni autori centro d'inerzia.

Possiamo anche supporre dati invece dei pesi p, p', p'' etc. i volumi v, v', v'' etc. di pesi specifici $\gamma, \gamma', \gamma''$, etc. o le densità $\delta, \delta', \delta''$, etc., allora essendo $p = v\gamma = v\delta g$, $p' = v'\gamma' = v'\delta' g$, $p'' = v''\gamma'' = v''\delta'' g$, ---------

avremo
$$\begin{cases} x = \frac{\Sigma v\gamma x}{\Sigma v\gamma} = \frac{\Sigma v\delta x}{\Sigma v\delta} \\ y = \frac{\Sigma v\gamma y}{\Sigma v\gamma} = \frac{\Sigma v\delta y}{\Sigma v\delta} \\ z = \frac{\Sigma v\gamma z}{\Sigma v\gamma} = \frac{\Sigma v\delta z}{\Sigma v\delta} \end{cases}$$

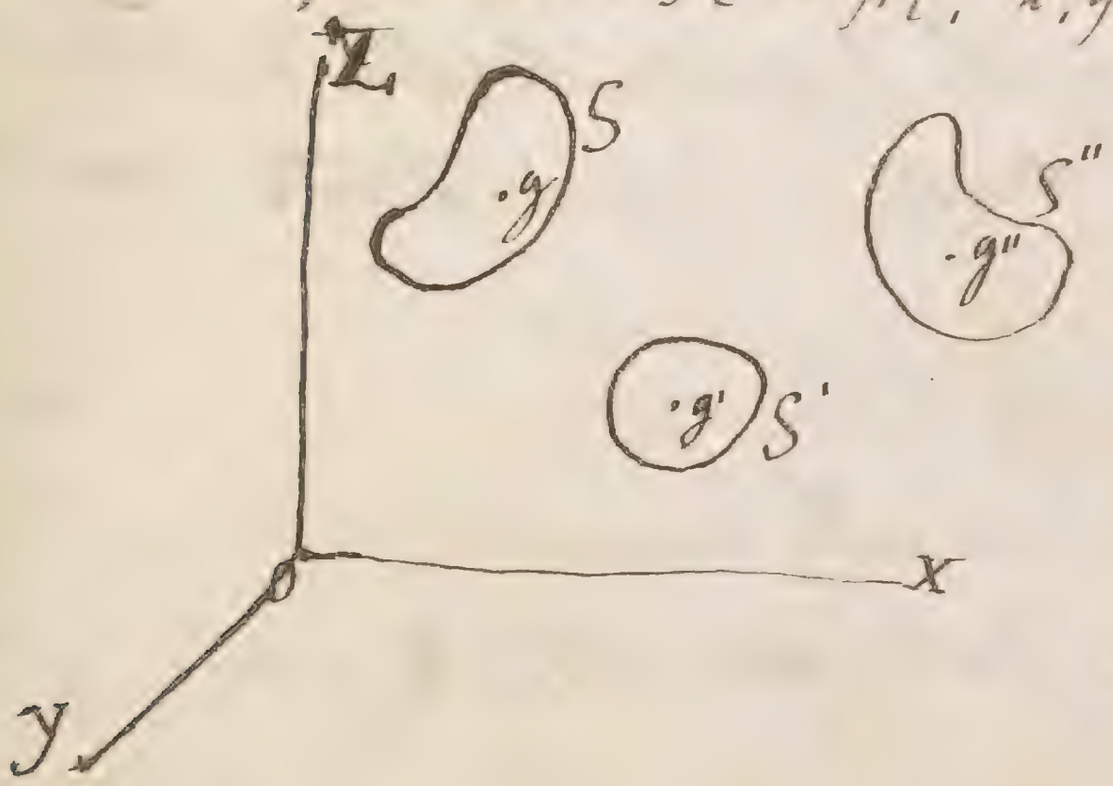
Possono succedere due casi, o tutti i corpi del sistema sono omogenei, o sono eterogenei. Nel primo caso $\delta = \delta' = \delta'' = \dots$, e $\gamma = \gamma' = \gamma'' = \dots$, quindi γ. o δ sono fattori di tutti i termini delle formole, e desse si riducono a queste altre identiche colle prime, in cui vi sono i pesi,

$$\begin{cases} X = \dfrac{\Sigma vx}{\Sigma v} \\ y = \dfrac{\Sigma vy}{\Sigma v} \\ z = \dfrac{\Sigma vz}{\Sigma v} \end{cases}$$

le nonchè in vece dei pesi contengono i volumi; è per ciò, che si dice nei corpi omogenei essere la stessa cosa centro di gravità, e centro di volume. Siccome nei solidi regolari omogenei il centro di volume coincide col centro di figura, così nei solidi regolari omogenei il centro di figura è centro di gravità.

Lezione 19ª

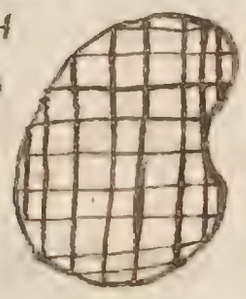
Una superficie, o una linea non avendo massa, non hanno peso, e perciò nemmeno centro di gravità, ma se così la superficie, come la linea si intendono caricate di pesi in modo, che ciascun loro elemento sia caricato proporzionalmente alla sua superficie (o alla sua lunghezza), invece di dire il centro di gravità dei pesi uniformemente distribuiti sulla superficie, o sulla linea, chiamiamo questo centro, per compendio, centro di gravità della superficie o della linea. Ciò premesso abbiasi un sistema di superficie caricate di pesi uniformemente distribuiti, di cui sieno date le coordinate dei centri di gravità g, g', g'' etc., le quali sieno x, y, z. x', y', z', x'', y'', z'', etc., e vogliasi il centro di gravità di tutto il sistema.



Se sieno S, S', S'' le superficie date, e sia K il peso, che sopra ogni unità di superficie, saranno KS, KS', KS'' etc. i pesi, dicui le superficie son caricate, e chiamando X, Y, Z le coordinate del centro

comune di gravità avremo $\begin{cases} X = \dfrac{\Sigma K S x}{\Sigma K S} = \dfrac{\Sigma S x}{\Sigma S} \\ y = \dfrac{\Sigma S y}{\Sigma S} \\ z = \dfrac{\Sigma S z}{\Sigma S} \end{cases}$. Parimente se si abbia un sistema di linee variamente caricate di pesi uniformemente distribuiti, in modo, che ciascuna unità di lunghezza sia caricata del peso h, i pesi totali su ciascuna linea stando hl, hl', hl'', etc, e le l, l', l'', etc esprimano le lunghezze delle linee, per avere il centro comune di gravità, dati i centri di gravità di ciascuna parte del sistema, sostituiremo nelle formule (pag. 80) ai pesi le quantità hl, hl', etc, dalle quali formule $\begin{cases} X = \dfrac{\Sigma hlx}{\Sigma hl} = \dfrac{\Sigma lx}{\Sigma l} \\ y = \dfrac{\Sigma ly}{\Sigma l} \\ z = \dfrac{\Sigma lz}{\Sigma l} \end{cases}$. Tutti i sistemi di forme finora trovate si applicano a sistemi materiali non continui. Il problema, che ora ci dobbiamo proporre si è di trovare il centro di gravità di un sistema continuo. Un mezzo generale per risolvere tal problema è quello di dividere il sistema continuo dato in parti piccolissime, e di cui si sappia determinare il centro di gravità, allora calcolando qualsiasi i centri di gravità di tutte tali parti, si ha colle formule trovate testè il centro di gravità del sistema dato.

Se per es. il sistema dato sia una superficie S, si può essa scomporre in tanti



quadrati piccolissimi (considerando anche come quadrati i triangoli curvilinei piccolissimi, che si hanno, operando tale scomposizione, ai limiti della superficie), il quadrato essendo un poligono regolare, il suo centro di gravità coincide col centro della figura, che si trova all'intersezione delle due diagonali, perciò è possibile di trovare i centri di gravità di tutte le parti, in cui si è diviso il sistema, e colle formole trovate si ha quindi il centro di gravità domandato.

Se il sistema sia una curva, scomponendola in elementi rettilinei, se ne ha tosto il centro di gravità, calcolando i centri di gravità di tali elementi, e sostituendo nelle formole generali dati i valori di x, y, z, il centro di gravi-

-tà di una linea retta è evidentemente il punto di mezzo della retta.
Col metodo per determinare i centri di gravità di sistemi continui qualunque è quasi impraticabile per la lunghezza delle operazioni, ma ricorrendovi applicandovi il Calcolo Integrale diventa semplicissimo, come vedremo, la difficoltà consistendo poi soltanto nelle integrazioni.
Intanto vi ha una infinità di sistemi, di cui si può determinare il centro di gravità senza ajar giusto metodo generale.
Una figura si dice esser simmetrica rispetto ad un piano, quando è così disposta, che da una parte del piano vi ha un punto ad una distanza a, ve ne ha anche un'altro dall'altra parte alla stessa distanza a contata sul prolungamento della prima.
Così un'ellissoide riferita ai suoi assi principali è simmetrica rispetto a ciascuno dei piani coordinati.
Se una figura è simmetrica rispetto a due piani, si dice esser simmetrica anche rispetto alla loro intersezione;
Finalmente se una figura è simmetrica rispetto a tre piani, che si tagliano condotti per un punto, si dice esser simmetrica rispetto al punto. Così un cilindro è simmetrico rispetto al suo asse, e simmetrico rispetto al punto di mezzo dell'asse.
Premesse queste definizioni premetto enunciare una proposizione generale, d'affatto necessaria per determinare i centri di gravità di moltissimi corpi, ed è:
Ogni figura simmetrica rispetto ad un piano, ad un'asse, ad un punto ha il suo centro di gravità in quel piano, in quell'asse, in quel punto.
Infatti prendiamo un piano di simmetria per piano delle xy, se la figura avrà un elemento di peso p alla distanza z da questo piano, ne avrà anche uno di peso p alla distanza $-z$, quindi il numeratore

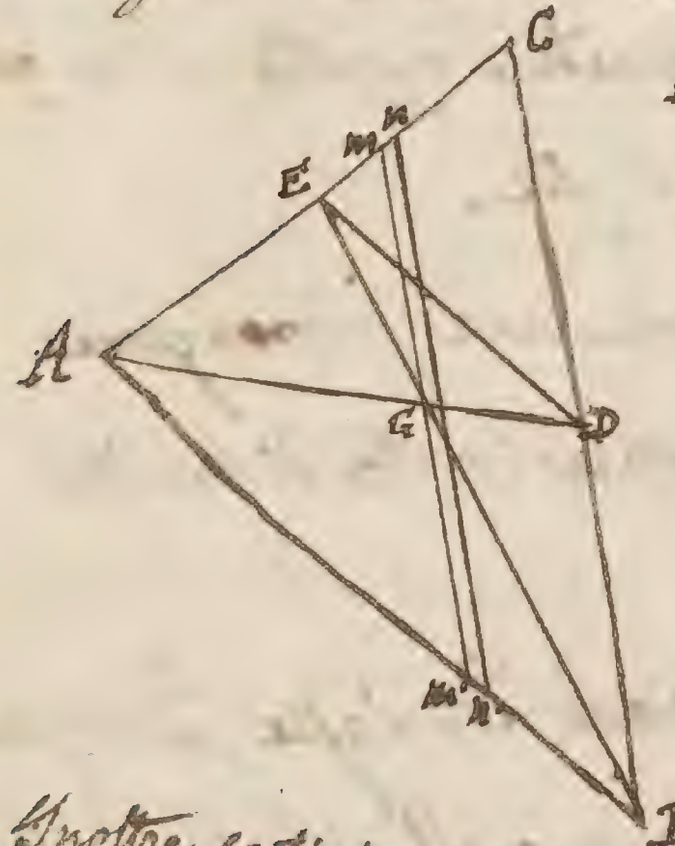
$\Sigma \rho z$ della coordinata z del centro di gravità della fig.a se conterrà un termine ρz ne conterrà anche uno $= -\rho z$, ossia questo numeratore è zero, ora $\Sigma \rho$ denominatore non può esser nullo, poichè ogni vi ha peso negativo, dunque $z = 0$, ciò non vuol dir altro, se non chè il centro di gravità è dal piano di simmetria preso per piano delle xy.

Prendendo per piani delle xy e delle xz due piani di simmetria, per la dimostrazione antecedente abbiamo $z = 0$. $y = 0$, il centro di gravità è dunque impegnato sull' asse delle x, il quale non è altro, che una linea di simmetria.

Se prendiamo per piani delle xy, delle xz e delle yz tre piani di simmetria, allora $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ossia il centro di gravità è all'origine, la quale è un punto di simmetria.

Posta questa proposizione ne deriva un numero infinito di centri di gravità, per es.o del cubo, della sfera, dell'ellissoide, del triangolo equilatero, dei cilindri ellittici, iperbolici, ~~parabolici, ingenerale~~ del tetraedro regolare, in cui il centro di grav.à è il centro del circolo inscritto, o circoscritto, di una linea retta, insomma di tutti i corpi simmetrici.

Passando ad altri casi meno facili, debbasi trovare il centro di gravità dell'area triangolare ABC.



Perciò dividasi BC in due parti eguali in D, tirisi AD, l'area ABC è simmetrica rispetto a questa linea; infatti dividendola in parti rettangolari piccolissime con rette parallele a BC, ciascuna di queste parti come mn n'm' è divisa ~~perpendicolarmente~~ in due parti eguali dalla retta AD, il centro di gravità è dunque sulla retta AD; nello stesso modo si dimostra, che pel centro è sulla retta BE tirata dal punto B al punto di mezzo E del lato AC, esso è dunque nel punto d'intersezione G di AD con BE.

Inoltre se tiriamo ED, essa essendo parallela ad AB, abbiamo i triangoli AGB, EGD, che sono simili, e da ciò si ha la proporzione AG : GD :: AB : ED, per la similitudine dei triangoli ABC, CDE si ha anche AB : ED :: BC : CD :: 2 : 1, dunque AG : GD :: 2 : 1, e $GD = \frac{AG}{2} = \frac{1}{3} AD$, ~~onde~~ ossia il centro di gravità di un triangolo si trova prendendo i due terzi da A verso D della

retta AD. che divide per metà il lato BC.

Se si voglia ora avere il centro di gravità di un poligono qualunque, esso si otterrà facilmente scomponendo il poligono in triangoli;

Sia per es.o da trovarsi il centro di gravità del quadrilatero ABCD. Tirata la diagonale AC, e divisa per metà in E, si tirino BE, DE, si prenda su

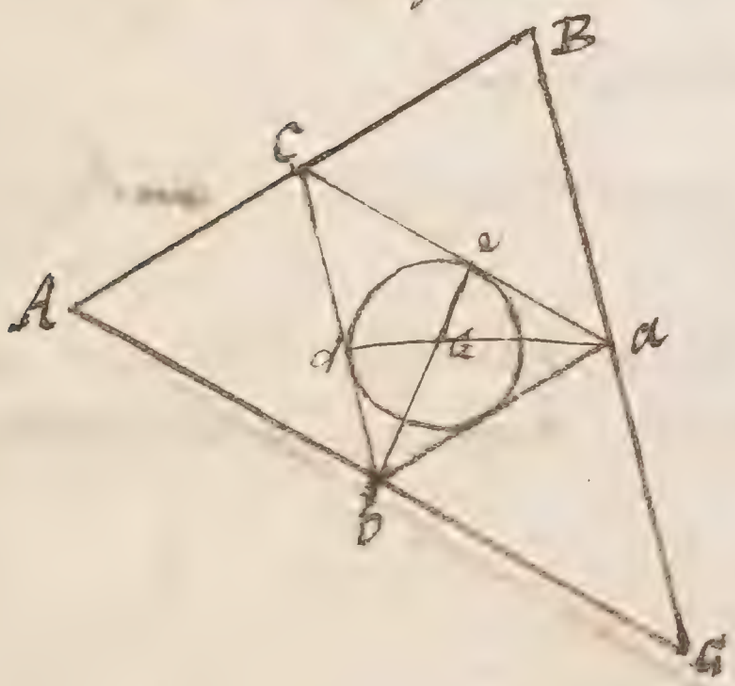
ciascuna di queste rette due terzi di esse rette a partire dai punti BD, i punti g, g' saranno i centri di gravità dei triangoli ABC, ACD.

Per ottenere il centro di gravità del quadrilatero, osservo, che in g è applicato un peso proporzionale all'area ABC, in g' un peso proporzionale all'area ACD, e concludo, che il centro di gravità si avrà tirando gg', e dividendola in G in parti inversamente proporzionali alle aree ABC, ACD, ossia, poichè la base AC è comune ai due triangoli, alle perpendicolari Bb, Dd.

Quindi risulta, che dato un poligono di cui si debba cercare il centro di gravità, sarà meglio scomporlo in quadrilateri, se il numero dei suoi lati sarà pari, od in quadrilateri ed un triangolo se il numero dei lati sarà impari.

Possiamo anche proporci quest'altro problema. Trovare il centro di gravità del perimetro di un poligono.

Per risolver questo problema, cominciamo dal supporre, che il poligono sia un triangolo ABC.



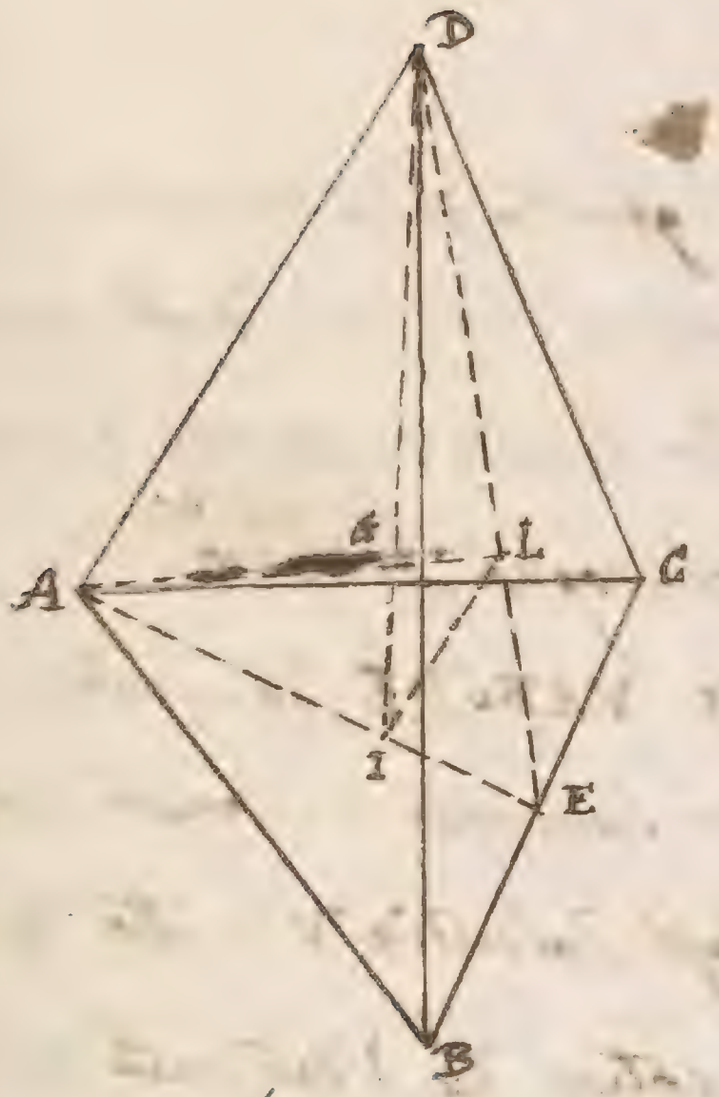
I centri di gravità dei lati sono nei loro punti di mezzo a, b, c, per trovar il centro di gravità del perimetro considero applicati in a, b, c tre pesi proporzionali ai lati BC, AC, AB, oppure, poichè i triangoli ABC, abc sono simili, proporzionali ai lati bc, ac, ab, e dimostro, che essendo i pesi applicati ai vertici a, b, c del triangolo abc proporzionali

ai lati opposti, il centro di gravità del perimetro ABC coincide col centro di figura del triangolo abc, ossia col centro del circolo inscritto in tal triangolo;
Infatti se divido bc in parti inversamente proporzionali ai lati ab, ac nel punto d, e tiro ad, il centro di gravità si trova sopra ad, ora ad dico, che divide in due parti eguali l'angolo a, infatti ~~Dico~~ supposto, che ad divida in due parti eguali l'angolo a, i due triangoli bad, cad avendo un'angolo eguale stanno come i prodotti dei lati che comprendono l'angolo eguale, epperò, osservando, che hanno pure eguale altezza, e comune il lato ad, abbiamo la proporzione bd : cd :: ab : ac, la quale ci insegna, che la retta dividente per metà un'angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adjacenti, e che però ad divide realmente per mezzo l'angolo a. Similmente se divido ac in parti inversamente proporzionali ai lati ab, bc, nel punto e e tiro quindi eb, questa dividerà l'angolo b in due parti eguali, e conterrà il centro di gravità, che dovendosi anche trovare sulla ad, si troverà nel loro punto d'intersezione G, ora questo punto considerato come intersezione delle due rette dividenti per mezzo gli angoli a, b, è evidentemente il centro di figura del triangolo abc.

Se si debba trovare il centro di gravità di un poligono qualunque, bisognerà dividere per mezzo i lati, considerare applicati ai punti di mezzo tanti pesi proporzionali ai rispettivi lati del poligono, e trovare quindi il centro comune di gravità di un tal sistema di pesi.

Il centro di gravità del perimetro di un poligono regolare coincide col centro di gravità del poligono.

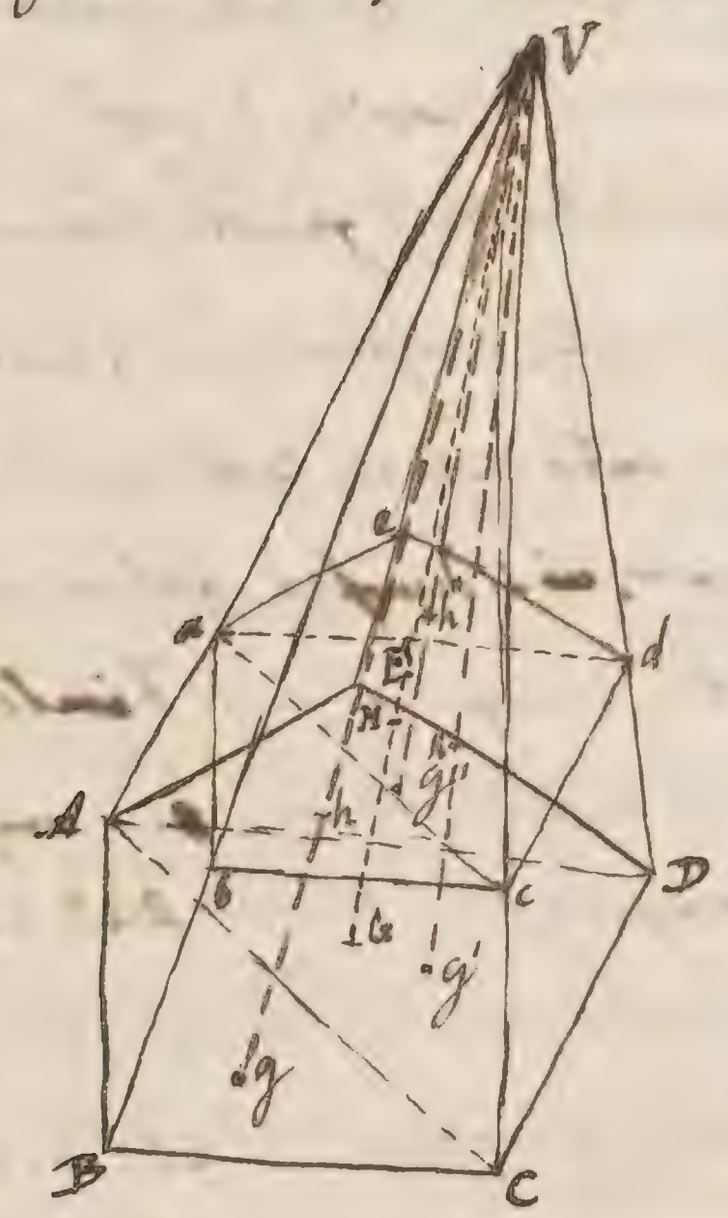
Passando alla ricerca del centro di gravità dei corpi solidi ricerchiamo il centro di gravità di una piramide, e cominciamo a ricercarlo per una piramide triangolare.



Sia DABG la piramide triangolare, si cerchi il centro di gravità della base ABG, sia I questo centro, si tiri DI, il centro di gravità della piramide sarà sopra DI; infatti se ad una altezza qualunque si conduce un piano parallelo alla base ABG, le intersezioni di questo piano con le faccie della piramide saranno rette parallele ai lati della base ABG, le quali determineranno un triangolo, il cui centro di gravità sarà nel punto d'intersezione del piano con la retta DI, e se vicinissimo al primo già condotto se ne conduca un'altro pure parallelo alla base, è evidente, che questo secondo piano posto condurlo talmente vicino al primo, che essi intercettino tra di loro un tronco di piramide, il quale si possa considerare senza tema di errare, come un prisma, il centro di gravità di questo prisma sarà manifestamente sulla retta DI; ora la piramide intendasi divisa in un numero grandissimo di prismi siffatti, essa potrà considerarsi come un sistema di pesi tutti applicati nei diversi punti della retta DI, il centro comune di gravità di questo sistema sarà perciò anche sulla retta DI, ora tal centro sarà il centro di gravità della piramide. Similmente se almezzo E del lato BG, tiriamo DE, e se prendiamo i due terzi da D verso E in L, e tiriamo AL, L essendo il centro di gravità della faccia BGD, AL conterrà il centro di gravità della piramide, come si dimostra ripetendo l'antecedente ragionamento. Il centro di gravità è dunque il punto d'intersezione delle due rette AL, DI. Perchè la sua determinazione sia completa, tiriji IL, essa sarà parallela ad AD, e la somiglianza dei triangoli AGD, IGL ci darà la proporzione DG: GI :: AD: IL, ora essendo anche simili i triangoli ADE, ILE, abbiamo AD: IL :: AE: EI :: 3: 1, dunque DG: GI :: 3: 1, ossia $DG = 3.GI = \frac{3}{4} DI$; il centro di gravità di una piramide triangolare si ha dunque tirando dal vertice al centro di gravità della base una retta, dividendola in 4 parti, e portando tre di queste parti a partire dal vertice sulla retta suddetta.

Lezione 20ª

Nello stesso modo, con cui dalla conoscenza del centro di gravità di un triangolo fu-
rono pervenuti a determinare il centro di gravità di un poligono qualunque, dalla conoscenza
del centro di gravità della piramide triangolare risulta il centro di gravità di una
piramide qualunque, ossia, che abbia per base qualsivoglia poligono.
Sia da determinarsi il centro di gravità della piramide VABCDE; da un vertice A
della base si tirino le diagonali AD, AC, la base verrà scomposta in triangoli, sieno
g, g', g'' i centri di gravità di questi triangoli, tirinsi dal vertice V le rette Vg, Vg',
Vg'', dividasi ciascuna di esse in quattro parti eguali, portinsi tre di tali parti sulle
rispettive rette a partire dal vertice V, i punti h, h', h'' così ottenuti saranno i centri di
gravità delle piramidi VABC, VACD, VADE; a questi centri potranno considerarsi
applicati i pesi delle dette piramidi, il centro di tal sistema di pesi sarà il centro
di gravità della piramide totale, e sarà contenuto nel piano dei centri h, h', h'';



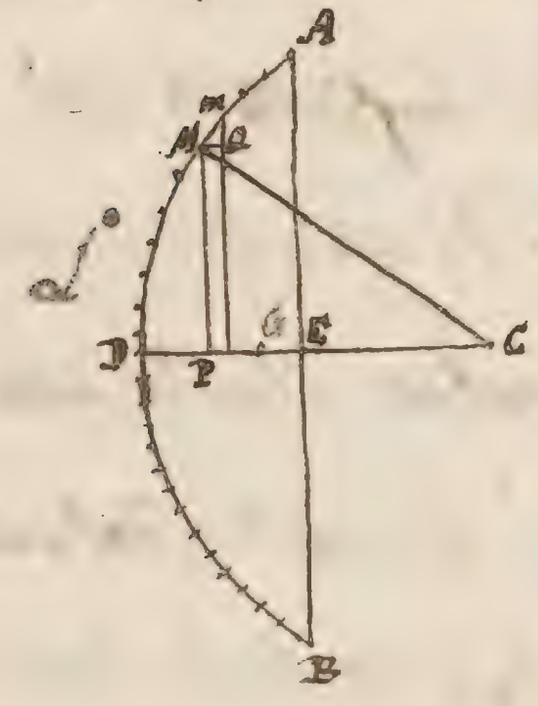
ora i pesi delle piramidi VABC, VACD, VADE supposte
omogenee essendo proporzionali ai volumi, i volumi
essendo proporzionali alle aree ABC, ACD, ADE,
tali aree essendo proporzionali alle aree abc, acd,
ade, dei triangoli, che si hanno tirando nel poligono
abcde determinato dalle intersezioni del piano
passante pei punti h, h', h'', le diagonali ad, ac omo-
-loghe ad AD, AC, ne risulta, che il centro comune
di gravità delle tre piramidi è lo stesso, che quello
dei triangoli abc, acd, ade, ossia è lo stesso, che
quello del poligono abcde. Ma se tiriamo VH,
dessa va a ferire la base nel suo centro di gravità G, inoltre Vg, Vg', Vg'', VG essendo divise in parti proporzionali dal piano abcde, $VH = \frac{3}{4} VG$, dunque
il centro di gravità di una piramide si ha conducendo dal vertice una retta
al centro di gravità della base, e prendendo a partire dal vertice i $\frac{3}{4}$ di tal retta.

ciò è vero, qualunque sia il numero dei lati del poligono, poichè il ragionamento fatto è indipendente da questo numero, dunque è ancora vero il teorema, quando il poligono ha un numero infinito di lati, quando il suo perimetro
ossia è una curva chiusa; dunque il Centro di gravità di un cono di base qualunque si ha tirando dal vertice al centro della di gravità della base una retta, e prendendone i $\frac{3}{4}$ a partire dal vertice.
Non importa per la verità del teorema, che la base sia chiusa da un perimetro parte rettilineo e parte curvilineo.
Non è però conosciuto il centro di gravità di un cono, finchè non conosciamo il centro di gravità della base, dovrà pertanto ora comparire il per obtenuta della ricerca del centro di gravità di una curva, e dell'area compresa da una curva, ed in primo luogo del centro di gravità di un'arco circolare, di un segmento, e di un settore circolare.
Prima di cercare il centro di gravità di un'arco di circolo, si osservi, che qualunque arco di curva si abbia, come AB, il suo centro di gravità cade sempre dalla parte concava dell'arco non trovandosi mai sull'arco istesso.

Infatti la somma dei momenti dei pesi uniformemente distribuiti sopra AB è eguale al momento della risultante, ora se il piano a cui si riferiscono i momenti passi pel centro di gravità, il momento della risultante sarà zero, epperò la somma dei momenti dei pesi sarà anche zero, ossia di tali momenti ~~che~~ le ne saranno dei positivi dovranno aversi eguali a quelli dei negativi; i pesi essendo sempre uno ~~non~~ che la dist.a da un punto dell'arco al piano, che abbiamo supposto tirato pel centro di gravità, dunque rispetto a questo piano l'arco dovrà essere parte da una banda, parte dall'altra, dovendo ciò essere per qualunque piano, che si tiri pel centro di gravità, evidentemente questo non potrà essere, che fuori dell'arco, e dalla parte della sua concavità, e bisogna concepirlo invariabilmente

connesso coll'arco.

Ciò premesso sia l'arco circolare ADB, di cui si debba trovare il centro di gravità.

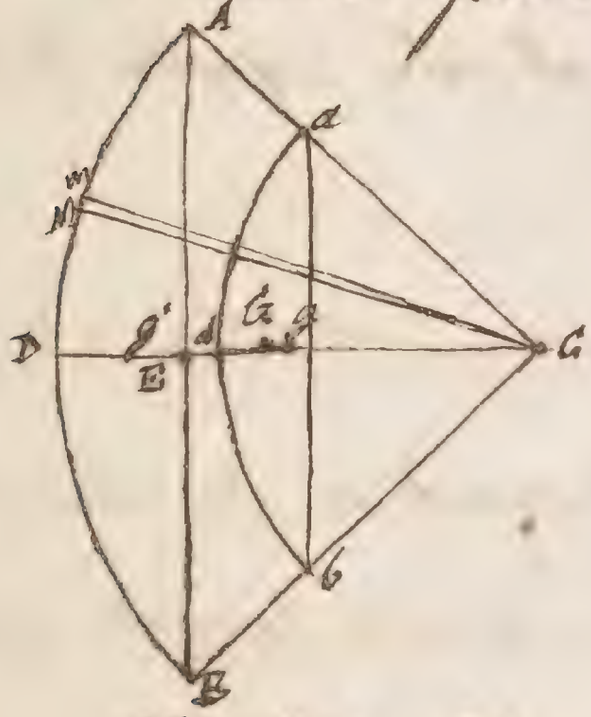


L'arco ADB essendo simmetrico rispetto al raggio CD, che lo divide per mezzo, il centro di gravità è certamente in CD, di più se tiriamo la corda AB esso è compreso tra i punti D, E, poichè altrimenti non tutti i piani perciò condotti dividerebbero in due parti l'arco; per determinare la sua vera posizione concepiamo l'arco diviso in un numero grandissimo di parti, queste essendo perciò piccolissime potranno riguardarsi come rette, e l'arco quindi come un poligono formato da un numero grandissimo di lati; per avere il centro di gravità di tal poligono, bisognerà successivamente i centri di gravità dei lati, considerare ad essi applicati dei pesi proporzionali ai lati, trovare quindi il centro di gravità di un tal sistema di pesi; per fare queste operazioni mettiamo l'origine delle coordinate in C considerando CD come asse delle ascisse positive, e consideriamo una lunghezza del lateruolo Mm del detto poligono, tal lato essendo piccolissimo, potremo dire, che il suo centro di gravità è sensibilmente in M, epperciò che, chiamando x l'ascissa di un punto M dell'arco, P il peso diffuso sopra un lateruolo Mm, X l'ascissa del centro di gravità, sarà $X\Sigma P = \Sigma Px$, ora i pesi sono proporzionali ai lateruoli Mm, che chiamerò s, dunque potremo scrivere $X\Sigma s = \Sigma sx$, essendo $\Sigma s = ADB$, $X \cdot ADB = \Sigma sx$. Sommisi adesso il triangolo MmQ tirando per M MQ parallela a CD, esso si potrà sensibilmente considerare come rettilineo, epperò simile al triangolo MCP, da questa somiglianza abbiamo CP:MQ::CM:Mm, ma rispetto all'archetto Mm. CP=x, Mm=s, chiamiamo R il raggio del cerchio dell'arco, avremo dunque x:MQ::R:1, donde $sx = R \cdot MQ$, ed $X \cdot ADB = \Sigma R \cdot MQ = R\Sigma MQ$, ora ΣmQ indica la somma delle lunghezze mQ corrispondenti a ciascun lateruolo come Mm, la quale precisamente la corda AB, dunque $X \cdot ADB = R \cdot AB$, o altrimenti $X = R \frac{\text{corda}}{\text{arco}}$, o in parole la dist.a del centro di gravità di un'arco dall'altro è dell'arco contata sul raggio, che divide l'arco per metà è quarta proporzionale dopo l'arco, la corda, il raggio.

Se si voglia introdurre il numero dei gradi α dell'arco ADB, avrassi

$$X = R\,\frac{2R\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\alpha}{\frac{\alpha}{180}\cdot\pi R} = \frac{360}{\alpha}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\alpha}{\pi}\,.R.$$

Volendo il centro di gravità del settore CADB si osserva, che ~~dopo~~ il settore essendo simmetrico rispetto al raggio CD dividente per metà l'arco, il centro di gravità è su di CD: per determinarlo s'immaginiamo divisò il settore in un numero grandissimo di settori piccolissimi, i quali si possano considerare come triangoli rettilinei; in questi triangoli come mCM, l'angolo mCM essendo piccolissimo, il ~~raggio~~ lato CM, dal lato che divide per mezzo la base Mm sensibilmente si confondono, perciò possiamo dire che il centro di gravità di mCM è a due terzi del raggio CM, ossia che a due terzi di ciascun raggio dell'arco possiamo considerare applicati dei pesi proporzionali ai triangoli infinitesimi corrispondenti, e che il centro comune di questi pesi è il centro di gravità del settore CADB; ora prendendo successivamente i due terzi di tutti i raggi, i punti che si ottengono compongono lo stesso arco a d b, che si avrebbe descrivendo un arco dal centro in C, con raggio $=\frac{2}{3}\cdot R$ (se sia CA $=R$),



dunque il centro di gravità del settore coinciderà col centro di gravità dell'arco a d b, ossia sarà, ~~mettendo~~ supposto l'asse del centro, $CG = Cd\,\frac{\text{corda } ab}{\text{arco } adb} = \frac{2}{3}R\cdot\frac{2}{3}AB\,\frac{1}{\frac{1}{3}ADB}$

$$CG = \frac{2}{3}R\cdot\frac{AB}{ADB} = \frac{\text{cord.}}{\text{arc.}}\cdot\frac{2}{3}R.$$ Il centro di gravità di un settore circolare si ha dunque cercando una 4ª proporzionale dopo l'arco, la corda ed i $\frac{2}{3}$ del raggio, e portando tal linea dal centro C sul raggio, che divide per mezzo l'arco.

Il centro di gravità del segmento ADB si ha considerando il segmento come la differenza tra il settore CADB, ed il triangolo ABC; i centri di gravità di queste aree sappiamo trovarli, sieno G, g, il centro di gravità del segmento, essendo G, g sulla linea CD, sarà anche su di CD; sia g' questo centro, considerando applicati in G, g i pesi del settore, e del triangolo proporzionali alle loro aree, avremo,

pel teorema cognito dei momenti di un sistema di pesi, triang. Gg + segm. $Gg' =$ settore GG,

donde segm. $Gg' =$ settor. GG − triang. $Gg = \frac{R}{2} ADB \cdot \frac{2}{3} R \frac{AB}{ADB} - \frac{1}{2} AB \cdot CE \cdot \frac{2}{3} CE$

$$\text{segm. } Gg' = \frac{1}{3} AB (R^2 - \overline{CE}^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \overline{AB}^3 = \frac{1}{12} \overline{AB}^3,$$

e finalmente $Gg' = \frac{1}{12} \cdot \frac{\overline{AB}^3}{\text{segmento}}$.

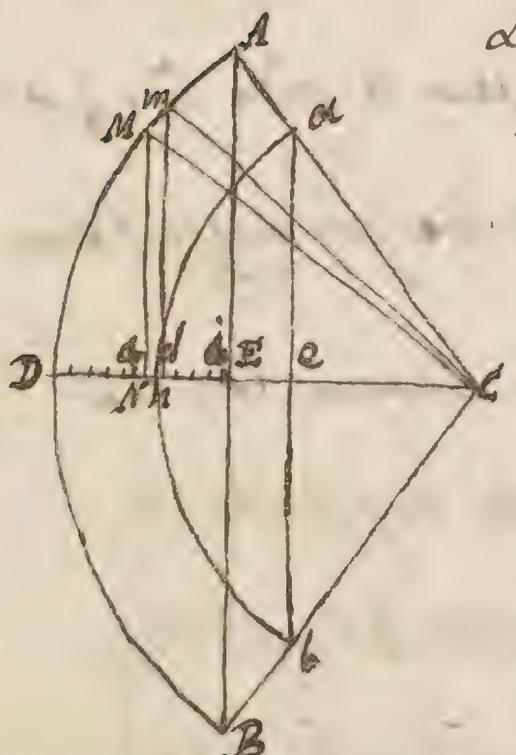
Per applicare queste formole ad esempii particolari, vediamo quale sia il centro di gravità della semicirconferenza, eguale a quello del semicircolo.

Per avere il primo centro basta nella formola $X = R \frac{\text{corda}}{\text{arco}}$ sostituire alla corda $2R$, e all'arco πR, e abbiamo la distanza del centro di gravità della semicirconferenza di raggio R dal centro di essa circonferenza $X = R \frac{2}{\pi} = 2 \cdot \frac{R}{\pi}$.

Per avere il centro di gravità del semicircolo, nella formola $X = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\text{corda}}{\text{arco}}$ si metta in vece di corda $2R$, e πR in vece di arco, e avrassi pel centro di gravità del semicircolo

$$X = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Lezione 21ª. Dopo aver considerati i centri di gravità dell'arco, di un'arco, di un settore e di un segmento circolari, cerchiamo quali sieno i centri di gravità delle superficie e dei solidi generati dalla rotazione di queste figure intorno al raggio, che le divide per metà, i quali sono la calotta, il settore del segmento sferici.



La calotta generata dall'arco ADB rotando intorno a GD come asse essendo simmetrica rispetto a GD, il suo centro di gravità è su GD. Per determinarlo si immagini divisa la saetta DE in un numero grandissimo di parti eguali, e siano Gd ciascuna punto di divisione come $N.n$, delle perpendicolari NM, nm al raggio GD, l'arco ADB verrà diviso in parti non eguali, ma tali, che, girando intorno a GD, genereranno tante zone di superficie equivalente, perchè di altezze eguali. Ciascuna di tali zone essendo simmetrica rispetto a GD, avrà il suo centro di gravità su DE, e di più alla metà della saetta corrispondente, dunque tutti i centri di tutte le zone saranno equidistanti, e siccome potendo considerare applicati i pesi delle zone, i quali sono tutti eguali, risulta, che il centro di gravità della calotta data coincide col

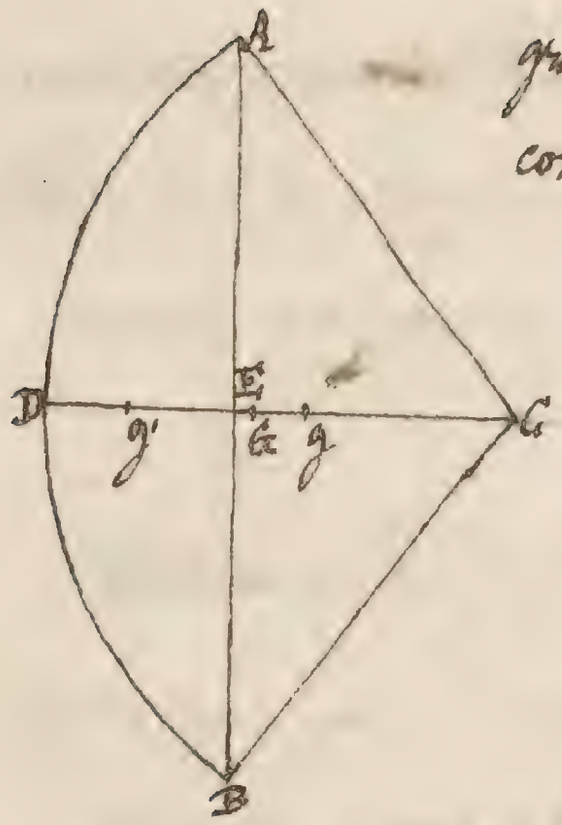
centro di gravità di tutti i pesi delle zone considerate come uniformemente distribuiti sopra DE, ossia sarà al punto di mezzo C della saetta DE.

Lo stesso ragionamento dimostra, che il centro di gravità di una zona sferica a basi parallele è al punto di mezzo della saetta.

Questa proposizione ci guida subito al centro di gravità del volume del settore sferico. Questo volume è compreso sotto due superficie curve, una conica generata dalla rotazione del triangolo ABC, l'altra sferica generata dalla rotazione dell'arco ADB; su questa immaginiamo una infinità di figure eguali e contigue, ~~la somma di esse~~ e concepiamo, che ciascuna di esse sia base di un cono avente il vertice in C, la somma di tutti questi coni comporrà il settore sferico CADB, il cui centro di gravità sarà perciò il centro comune di gravità di tutti i coni. Rappresenti M uno di questi coni, la base essendo infinitamente piccola, possiamo dire senza tema di errare, che il centro di gravità di M cade ai $\frac{3}{4}$ del raggio CM, per tutti gli altri coni il centro di gravità essendo anche ai $\frac{3}{4}$ del raggio condotto alla sua base, ne segue, che tutti i centri parziali di gravità si troveranno diffusi sulla superficie di una calotta descritta con raggio eguale ai $\frac{3}{4}$ del raggio del settore; ora i pesi dei coni son proporzionali alle loro basi, e alle superficie da essi intercette sulla superficie della nuova calotta adb, dunque il centro di gravità del settore coincide col centro di gravità della calotta adb, ossia è al punto di mezzo G' della saetta de.

Per determinare G' numericamente, diamoci $DE = x$, il raggio $CD = R$, prendiamo per incognita GG', avremo $GG' = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}x = \frac{3}{4}\left(R - \frac{x}{2}\right)$.

Considerando il segmento sferico generato dalla rotazione del segmento circolare ADB intorno a CD come differenza tra il settore sferico CADB, e il cono generato dal triangolo ABC, se ne ha il centro di gravità g' facilmente.



Infatti il segmento essendo simmetrico rispetto a GD, ha il suo centro di gravità sopra GD, inoltre se siano G, g i centri di gravità del settore e del cono, e chiamiamo C, S i volumi del cono e del segmento abbiamo

$$C \cdot gG + S \cdot g'G = (C+S) \cdot GG, \text{ donde } g'G = \frac{(C+S)\cdot GG - C\cdot gG}{S}.$$

Volendo esprimere $g'G$ per il raggio R, e la saetta x, bisogna prima che cerchiamo di esprimere in tal modo C, S, GG, gG, ora

$$C = \frac{1}{3}\pi \overline{AE}^2 \cdot GE = \frac{1}{3}\pi x(2R-x)(R-x),$$

$$S = \frac{1}{2}\pi \overline{AE}^2 \cdot x + \frac{1}{6}\pi x^3 = \frac{1}{2}\pi x^2(2R-x) + \frac{1}{6}\pi x^3,$$

$gG = \frac{3}{4}GE = \frac{3}{4}(R-x)$, $GG = \frac{3}{4}(R-\frac{x}{2})$, dunque sostituendo in $g'G$

$$g'G = \frac{\frac{1}{3}\pi x\left\{\frac{1}{3}(2R-x)(R-x) + \frac{1}{2}x(2R-x) + \frac{1}{6}x^2\right\}\cdot\frac{3}{4}(R-\frac{x}{2}) - \pi x\cdot\frac{1}{4}(2R-x)(R-x)^2}{\pi x\left\{\frac{1}{2}x(2R-x) + \frac{1}{6}x^2\right\}}$$

$$g'G = \frac{\left[(2R-x)(2R+x) + x^2\right]\frac{3}{2}(2R-x) - 6(2R-x)(R-x)^2}{12x(2R-x) + 4x^2}$$

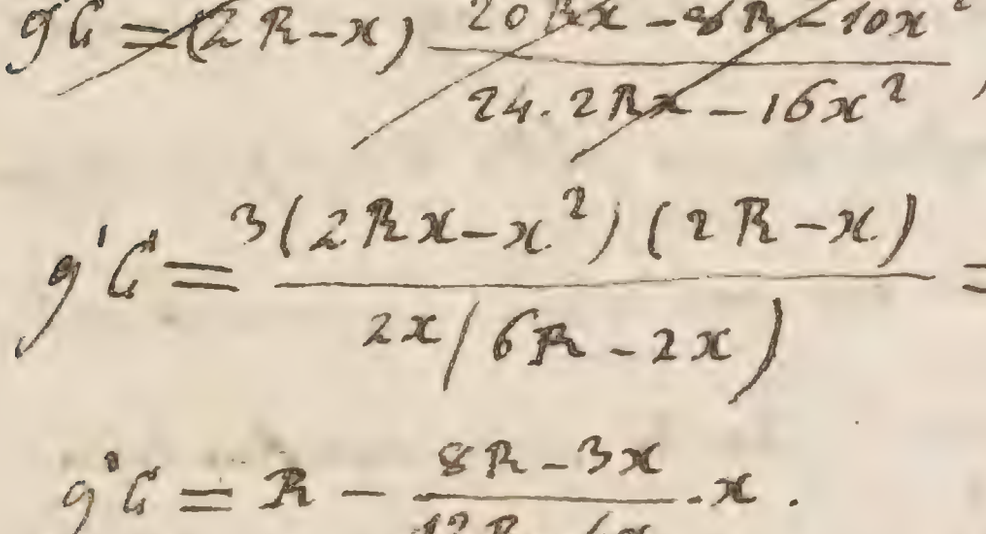
$$g'G = \frac{(2R-x)^3 + x^2(2R-x) - (2R-x)(R^2-2Rx+x^2)}{24\cdot 2Rx - 16x^3}$$

$$g'G = (2R-x)\frac{20Rx - 8R^2 - 10x^2}{24\cdot 2Rx - 16x^2}, \quad g'G = \frac{3R^2(2R-x) - 3(2R-x)(R^2-2Rx+x^2)}{6x(2R-x) + 2x^2}$$

$$g'G = \frac{3(2Rx-x^2)(2R-x)}{2x(6R-2x)} = \frac{3(2R-x)^2}{4(3R-x)} = \frac{12R^2-12Rx+3x^2}{12R-4x}$$

$$g'G = R - \frac{2R-3x}{12R-4x}\cdot x.$$

Con questo corredo, che già abbiamo di centri di gravità ne possiamo rintracciare un numero infinito di altri. per esempio si vuole il centro di gravità di un trapezio a basi parallele ABDC. Si considera questo trapezio come eguale alla differenza di due triangoli AOB, COD che si hanno prolungando i lati non paralleli AC, BD fino ad incontrarsi in O,



i centri di gravità dei triangoli essendo in H, h sulla retta OE, che divide per metà il lato AB, e per conseguenza anche il suo parallelo CD, il che ne deriva, che il centro di gravità del trapezio è sulla retta, che divide per mezzo il

due lati paralleli; di più se chiamiamo G questo centro abbiamo, contando le distanze dal punto E, $\overline{OAB}\cdot EH = \overline{OCD}\cdot Eh + \overline{ABCD}\cdot EG$; ora le aree OAB, OCD appartenendo a triangoli simili stanno tra di loro come i quadrati dei lati omologhi, ossia, chiamando p, q le basi del trapezio AB.CD, hassi $OAB:OCD:ABCD :: p^2 : q^2 : p^2 - q^2$, dunque, poichè l'equazione suddetta è omogenea rispetto a tali aree, possiamo ad esse sostituire le quantità p^2, q^2, p^2-q^2; se si chiami h la retta EF avremo $p^2\cdot EH = q^2\cdot Eh + (p^2-q^2)EG$, ora $EH = \frac{EO}{3} = \frac{1}{3}h\frac{p}{p-q}$. $Eh = \frac{1}{3}FO + h = h + \frac{1}{3}h\frac{q}{p-q}$, dunque

$$(p^2-q^2)EG = p^2\cdot\tfrac{1}{3}h\frac{p}{p-q} - q^2\left(h+\tfrac{1}{3}h\frac{q}{p-q}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}h\left\{\frac{p^3 - q^2(3p-2q)}{p-q}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}h\,\frac{p^3-3pq^2+2q^3}{p-q}, \text{ e finalmente}$$

$$EG = \tfrac{1}{3}h\cdot\frac{p^3-3pq^2+2q^3}{(p-q)^2(p+q)} = \tfrac{1}{3}h\,\frac{p+2q}{p+q}.$$

Vogliasi ancora il centro di gravità del cono tronco a basi parallele generato dalla rivoluzione del trapezio ABCD attorno ad EF, si osserverà, che, essendo esso cono tronco simmetrico rispetto al suo asse EF, il suo centro di gravità è su di EF. Inoltre tal solido essendo la differenza dei due coni generati dai triangoli OAB, OCD, abbiamo, chiamando V, v i volumi dei coni, e se siano H, h i loro centri di gravità, e G il cercato incognito,
$EH\cdot V = Eh\cdot v + EG(V-v)$. In vece di p, q come nel problema antecedente introduco R, r, cioè i raggi AE, CF delle basi parallele del tronco, allora siccome l'equazione precedente è omogenea rispetto ai volumi dei coni, e siccome questi sono proporzionali ad R^3, r^3, introduco in questa

equazione invece di V, v le quantità R^3, r^3, dovrò, poichè $EH = \frac{1}{4} h \frac{R}{R-r}$,

$$Eh = h + \frac{1}{4} h \frac{r}{R-r},$$

$$R^3 . \frac{1}{4} h \frac{R}{R-r} = r^3 \left(h + \frac{1}{4} h \frac{r}{R-r}\right) + (R^3 - r^3) EG, \text{ donde}$$

$$EG = \frac{1}{4} h \frac{R^4 - r^3(4R-3r)}{(R-r)^2(R^2+Rr+r^2)} = \frac{1}{4} h \frac{R^4 - 4Rr^3 + 3r^4}{(R-r)^2(R^2+Rr+r^2)}$$

$$EG = \frac{1}{4} h \frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}. \text{ Qualunque ha il tronco di cono o piramide a basi parallele}$$

il suo C. di g. si trova sulla retta h che unisce i c. di g. delle basi p^2, q^2 - la sua distanza dalla base p^2

$$è = \frac{1}{4} h \frac{p^2+2pq+3q^2}{p^2+pq+q^2}$$

Lezione 22.ª

La conoscenza dei centri di gravità dei triangoli, e delle piramidi ci permette di trovare i centri di gravità di qualunque poligono o di qualunque poliedro, perchè esso si può sempre intendere diviso in un certo numero di triangoli, o di piramidi triangolari, inoltre le proprietà del circolo e della sfera ci hanno permesso di trovare i centri di gravità d'un arco, d'un segmento, d'un settore circolari, d'una calotta, d'un segmento, di un settore sferici, ma tolti questi casi, e altri particolari non si può andar più oltre nella determinazione dei centri di gravità sì di superficie, che di solidità.

Generalmente per determinare i centri di gravità di aree piane chiuse da curve, di superficie curve, di solidi racchiusi da superficie curve, il metodo consiste, come già abbiamo accennato, nel dividere la figura o il solido in parti, di cui si sappiano trovare i centri di gravità, ora perchè in generale questa divisione si possa fare, bisogna dividere il corpo dato in un numero infinito di parti, ma in questo caso le sole formole algebriche non conducono allo scopo, e bisogna ricorrere alle formole di Calcolo Integrale; inoltre le formole algebriche ~~servirebbero~~ servono soltanto pei corpi omogenei, mentre il Calcolo Integrale supplisce a questa mancanza. Ond'è che va adoprire sì daremo le formole di Calcolo Integrale per i corpi omogenei e pegli eterogenei, Cominciamo dai corpi omogenei——

Abbiamo trovato, che, chiamando $X.Y.Z$ le coordinate del centro di gravità di un sistema, x,y,z le coordinate d'una delle sue parti, P il peso corrispondente, le coordinate X,Y,Z si possono esprimere succintamente così

$$X=\frac{\Sigma Px}{\Sigma P}\ ,\ Y=\frac{\Sigma Py}{\Sigma P}\ ,\ Z=\frac{\Sigma Pz}{\Sigma P},$$

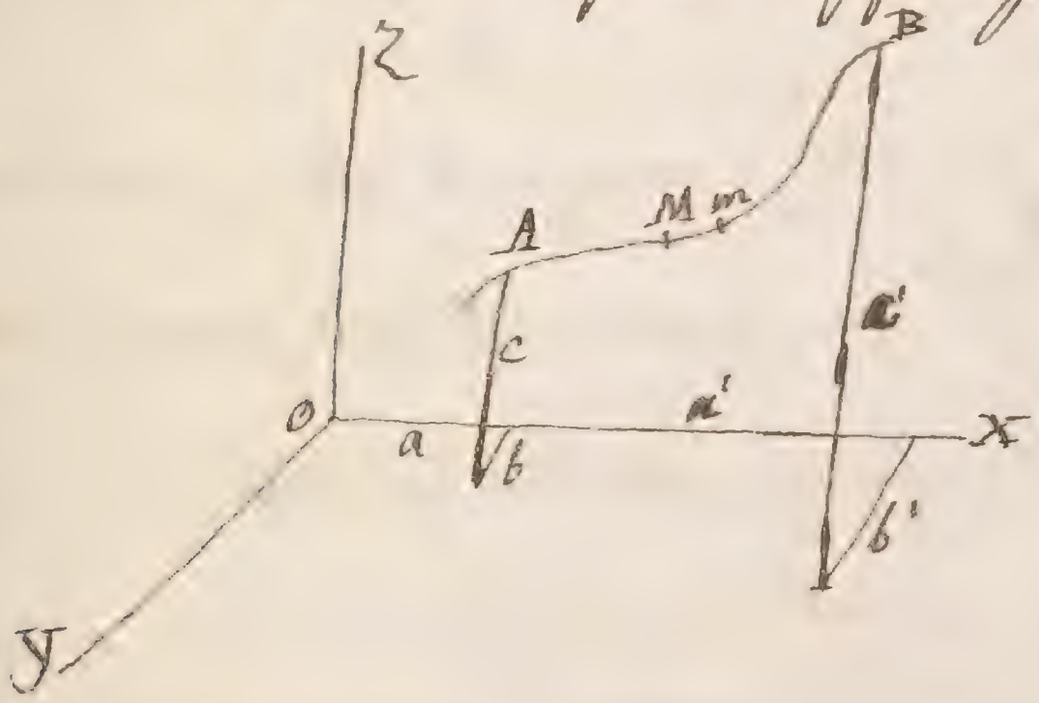
Osservammo di più, che le parti del sistema essendo omogenee, i pesi sono proporzionali ai volumi se si tratta di solidi, od alle aree se si tratta di superficie od alle lunghezze se si tratta di una linea, se in generale si chiama V l'estensione od in solidità od in superficie od in lunghezza si ha

$$X=\frac{\Sigma Vx}{\Sigma V}\ ,\ Y=\frac{\Sigma Vy}{\Sigma V}\ ,\ Z=\frac{\Sigma Vz}{\Sigma V}.$$

Concepiamo diviso il corpo in elementi infinitesimi, sia dV l'estensione di uno di essi, sieno sempre x,y,z le coordinate del centro di gravità di questo elemento, diventeranno, introducendo invece del simbolo Σ, il quale si usa sempre per esprimere una somma finita, il simbolo $\int$,

$$X=\frac{\int x\,dV}{V}\ ,\ Y=\frac{\int y\,dV}{V}\ ,\ Z=\frac{\int z\,dV}{V}\ ;$$ gli integrali, che entrano in queste formole saranno ~~di 1° di 2° od di 3° ordine~~, secondochè dV sarà un elemento di 1°, di 2° od di 3° ordine; in generale l'integrazione va sempre fatta così, che abbracci tutto il sistema.

Facciamo una prima applicazione. Domandasi il centro di gravità d'un'arco di curva AB (sia la curva a semplice, o doppia curvatura) considerato come grave ed omogeneo. Sieno $(a,b,c),(a',b',c')$ le coordinate dei punti A,B, scomponiamo l'arco in elementi, sia Mm uno di essi, sieno x,y,z le coordinate



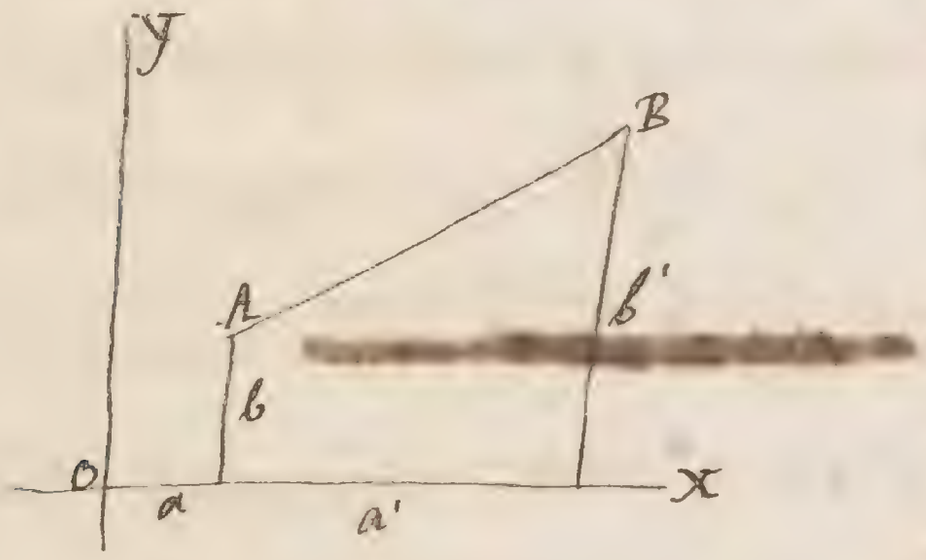
del punto M, possono esse considerarsi scambievolmente come quelle dell'altra estremità m, onde anche prendere per quelle del centro di gravità dell'elemento; sia s l'arco AM indefinito, M m sarà ds, onde il dV delle formole generali in questo caso è ds, il V delle medesime è la lunghezza AB dell'arco, epperò pel caso di un'arco di curva AB le tre formole sono $X=\frac{\int_0^{AB} x\,ds}{AB}$, $y=\frac{\int_0^{AB} y\,ds}{AB}$, $Z=\frac{\int_0^{AB} z\,ds}{AB}$

Secondo la varietà dei casi per eseguire la integrazione fa d'uopo ottenere s, y, z in funzione di x, allora i limiti dell'integrazione sono $x=a$, $x=a'$, oppure tutto in y, od in z, e i limiti sono b, b' oppure c, c'.

Se la curva è piana, allora due formole bastano, perchè si può prendere per piano delle xy il piano in cui è contenuta.

Sia per primo esempio da determinarsi il centro di gravità della retta AB d'una data lunghezza, la sua equazione è

$y-b=\frac{b-b'}{a-a'}(x-a)$, e noi la rappresentiamo per brevità con $y=mx+n$;



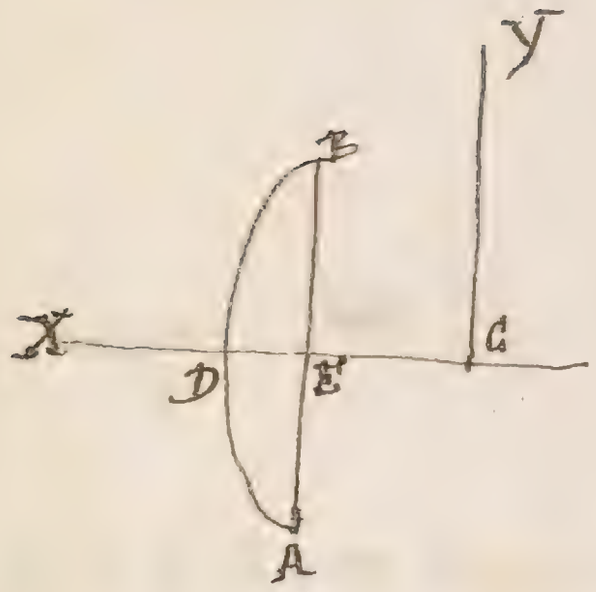
allora $ds=dx\sqrt{1+m^2}$, ed

$\int x\,ds=\sqrt{1+m^2}\int x\,dx=\sqrt{1+m^2}\,\frac{x^2}{2}+\text{cost.}$

onde $X=\frac{\int_a^{a'} x\,ds}{AB}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}\,(a'^2-a^2)}{AB}$, ora $AB=\int_0^{AB} ds=\int_a^{a'} dx\sqrt{1+m^2}=\sqrt{1+m^2}(a'-a)$,

dunque $X=\frac{a+a'}{2}$; considerando l'asse delle y come quello delle x, è evidente, che si troverà $Y=\frac{b+b'}{2}$; ora $\frac{a+a'}{2}$, $\frac{b+b'}{2}$ sono le coordinate del punto di mezzo di AB, dunque, come già si sapeva, il centro di gravità di una retta è al suo punto di mezzo.

Sia per 2° esempio da determinarsi il centro di gravità di un'arco AE di cui sono date le tre coordinate a, b, c, e di cui è data la lunghezza l. Per ragione di simmetria questo centro è sul raggio CD, che lo divide per mezzo, onde pare conveniente di prendere questo raggio per asse delle x.



L'equazione del circolo è $x^2+y^2=r^2$, quindi

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{r\,dx}{y}=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

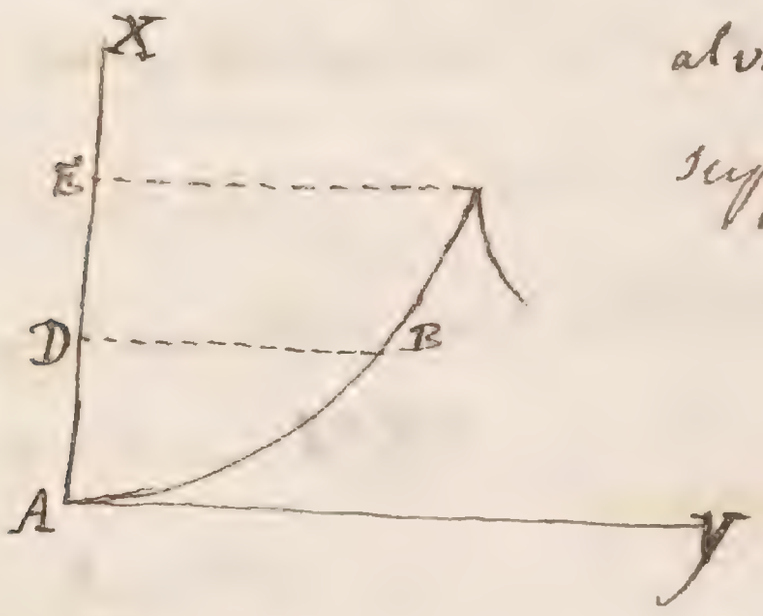
ma siccome questo differenziale è piuttosto complicato vediamo se non riesce meglio ad esprimere tutto per y, in questo caso si ha

$$ds=dy\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{r\,dy}{x},\quad \text{e}\int x\,ds=r\int dy=ry+\text{cost.}$$

onde $\int_{-DB}^{DB} x\,ds=2\int_{0}^{DB} x\,ds=2r\int_{0}^{BE} dy=2r\cdot BE=r\cdot AB=r\times\text{corda}$,

e $X=r\,\frac{\text{corda}}{\text{arco}}$, ciò, che già avevamo dimostrato.

Sia ancora per altro esempio da trovarsi il centro di gravità di un'arco di cicloide AB. Prendendo per asse delle y la tangente al vertice della curva, che in questo caso supponiamo essere A, e per asse delle x la normale nel medesimo punto, l'equazione della cicloide è $s^2=4cx$, in cui s è l'arco,



c il diametro del circolo generatore; allora $ds=2d.\sqrt{cx}=\sqrt{\frac{c}{x}}\,dx$,

onde $\int x\,ds=\int\sqrt{cx}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{c}\;x^{\frac{3}{2}}+\text{Cost.}$, $\int_{0}^{AB} x\,ds=\int_{0}^{AD}\sqrt{cx}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{c}\,(AD)^{\frac{3}{2}}$,

inoltre $AB=2\sqrt{c\cdot AD}$, dunque $X=\frac{\int_0^{AB} x\,ds}{AB}=\frac{1}{3}AD$.

Per avere $\int y\,ds$, e quindi Y, siccome non si ha s espresso per y, non si può esprimere ds per dy, ma bensì dy per dx, partendo dalla equazione $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, donde si ha $dy=\sqrt{ds^2-dx^2}$, bisogna dunque, che cerchiamo di ridurre l'integrazione di $y\,ds$ ad un'altra in cui non vi sia più ds, ma dy, a ciò si perviene facilmente integrando per parti, hassi in tal modo $\int y\,ds=ys-\int s\,dy=ys-\int s\,dx\sqrt{\frac{ds^2}{dx^2}-1}$,

ed $\int_0^{AB} y\,dJ = AB\cdot DB - \int_0^{DB} J\,dx\sqrt{\frac{dJ^2}{dx^2}-1}$, ora $\frac{dJ}{dx} = \sqrt{\frac{c}{x}}$, dunque

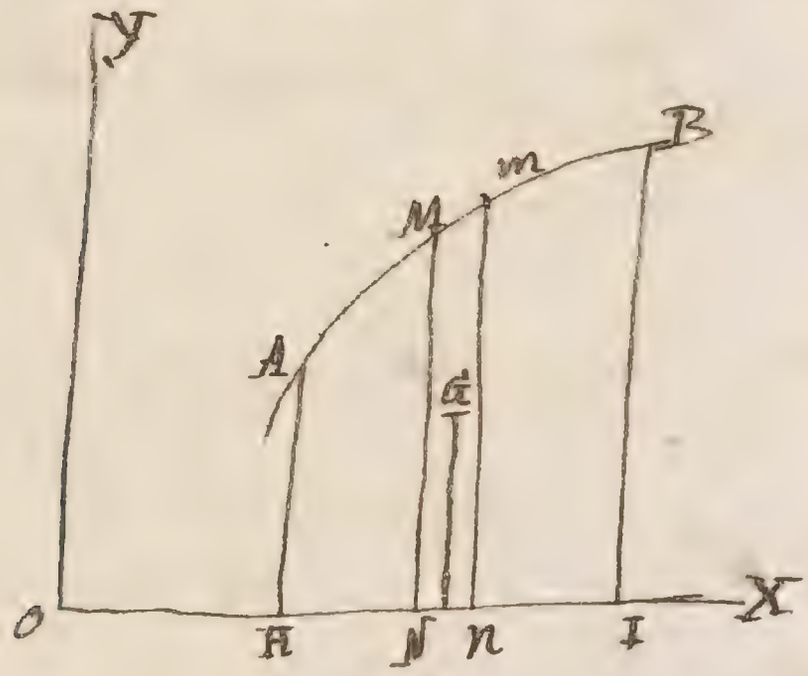
$$\int J\,dx\sqrt{\frac{dJ^2}{dx^2}-1} = \int 2\sqrt{cx}\sqrt{\frac{c}{x}-1}\,dx = 2\sqrt{c}\int\sqrt{c-x}\,dx = \text{cost} - \frac{4}{3}\sqrt{c}\,(c-x)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int_0^{AB} y\,dJ = AB\cdot DB - \frac{4}{3}\sqrt{c}\left[c^{\frac{3}{2}} - (c-AD)^{\frac{3}{2}}\right],$$ e finalmente sostituendo a c-AD la lunghezza DE, e mettendo nel valore di Y questo integrale

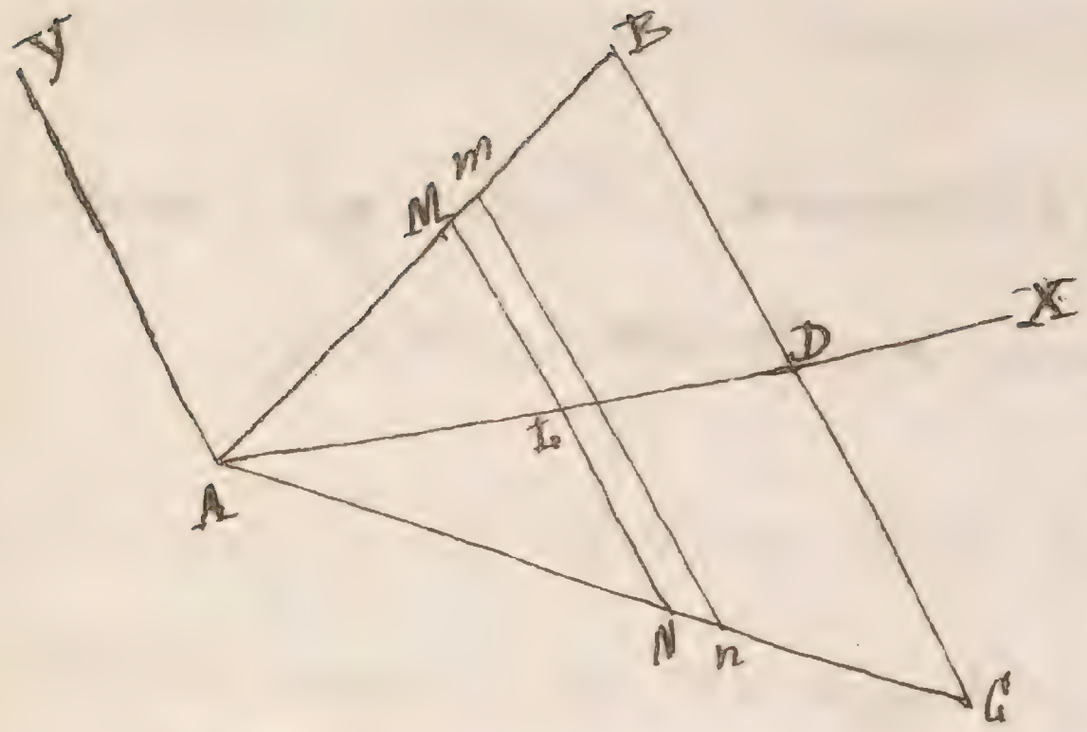
$$Y = DB - \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{c}\left[c^{\frac{3}{2}} - \overline{ED}^{\frac{3}{2}}\right]}{AB} = DB - \frac{2}{3}\cdot\frac{c^{\frac{3}{2}} - \overline{ED}^{\frac{3}{2}}}{AD^{\frac{1}{2}}}.$$

In questo modo si può trovare il centro di gravità di un'arco di curva qualunque, purchè le integrazioni possano effettuarsi, se queste non riescono bisognerà appigliarsi al metodo delle quadrature, od al metodo delle serie.

Se il centro di gravità, che vuolsi determinare è quello di un' area piana, come AMBIH, compresa dall'arco AMB d'una curva data qualunque, dalle ordinate AH, BI, e dall'asse delle x, allora sia Mm un'elemento dell'arco AB, possiamo considerare MNnm come elemento dell'area data, onde dV nel nostro caso sarà l'espressione di questo elemento, siccome Mm possiamo riguardarlo come una linea retta, ~~così l'area~~ e le ordinate MN, mn possiamo considerarle come eguali, così l'area MNnm sarà espressa da ydx. dunque $dV = ydx$, e per conseguenza le coordinate del centro di gravità sono $X = \frac{\int_{OH}^{OI} xy\,dx}{\int_{OH}^{OI} y\,dx}$, $Y = \frac{\int_{OH}^{OI} y^2\,dx}{2\int_{OH}^{OI} y\,dx}$



poichè essendo x, y le coordinate del punto M, le coordinate del centro di gravità dell' elemento saranno $x+\frac{1}{2}dx$, $\frac{1}{2}y$.
Applichiamo queste formole alla ricerca del centro di gravità dell'area triangolare ABC.



Concepiamo diviso il triangolo in elementi, come MNnm, per mezzo di rette parallele al lato BG, questi elementi essendo simmetrici rispetto ad AD, la quale divide per metà il lato BG, il centro di gravità di tutta l'area ABG sarà la detta retta AD.

Prendiamo perciò per asse delle x la retta AD, per asse delle y una parallela a BG tirata pel punto A, (e formate di X, Y, lasciamo ancora le stesse, poichè le coordinate di questo sistema sono proporzionali alle coordinate ortogonali,) la equazione di AB riferito a questi assi sia $y = Kx$, sarà $\int xy\,dx = K\int x^2\,dx = K\frac{x^3}{3} + \text{cost.}$; $\int y\,dx = K\frac{x^2}{2} + \text{cost.}$

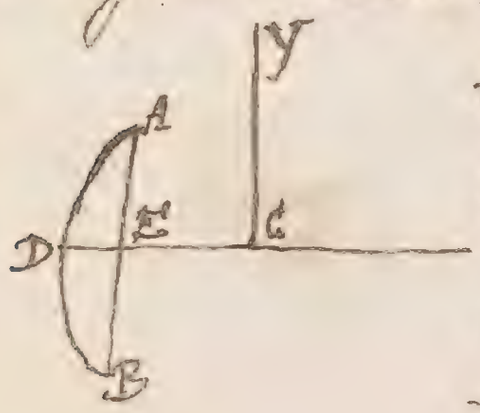
epperciò $X = \dfrac{\int_0^{AD} xy\,dx}{\int_0^{AD} y\,dx} = \dfrac{\frac{K}{3}\overline{AD}^3}{\frac{K}{2}\overline{AD}^2} = \frac{2}{3}AD.$

Cangiando i limiti dell'integrazione hassi il centro di gravità dell'area di un trapezio qualunque con basi parallele, come MNGB, e si ha $X = \dfrac{\int_{AL}^{AD} xy\,dx}{\int_{AL}^{AD} y\,dx} = \dfrac{\frac{K}{3}(\overline{AD}^3 - \overline{AL}^3)}{\frac{K}{2}(\overline{AD}^2 - \overline{AL}^2)} = \frac{2}{3}\cdot\dfrac{\overline{AD}^2 + AD\cdot AL + \overline{AL}^2}{AD + AL}$,

formola la quale si trova coincidere con quella trovata alla pag.a 118, se si introducano in essa le quantità h, p, q della pag.a suddetta, e si faccia la differenza AD − X.

Lezione 23.a

La formola, che abbiamo costrutta $X = \dfrac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$ per la determinazione del centro di gravità di un' area piana simmetrica rispetto all'asse delle x ci permette di determinare il centro di gravità di un segmento circolare ABD. Perciò prendiamo per asse delle x il raggio GD tirato alla metà dell'arco, sul qual raggio si trova il centro richiesto, e prendiamo per origine il centro G, chiamando r il raggio, avremo l'equazione del cerchio $x^2 + y^2 = r^2$,



donde $x\,dx = -y\,dy$, $\int_{GE}^{GD} xy\,dx = -\int_{EA}^{0} y^2\,dy = \int_{0}^{EA} y^2\,dy = \frac{1}{3}\overline{EA}^3 = \frac{1}{24}\overline{AB}^3$,

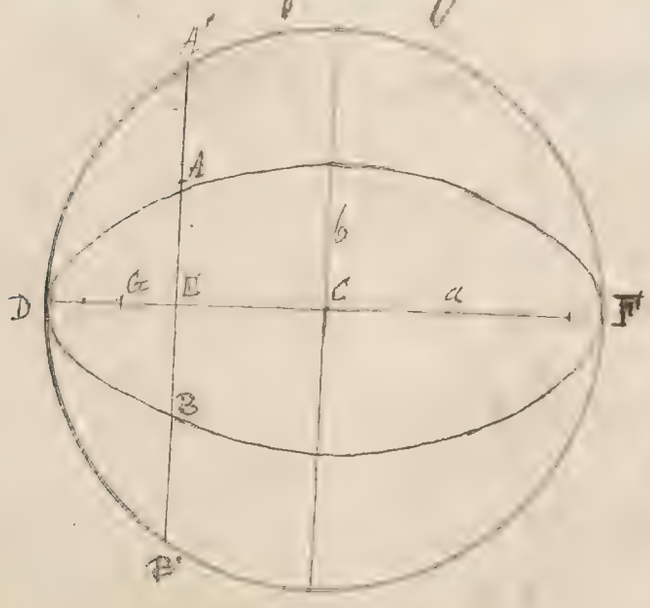
questo integrale perchè comprenda anche il segmento inferiore DEB bisogna, che lo duplichiamo, ora $\int y\,dx$ è precisamente nel nostro caso l'area del segmento ABD. Dunque $X = \frac{\frac{1}{12}\overline{AB}^3}{\text{segmento}}$, come già altra volta si è trovato.

Tenendo un' ordine inverso a quello tenuto altra volta per giungere dalla conoscenza dei centri di gravità del settore, e del triangolo ABC alla conoscenza del centro di gravità del segmento ABD, si ha il centro di gravità del settore CADB.

Se invece di un segmento circolare noi volessimo trovare il centro di gravità di un ~~segmento~~ segmento ellittico compreso tra la curva ellittica, e una parallela ad un'asse, si procederebbe nello stesso modo, ma è inutile questa operazione, se si osservi che il centro di gravità del segmento ellittico ADB coincide col centro di gravità del segmento ~~circolare~~ A'DB' del circolo descritto sopra DF come diametro. Infatti si immagini raccolto sull'ordinata dell'ellisse il peso sparso sull'ordinata del circolo, per essere queste ordinate tra loro come i semiassi della ellisse b, a, cioè per essere E A : E A' :: b : a, ciascuna ordinata sarà caricata proporzionalmente alla sua lunghezza, il centro di gravità di ciascuna doppia ordinata come AB sarà il medesimo dell'ordinata corrispondente del circolo A'B', perciò avremo due sistemi di ~~pesi~~ pesi perfettamente identici, che sono il segmento circolare, ed il segmento ellittico, i quali però avranno comunque il loro centro di gravità.

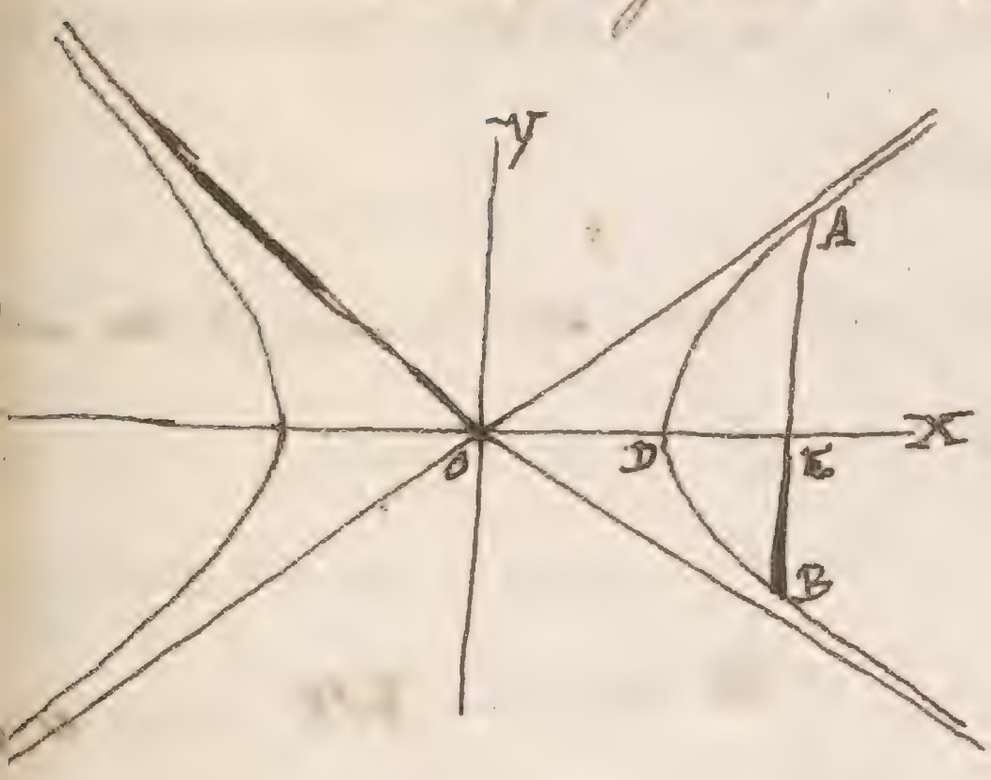
Ciò posto pel segmento circolare $X = \frac{\frac{1}{12}\overline{A'B'}^3}{A'DB'}$, $A'B' = \frac{a}{b}AB$, $A'DB' = \frac{a}{b}ADB$

Dunque pel segmento ellittico $X = \frac{1}{12}\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\overline{AB}^3}{ADB}$.



Facciamo ancora alcuni esempi di queste ricerche di centri di gravità di aree piane.

Centro di gravità di un segmento iperbolico: Sia il segmento ADB,



sia l'iperbole riferita al centro, la sua equazione sarà $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

essa avrà perciò

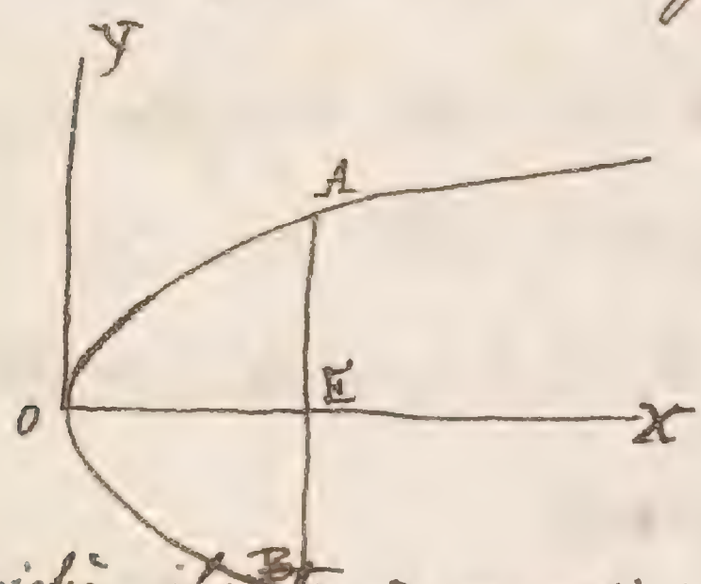
$$\int xy\,dx = \frac{a^2}{b^2}\int y^2\,dy = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3} + Cost.$$

$$\int_a^{OE} xy\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{a^2}{b^2}\,\overline{AE}^3 = \frac{1}{12}\cdot\frac{a^2}{b^2}\,\overline{AB}^3,$$

$$\int_a^{OE} y\,dx = \text{segmento } ADB, \quad \text{donde}$$

$$X = \frac{1}{12}\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\overline{AB}^3}{\text{seg.}^{o}\,ADB}.$$

Centro di gravità di un segmento parabolico.



Sia AOE il segmento, non essendo esso simmetrico rispetto all'asse OX, bisognerà che ci serviamo delle due formole $X = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$, $Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx}$,

poichè il centro di gravità non si trova più sull'asse OX; l'equazione della parabola riferita al vertice è $y^2 = px$, chiamando p il suo parametro,

dunque $\int xy\,dx = \sqrt{p}\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \sqrt{p}\cdot\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}} + Cost.$

$$\int y^2\,dx = p\int x\,dx = p\,\frac{x^2}{2} + Cost. \qquad \int y\,dx = \frac{2}{3}\,xy + Cost.$$

e mettendo i limiti $\int_0^{OE} xy\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{p\cdot OE}\cdot\overline{OE}^2$, $\int_0^{OE} y^2\,dx = \frac{p}{2}\,\overline{OE}^2$,

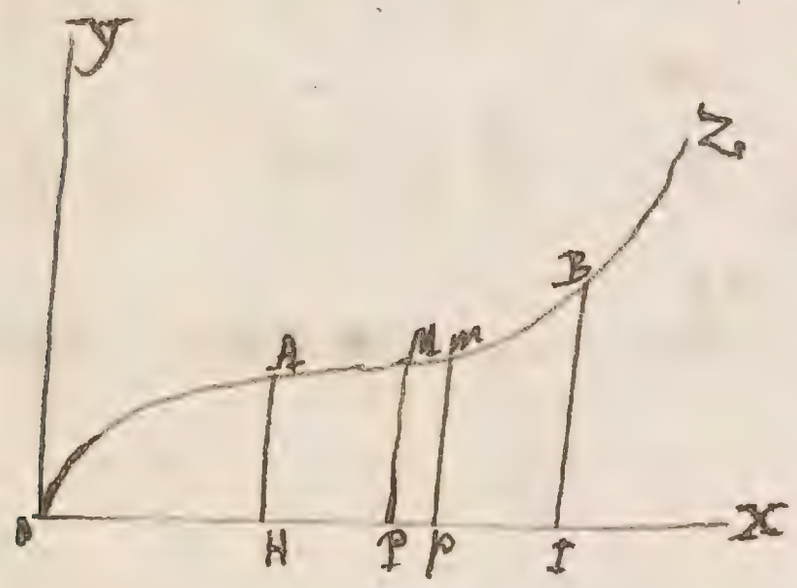
$\int_0^{OE} y\,dx = \frac{2}{3}\,OE\cdot AE = \frac{2}{3}\,OE\cdot\sqrt{p\cdot OE}$, donde finalmente

$$X = \frac{3}{5}\,OE, \quad Y = \frac{3}{8}\sqrt{p\cdot OE} = \frac{3}{8}\,AE.$$

Il valore dell'ascissa X è evidentemente lo stesso che quello dell'ascissa del centro di gravità del segmento totale AOB.

Esposte le formole opportune per l'invenzione dei centri di gravità di archi di curve e di aree piane passiamo a quelle che servono per la determinazione dei centri di gravità delle superficie curve e dei solidi.

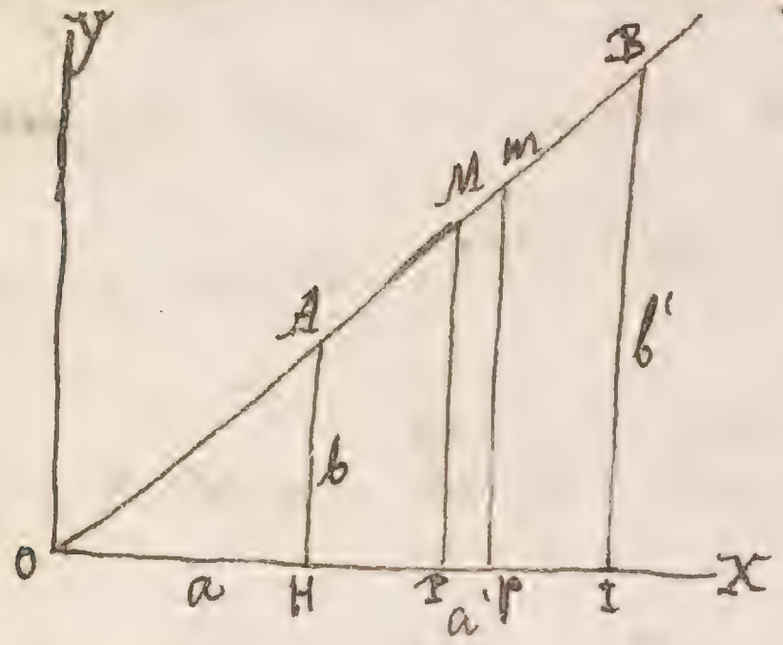
La prima superficie ed primi solidi che si presentano per la semplicità del modo di loro generazione sono le superficie ed i solidi di rivoluzione.



Sia OZ un'arco di curva qualunque situato sul piano YOX, se esso si intenda girare col piano in cui è contenuto attorno all'asse OX, l'arco AB genererà una superficie, e l'area ABIH un solido, cerchiamo le formole che ci determinano il centro di gravità di questa superficie e di questo solido. Siccome tanto l'una, quanto l'altro sono simmetrici rispetto all'asse di rotazione OX, è evidente, che il loro centro di gravità si trova sopra questo asse, ossia $Y=0$, onde basta cercare X.

La formola generale, che da il valore di X è $X=\frac{\int x\,dV}{\int dV}$, in cui dV è l'estensione dell'elemento della superficie o del solido, nel nostro caso le supponiamo diviso l'arco AB in parti infinitesime Mm, e l'area ABIH in parti rettangolari MmpP, si può prendere per elemento di superficie la superficie generata dall'arco Mm, che per essere Mm infinitesimo è sensibilmente cilindrica, e per elemento di solido il solido generato dal rettangolo MmpP, onde per quello, chiamando ds l'arco Mm si avrà $dV=2\pi y\,ds$, per questo $dV=\pi y^2 dx$, ed ponendo invece di dV successivamente questi valori si avrà pel caso della superficie $X=\frac{\int x\cdot 2\pi y\,ds}{\int 2\pi y\,ds}=\frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$, pel caso del solido $X=\frac{\pi\int xy^2dx}{\pi\int y^2dx}=\frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}$.

Facciamo qualche applicazione di queste formole.



Sia da trovarsi il centro di gravità della superficie conica, e del tronco di cono generato dalla retta AB rotante intorno ad OX;

sia $y=mx$ l'equazione di OB, darà $ds=dx\sqrt{1+m^2}$, epperò

$\int xy\,ds = m\sqrt{1+m^2}\int x^2dx = m\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{1}{3}x^3+$ Costt. $\int y\,ds = m\sqrt{1+m^2}\int x\,dx = m\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{1}{2}x^2+$ costt.

e dechiamiamo a, a' le coordinate dei punti A, B. ponendo i limiti avremo

$\int_{OA}^{OB} xy\,ds = \frac{1}{3}m\sqrt{1+m^2}(a'^3-a^3)$, $\int_{OA}^{OB} y\,ds = \frac{1}{2}m\sqrt{1+m^2}(a'^2-a^2)$, donde per la superficie del cono tronco l'ascissa del centro di gravità risulta

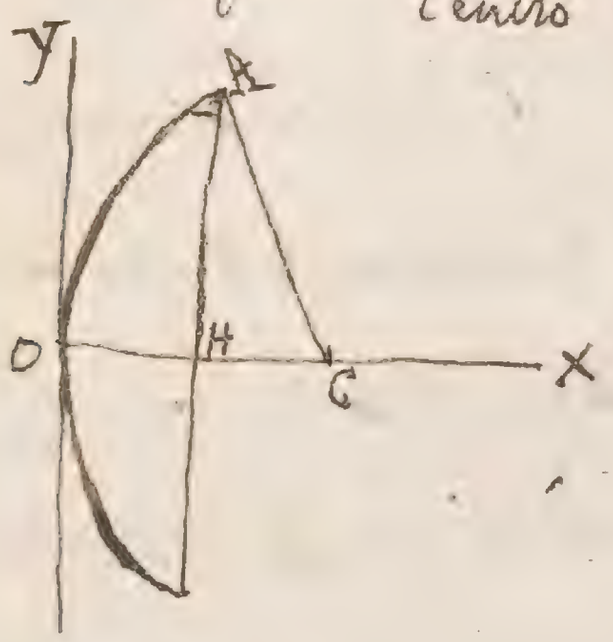
$$X=\frac{2}{3}\cdot\frac{a'^3-a^3}{a'^2-a^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a'^2+aa'+a^2}{a+a'}.$$

Per avere il centro di gravità del cono tronco troviamo, che

$\int_a^{a'} xy^2dx = \frac{m^2}{4}(a'^4-a^4)$, $\int_a^{a'} y^2dx = \frac{m^2}{3}(a'^3-a^3)$, e conchiudiamo,

che l'ascissa $X=\frac{3}{4}\cdot\frac{a'^3+a'^2a+a'a^2+a^3}{a'^2+aa'+a^2}$;

se in queste formole si suppone [redacted] $a=0$, si ha l'ascissa del centro di gravità di una superficie conica di altezza a $X=\frac{2}{3}a$, e l'ascissa del centro di gravità di un cono di altezza a $X=\frac{3}{4}a$, come già la Geometria ci aveva insegnato.



Centro di gravità di una calotta sferica e di un segmento sferico.

Sia OA l'arco generatore della [redacted] calotta, ossia l'area OHA la generatrice del segmento sferico, chiamando a il raggio, l'equazione del circolo riferito al vertice è $y^2=2ax-x^2$; senza formare

il ds percorso della differenziazione divede, che esso è ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui un cateto è dx, ed i cui lati sono perpendicolari ai lati del triangolo AHG, e che perciò $ds = \frac{a\,dx}{y}$, e quindi per la calotta

$$\int_0^{OA} x\,y\,ds = a\int_0^{OH} x\,dx = \frac{a}{2}\overline{OH}^2, \qquad \int_0^{OA} y\,ds = a\int_0^{OH} dx = a\cdot\overline{OH}, \quad X = \frac{1}{2}\overline{OH} = \frac{1}{2}\text{saetta}.$$

Pel segmento sferico $\int_0^x xy^2\,dx = 2a\int_0^x x^2\,dx - \int_0^x x^3\,dx = \frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$,

chiamando x la saetta

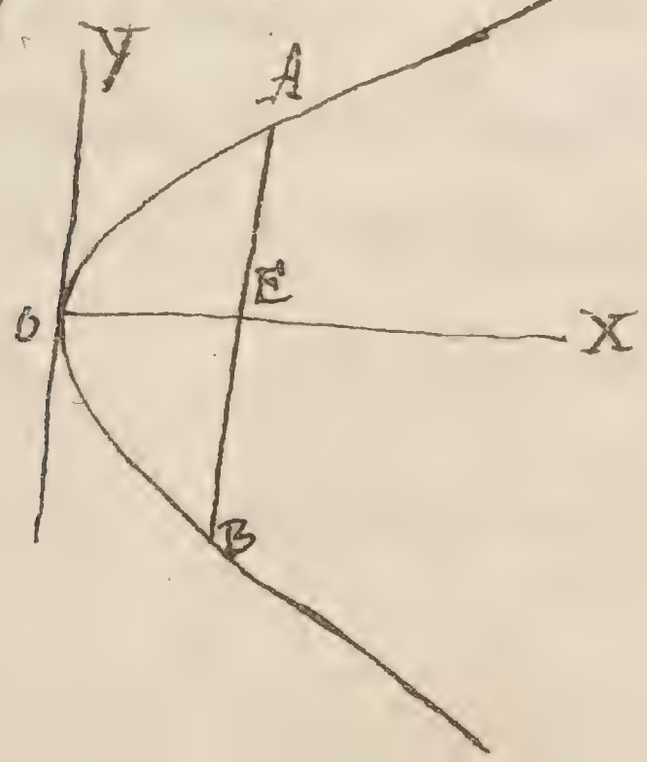
$$\int_0^x y^2\,dx = 2a\int_0^x x\,dx - \int_0^x x^2\,dx = ax^2 - \frac{x^3}{3}, \text{ e quindi}$$

$$X = \frac{\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}x}{a - \frac{x}{3}}\,x = \frac{8a-3x}{12a-4x}\cdot x.$$

Tenendo una via inversa a quella tenuta altra volta per giungere al centro di gravità del segmento, si può ora avere il centro di gravità del settore sferico generato dal settore circolare CAO.

Il medesimo valore $X = \frac{8a-3x}{12a-4x}\cdot x$ che da l'ascissa del centro di gravità d'un segmento sferico a partire dal vertice del medesimo sul diametro è quello della ascissa del centro di gravità del segmento di elissoide di rivoluzione, poichè il numeratore ed il denominatore dell'ascissa X del centro di gravità di questo avendo comune il fattore $\frac{b^2}{a^2}$, dopo tolto questo fattore si riducono al numeratore e denominatore dell'ascissa X del centro di gravità del segmento sferico.

Centro di gravità di un segmento di iperboloida di rivoluzione attorno al suo asse reale.



L'equazione dell'iperbole riferita al vertice è $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, il segmento essendo diametrico rispetto all'asse di rotazione OX, ha il suo centro di gra-

-vità su quest'asse, ~~il grado~~ e viene determinato dalla formula

$$X = \frac{\int_0^x x y^2 dx}{\int_0^x y^2 dx} \text{ ; ora } \int_0^x x y^2 dx = \frac{b^2}{a^2}\int_0^x (2ax^2 + x^3) dx = \frac{b^2}{a^2}\left\{2a\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right\}$$

$$\int_0^x y^2 dx = \frac{b^2}{a^2}\left\{2a\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right\}, \text{ dunque}$$

$$X = \frac{\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}x}{a + \frac{1}{3}x} \cdot x = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} \cdot x.$$

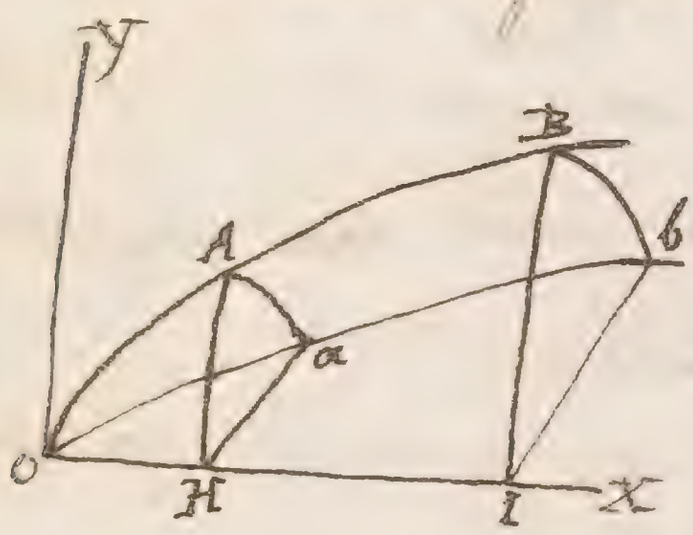
si osservi, che $\frac{8a+3x}{12a+4x}x = \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{12(3a+x)} = \frac{3}{4}x - \frac{ax}{12a+4x}$,

(questi risultati si arriva eseguendo la divisione di $8a+3x$ per $12a+4x$ in due modi, prima rispetto ad a, quindi rispetto ad x), e divide evidentemente, che X giace sempre compreso tra $\frac{2}{3}x$, e $\frac{3}{4}x$.

Le formole $X = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx}$, $Y = \frac{\frac{2}{3}\int y^3 dx}{\int y^2 dx}$, e le formole

$$X = \frac{\int x y d1}{\int y d1}, \quad Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 d1}{\int y d1},$$

si applicano alla ricerca del centro di gravità di un settore di solido, o di un segmento di superficie di rivoluzione fatto da piani meridiani, ossia che passano per l'asse, e che formano [illegible] angolo qualsiasi. Infatti il settore possiamo immaginarlo generato dall'area ABIH rotante

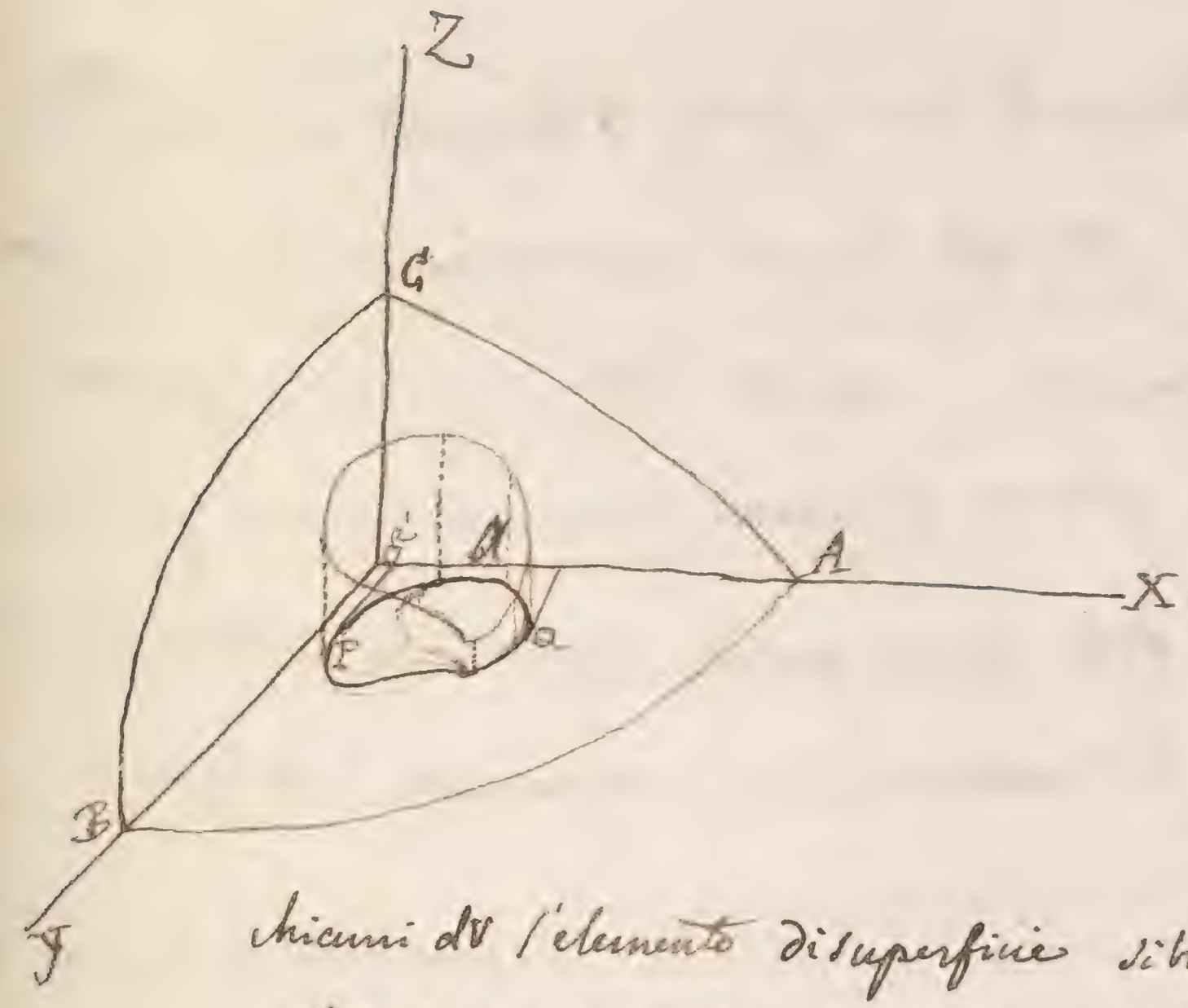


intorno ad OX nel tempo, in cui i punti A,B hanno descritti due archi di un numero L di gradi, ed il segmento di superficie come generato nello stesso movimento dall'arco AB, allora si vede, che il settore

ed il segmento superficiale stanno al solido ed alla superficie generati da una rivoluzione intiera dell'area ABIH, e dell'arco AB intorno all'asse, come $\alpha : 360$, e che però per avere l'elemento dV nel nostro caso basta moltiplicare l'elemento dV di tutto il solido, o di tutta la superficie generati dall'area ABIH, e dall'arco AB per $\frac{\alpha}{360}$; questo fattore dovendosi introdurre nei due termini numeratore e denominatore di X, Y, si può sopprimere come fattor comune, le formole dunque rimangon le stesse; se non che prima $Y = z = 0$, poichè i solidi e le superficie erano simmetrici rispetto ad OX, ora non è più zero; inoltre perchè non dover introdurre anche z bisogna in questi casi prendere per piano delle xy il piano, che divide per metà l'angolo dei piani meridiani racchiudenti il solido, o la superficie, poichè questi sono simmetrici rispetto a tal piano.

Dando uno sguardo alle cose precedenti si vede, che finora non abbiam trovati che i centri di gravità di superficie e di solidi particolarissimi, cosicchè il problema generale di rinvenire il centro di gravità di una porzione di superficie curva qualunque, o di solido qualunque non si è ancora risoluto accingiamoci pertanto a risolvere ora questo problema, stabilendo le formole generali dei valori delle coordinate X, Y, z del centro di gravità, per cui questo si possa tosto determinare quando sono conosciute le dimensioni e la forma della superficie o del solido.

Il problema rispetto alla superficie si può enunciare così nel modo il più generale; È data una superficie curva qualunque, su di essa comunque si descrive una curva chiusa, chiedesi il centro di gravità della porzione di superficie, che resta racchiusa.



Sia data la superficie per mezzo della sua equazione $z=f(x,y)$ rispetto ai 3 assi OX, OY, OZ, rappresentino le curve AB, BC, CA le tracce di questa superficie sui piani coordinati. Se si chiami dV l'elemento di superficie sia ha per le coordinate del centro di gravità della proposta porzione di superficie

$$X=\frac{\int x\,dV}{\int dV}\,,\quad Y=\frac{\int y\,dV}{\int dV}\,,\quad Z=\frac{\int z\,dV}{\int dV}\,;$$

di questo centro sia determinata [illegible] te formole, quando le aree [illegible] proprietà alle superficie curve, ma è evidente che basterà [illegible] per analogia le altre due, supposta [illegible] $\frac{\int z\,dV}{\int dV}$. sia che il primo elemento superficiale [illegible] $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, onde se si chiamino p,q i coefficienti differenziali parziali $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ si ha $dV=dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$, e quindi $X=\dfrac{\int x\,dx\int dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\int dx\int dy\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

Le integrazioni indicate in questa formola vanno eseguite tra i limiti della curva del contorno della porzione di superficie, di cui vogliamo il centro di gravità; sia dato questo contorno per l'equazione $y=\varphi(x)$ della sua projezione sul piano delle xy, ad ogni ascissa corrispondendo due valori di y, la funzione $\varphi(x)$ dovrà essere tale, che dando un valore ad x, se ne abbiano due per $\varphi(x)$, ossia dovrà contenere dei radicali di indice pari, siano $\begin{cases} y_1=\varphi_1(x) \\ y_2=\varphi_2(x) \end{cases}$ i due valori di y corrispondenti allo stesso valore di x,

esiano a. A le ascisse dei punti P, Q, per cui le tangenti all'curva ~~$f(x,y)=0$~~ $y=\varphi(x)$ sono parallele all'asse OY, per queste tangenti immaginando due piani paralle al piano yz, essi segneranno i limiti della porzione di superficie data ~~rispetto~~ ad nel senso delle x, bisognerà dunque integrare prima rispetto ad y tra i limiti $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, quindi rispetto ad x tra i limiti a, a' onde la formola, che dà il valore di X è precisamente la seguente

$$X=\frac{\int_{a'}^{a} x\,dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}}{\int_{a'}^{a} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

, donde per analogia si hanno i valori

$$Y=\frac{\int_{a'}^{a} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} y\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}}{\int_{a'}^{a} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$Z=\frac{\int_{a'}^{a} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} z\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}}{\int_{a'}^{a} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Quanto ai solidi non ti ha che a mettere nelle formole $X=\frac{\int x\,dV}{\int dV}$, $Y=\frac{\int y\,dV}{\int dV}$, $Z=\frac{\int z\,dV}{\int dV}$ invece di dV l'elemento di volume dx dy dz, e si hanno le formole

$$X=\frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz},\quad Y=\frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz},\quad Z=\frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}.$$

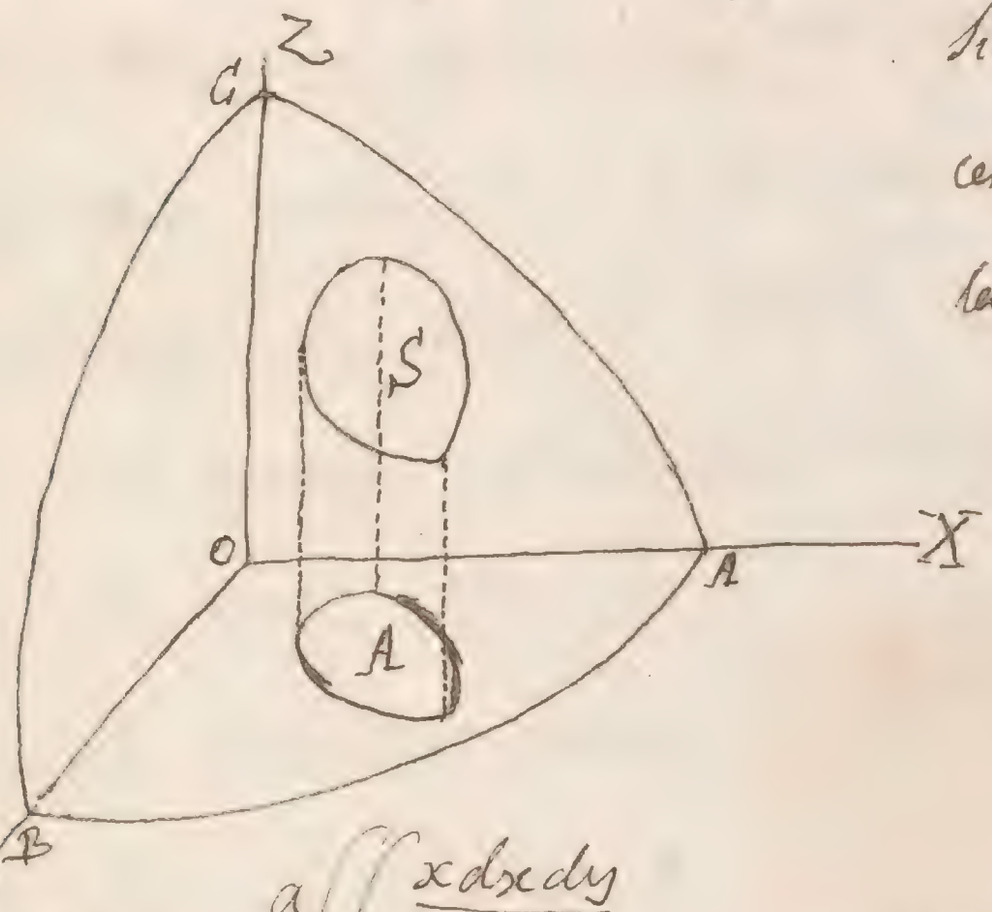
Volendo con queste formole avere il centro di gravità di un ~~solido~~ particolare bisogna eseguire le integrazioni fra i limiti di questo solido; cioè supponiamo, che si voglia determinare il centro di gravità della porzione del cilindro proiettante la curva data sulla superficie precedente compresa tra il piano delle xy e la medesima superficie, si comincierà ad integrare rispetto a z tra i limiti zero, e $f(x,y)$, onde risultano le formole $X=\frac{\iint z\,x\,dx\,dy}{\iint z\,dx\,dy}$, $Y=\frac{\iint z\,y\,dx\,dy}{\iint z\,dx\,dy}$, $Z=\frac{\frac{1}{2}\iint z^2\,dx\,dy}{\iint z\,dx\,dy}$, si integrerà quindi

rispetto ad x e ad y tra gli stessi limiti che nel problema precedente.

Lezione 24.ª

Applichiamo le formole stabilite nella lezione ~~antecedente~~ alla determinazione di qualche centro di gravità.

Centro di gravità di una porzione di superficie sferica diuja da una curva descritta sopra la medesima.



Sia la superficie sferica riferita al centro, e a sia il suo raggio, la sua equazione sarà $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Da questa equazione si ha

$$p=-\frac{x}{z}\ ,\ q=-\frac{y}{z}\ ,$$

e quindi $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{z}$,

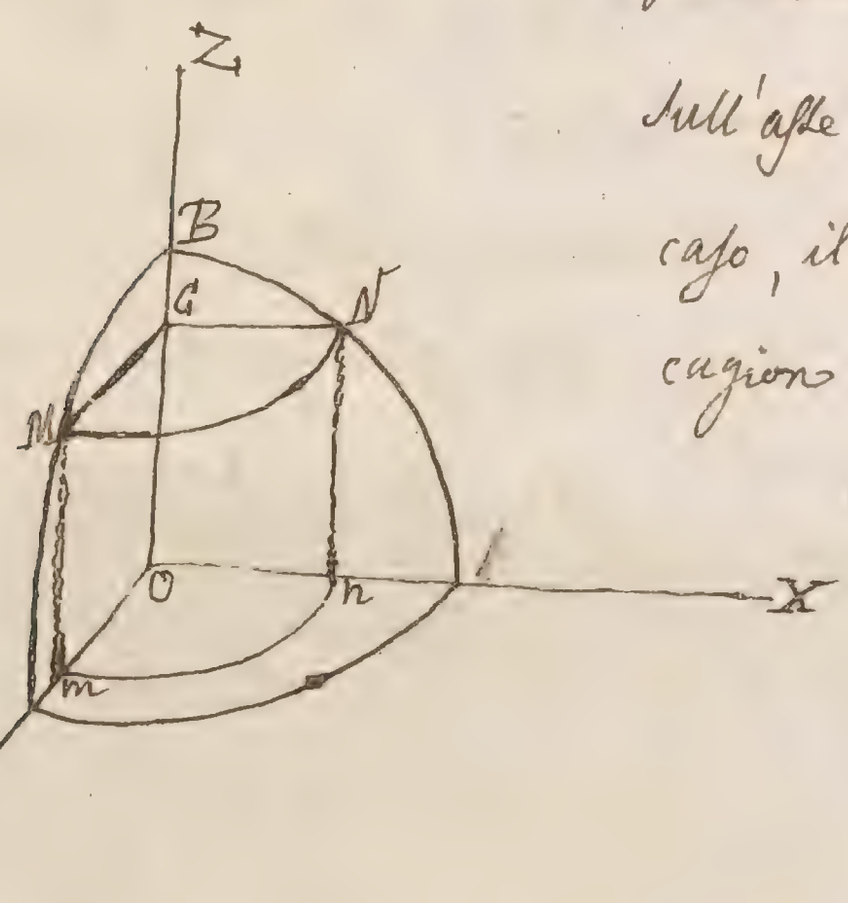
$$x=\frac{a\iint\frac{x\,dx\,dy}{z}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad y=\frac{a\iint\frac{y\,dx\,dy}{z}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,$$

$$z=\frac{a\iint dx\,dy}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ;$$

noi non abbiamo introdotto nel denominatore comune il valore di $\sqrt{1+p^2+q^2}$, poichè tal denominatore esprime, se si attribuiscano i limiti convenienti agli integrali indicati, l'estensione S della porzione di superficie sferica in questione, inoltre il doppio integrale $\iint dx\,dy$ contenuto nel numeratore di z non preso fra i limiti convenienti esprime l'area A della projezione di S, di più dunque scrivere $z=\frac{aA}{S}$. Da questa proporzione risulta $z:a::A:S$, il piano delle xy potendosi prendere arbitrariamente, purchè passi sempre pel centro, la proporzione antecedente conduce al seguente teorema,

La distanza del centro di gravità di una porzione di superficie sferica ad un piano condotto pel centro sta al raggio della sfera come la proiezione sul piano di quella porzione di superficie sferica sta alla porzione stessa; quindi ne deriva, che, chiamando A' A'' le proiezioni di S sui piani delle xz, e delle yz, $X = a\frac{A''}{S}$, $Y = a\frac{A'}{S}$, $Z = a\frac{A}{S}$.

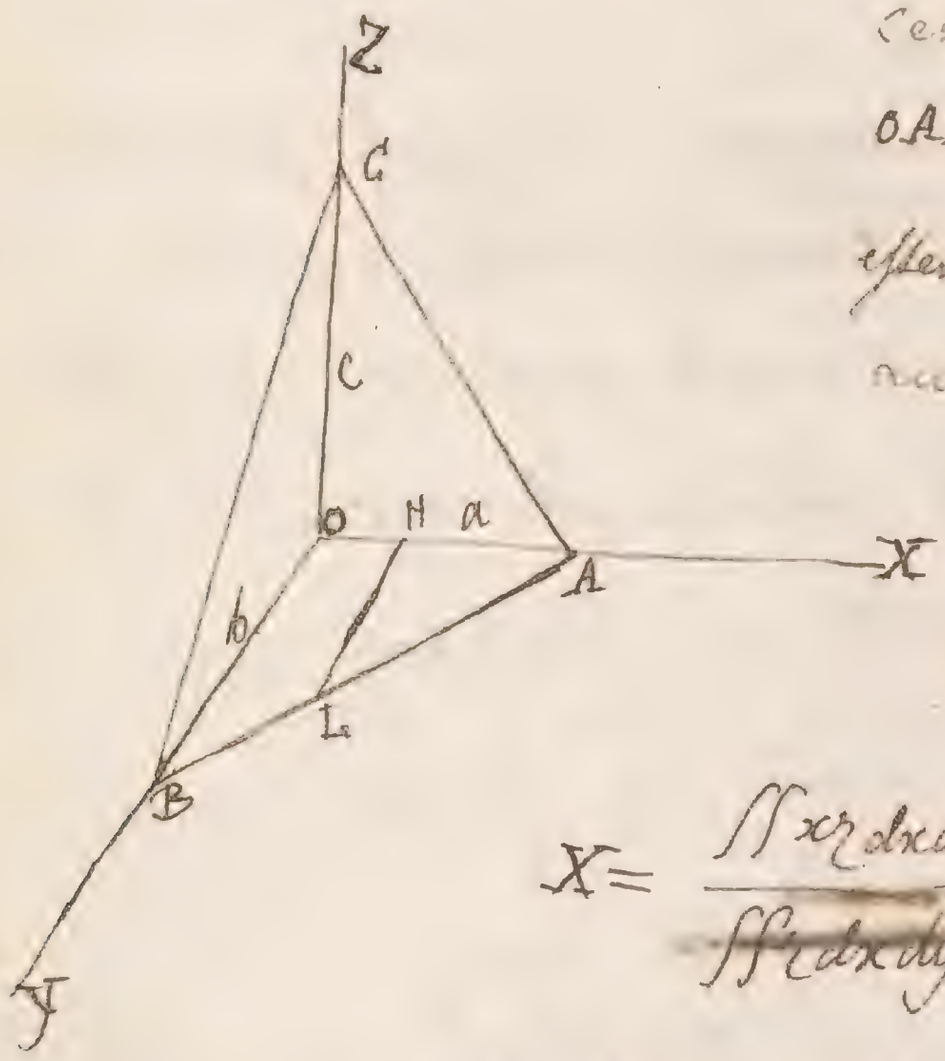
Il problema proposto è così ridotto, tutta la difficoltà consiste nel determinare le aree A, A', A'', S.



Prendiamo per esempio una calotta il cui vertice è sull'asse delle z in B, e la cui saetta è $B\acute{G}$, in questo caso, il centro di gravità essendo sull'asse delle z per cagion di simmetria, possiamo tener conto della sola Z; ora la superficie della calotta è eguale al prodotto del circolo massimo per la saetta, dunque $S = 2\pi a \cdot B\acute{G}$, A non è altro, che il circolo base della calotta, dunque $A = \pi \cdot \overline{G'M}^2$, ma $\overline{G'M}^2 = 2a \cdot B\acute{G} - \overline{BC}^2$, dunque $A = \pi B\acute{G}(2a - B\acute{G})$, e $Z = a\,\frac{\pi B\acute{G}(2a - B\acute{G})}{2\pi a \cdot B\acute{G}} = \frac{2a - B\acute{G}}{2} = a - \frac{B\acute{G}}{2}$.

La proprietà del centro di gravità di una porzione di superficie sferica veduta più sopra risulta dacchè $\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{z}$, ora $\sqrt{1+p^2+q^2}$ è eguale all'unità divisa pel coseno dell'angolo che fa il piano tangente col piano delle xy, (quest'angolo lo dichiarai) si ha dunque $\cos(\gamma) = \frac{z}{a}$; ciò si vede evidentemente senza formare p, q osservando, che il piano tangente è perpendicolare al raggio tirato al punto di tangenza. Il cilindro circolare gode anche di questa proprietà [redacted], che $\cos(\gamma) = \frac{z}{a}$, giacchè il piano delle xy passi per l'asse, dunque la sola superficie di un cilindro circolare si deserive una curva qualunque, e per l'asse si fa passare un piano, la

distanza del centro di gravità della superficie intercetta sulla superficie cilindrica dal piano sta al raggio del cilindro, come la proiezione della superficie intercetta sopra piano sta alla superficie stessa. Non abbiamo sottanto le superficie sferiche e le cilindriche circolari, che godano della proprietà $\omega(\delta) = \frac{2}{a}$, ve ha una infinità di superficie, che ne godono anche, e sono tutte le superficie delle canali generate da una sfera, il cui centro si muove percorrendo una linea curva, ma ne godono sottanto rispetto al piano, che contiene la curva direttrice.



Centro di gravità della piramide OABC. L'equazione della base di questa piramide, essendo a, b, c le distanze OA, OB, OC dai assi ove essa incontra gli assi, è $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, le formole generali, che danno le coordinate del centro di gravità di un solido sono

$$X = \frac{\iint x z\, dx dy}{\iint z\, dx dy} \quad Y = \frac{\iint y z\, dx dy}{\iint z\, dx dy} \quad Z = \frac{\frac{1}{2}\iint z^2 dx dy}{\iint z\, dx dy},$$

nel nostro caso $\iint z\, dx dy$, ossia $\iiint dx dy dz$ esprime il volume della piramide, questo evidentemente è $= \frac{1}{6} abc$, dunque

$$X = 6\frac{\iint x z\, dx dy}{abc} \quad Y = 6\frac{\iint y z\, dx dy}{abc} \quad Z = \frac{3\iint z^2 dx dy}{abc};$$

le integrazioni indicate in queste formole vanno eseguite primieramente rispetto ad y fra i limiti 0, $b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, quindi rispetto ad x fra i limiti $0, a$. Eseguendo hassi

$$\iint x z\, dx dy = c\int_0^a x\, dx \int_0^{y} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy = c\int_0^a x\, dx \left[y\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{y^2}{2b}\right] = \frac{1}{2}bc\int_0^a \left[x\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}bc\left[\frac{a^2}{2} - \frac{2a^3}{3a} + \frac{a^4}{4a^2}\right] = \frac{1}{24}a^2 bc, \quad X = \frac{1}{4}a;$$

$$\iint y^2\,dx\,dy = c\int_0^a dx \int_0^y y\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy = c\int_0^a dx\left[\frac{y^2}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{y^3}{3b}\right]$$

$$= c\int_0^a dx\cdot b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}b^2c\left[-\frac{a}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4+\frac{a}{4}\right] = \frac{1}{24}ab^2c.$$

$$y=\frac{1}{4}b;\quad \iint z^2\,dx\,dy = c^2\int_0^a dx\int_0^y\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2 dy = -\frac{bc^2}{3}\int_0^a dx\left[1-\frac{x}{a}\right]^3$$

$$= \frac{abc^2}{12},\quad z=\frac{1}{4}c.$$

Dunque le coordinate del centro di gravità della piramide sono $X=\frac{1}{4}a,\ y=\frac{1}{4}b,\ z=\frac{1}{4}c$. In questo caso però i spigoli concorrenti nel vertice erano perpendicolari fra di loro.

Finora abbiam supposti i corpi omogenei, dei quali in natura non ve ne ha. Proponiamoci ora il problema di trovare il centro di gravità di un corpo di figura qualunque, ma eterogeneo. Questo problema distantissimo dal primo è subito risolto moltiplicando nelle formole risolventi il primo le espressioni differenziali contenute sotto i segni integrali per la densità ρ, che sia una funzione $\varphi(x,y,z)$; dunque le coordinate del centro di gravità di un corpo eterogeneo, ~~[illegible]~~, sono

$$X=\frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz\cdot\rho}{\iiint dx\,dy\,dz\cdot\rho},\quad y=\frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz\cdot\rho}{\iiint dx\,dy\,dz\cdot\rho},\quad z=\frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz\cdot\rho}{\iiint dx\,dy\,dz\cdot\rho}.$$

Similmente abbiam supposte sempre le superficie e le linee caricate uniformemente di pesi, se non lo fossero, ~~and~~ e se la spessezza dello strato pesante, che le copre variasse in ciascun punto con una certa legge, che fosse espressa dalla relazione $u=\varphi(x,y,z)$, in cui u indicasse la spessezza, si avrebbero anche in questo caso le coordinate del centro di gravità moltiplicando nelle formole, che risolvono il problema, quando le superficie o le linee sono uniformemente caricate, le espressioni differenziali per u, dunque le formole, che danno le coordinate del centro

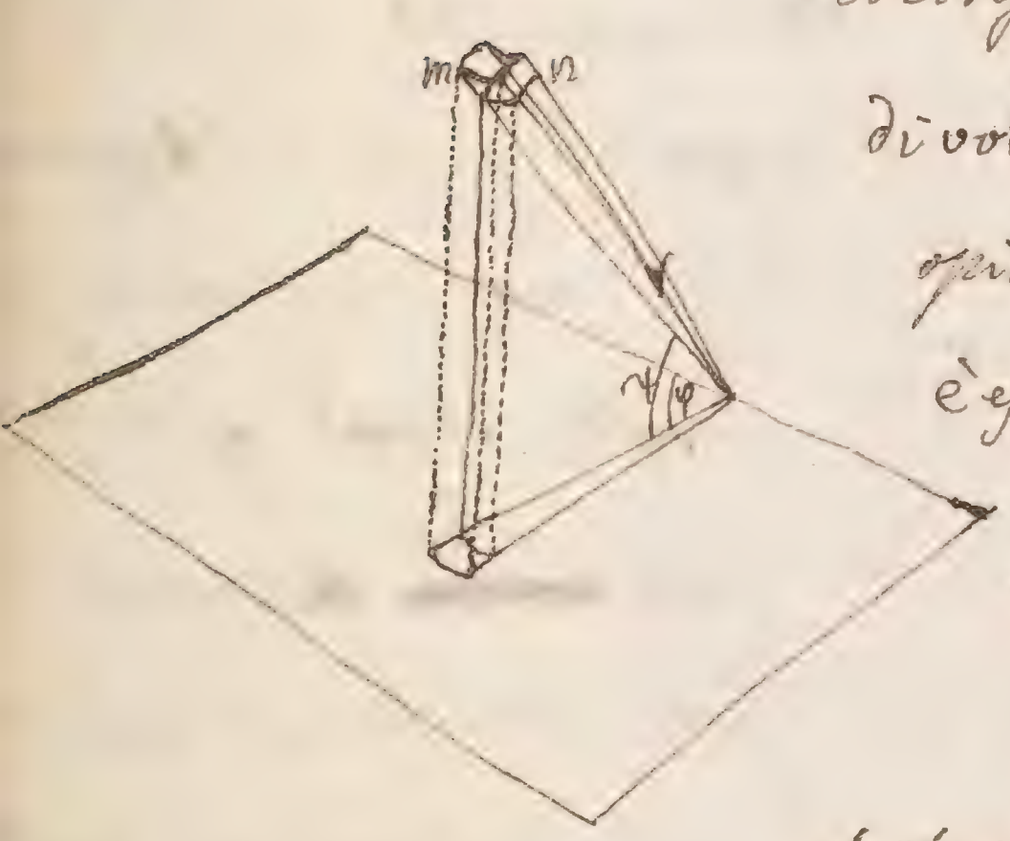
di gravità di una linea qualunque non uniformemente carica di peso sono $X = \frac{\int x\,ds.u}{\int ds.u}$, $Y = \frac{\int y\,ds.u}{\int ds.u}$, $Z = \frac{\int z\,ds.u}{\int ds.u}$,

e le formole per una superficie non uniformemente carica di peso sono $X = \frac{\iint x\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}\,.u}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}\,.u}$, $Y = \frac{\iint y\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}\,.u}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}\,.u}$,

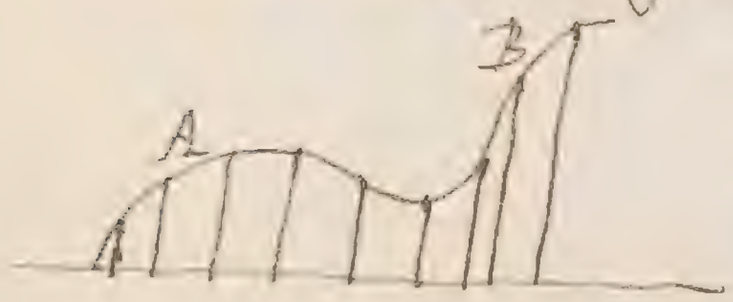
$Z = \frac{\iint z\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}\,.u}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}\,.u}$.

In molti casi è molto più commodo riferire le formole a coordinate polari, anzi alle volte si scioglie il problema in questo modo mentre non si può sciogliere lasciando le coordinate rettangolari.

Nel sistema delle coordinate φ, ψ, r, l'elemento di volume è mn espresso da $r^2 d\varphi\, d\psi \cos\psi . dr$, ossia $r^2 dr.d\varphi.d\psi.\cos\psi$, e l'elemento di sup.e è espresso da $r^2 d\varphi.d\psi.\cos\psi$.

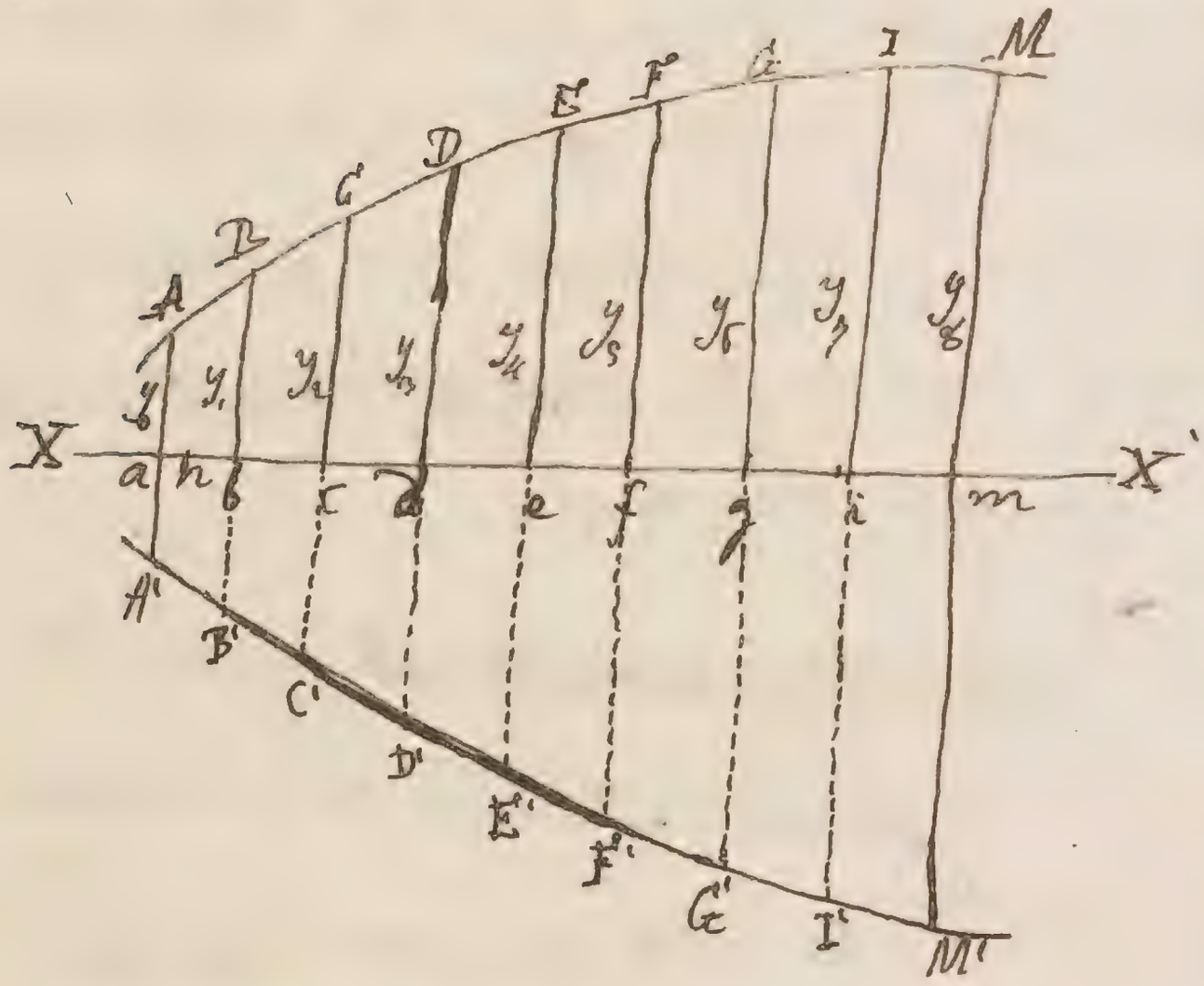


Le formole generali stabilite per la determinazione dei centri di gravità ci sembrano bastanti per poter subito determinare il centro di gravità di una superficie o di un solido qualunque, ma ci ingannieremo; vi ha una infinità di casi, che sfuggono a questi metodi quantunque generali, e sono i casi in cui le equazioni delle curve e delle superficie non si hanno; allora si può trovare l'equazione della curva o della superficie colle formole di interpolazione, oppure si può considerare, se per es.e si abbia da trovare il centro di gravità di un'area piana, la curva AB come divisa in parti rettilinee, e l'area come divisa in trapezii, o la curva AB come completata da archi parabolici, se si vuole maggior esattezza.



Lezione 28.ª

Per costruire le formole approssimative delle coordinate dei centri di gravità delle linee, delle superficie dei solidi, quando non si hanno le equazioni delle linee, delle superficie che racchiudono i solidi, e delle curve che racchiudono superficie, cominciando dalle linee, esse si dividono in tante parti da poterle considerare come rette, o archi di circolo, si determinano i centri di gravità di queste parti, e se ne trova colle formole già stabilite il centro comune di gravità; Passando alle aree, per agevolare supponiamo, che sia da trovarsi il centro di gravità dell'area AA'M'M simmetrica rispetto alla retta XX',



tal centro a cagione della simmetria sarà sopra XX', sia X la distanza di esso dal punto a, supponiamo divisa am in un numero qualsivoglia di parti eguali, purchè questo numero sia pari, e sia h una di queste parti innalzando da ciascun punto di divisione le perpendicolari AA', bB', etc, nel nostro caso sono otto, l'area AA'M'M sarà divisa nelle aree minori AabB, etc, e l'area totale nelle aree AA'B'B, etc, per avere X abbiamo la formola $X = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}$, in cui nel nostro caso p è proporzionale all'area AA'B'B, a per cagion di simmetria proporzionale anche all'area AabB, in questa formola possiamo dunque considerare p come esprimente l'area AabB. Occupiamoci pertanto della determinazione delle aree AabB, etc.

Considerando gli archi AB, Bb, etc come rettilinei, le aree corrispondenti sono trapezii, che, se si chiamino y_0, y_1, y_2, etc, le perpendicolari ~~Bb, &c~~ Aa, Bb, Cc, etc, sono espresse dai prodotti $h\frac{y_0+y_1}{2}$, $h\frac{y_1+y_2}{2}$, etc, donde si ha $\Sigma p = \frac{h}{2}\left[y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+y_8\right]$, nella formola Σpx, x esprime la distanza del centro di gravità dell'area AabB dal punto a, sappiamo che $x=\frac{h}{3}\cdot\frac{y_0+2y_1}{y_0+y_1}$, il momento dunque del 1° trapezio rispetto ad Aa è $px=\frac{1}{6}h^2(y_0+2y_1)$, cangiando y_0 in y_1, y_1 in y_2 si ha il momento del 2° trapezio BbcC rispetto a Bb eguale ad $\frac{1}{6}h^2(y_1+2y_2)$, per avere il momento di questo trapezio rispetto ad Aa bisogna aggiungere a questa formola il prodotto dell'area BbcC per h, e si ha $\frac{1}{6}h^2(y_1+2y_2+3y_1+3y_2)=\frac{1}{6}h^2\left[4y_1+5y_2\right]$, cangiando y_1 in y_2, y_2 in y_3 in questa formola, ed aggiungendovi il prodotto dell'area CcDD per h si ha il momento del 3° trapezio CcDD rispetto ad Aa eguale ad $\frac{1}{6}h^2\left[4y_2+5y_3+3y_2+3y_3\right]=\frac{1}{6}h^2\left[7y_2+8y_3\right]$, operando in modo analogo al precedente si ha il momento rispetto ad Aa del trapezio DdeE eguale ad $\frac{1}{6}h^2\left[7y_3+8y_4+3y_3+3y_4\right]=\frac{1}{6}h^2\left[10y_3+11y_4\right]$, così procedendo si hanno i momenti di tutti i trapezii, ora dai momenti, che abbiamo trovati si scorge la legge della loro formazione, possiamo perciò scrivere il momento di tutta l'area eguale a

$$X.\,AamM=\frac{h^2}{6}\left[y_0+6y_1+12y_2+18y_3+24y_4+\ldots\right],$$

e se sia 2m il numero delle parti eguali ad h di am,

$$X.\,AamM=\frac{h^2}{6}\left[y_0+1.6y_1+2.6y_2+3.6y_3+4.6y_4+\ldots+(3m-1).6y_{2m}\right],$$

donde, poichè $AamM=\Sigma p=\frac{h}{2}\left[y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\ldots+2y_{2m-1}+y_{2m}\right]$,

$$X=\frac{1}{3}h\,\frac{y_0+1.6y_1+2.6y_2+3.6y_3+4.6y_4+\ldots+(3m-1).6y_{2m}}{y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+\ldots+y_{2m}}.$$

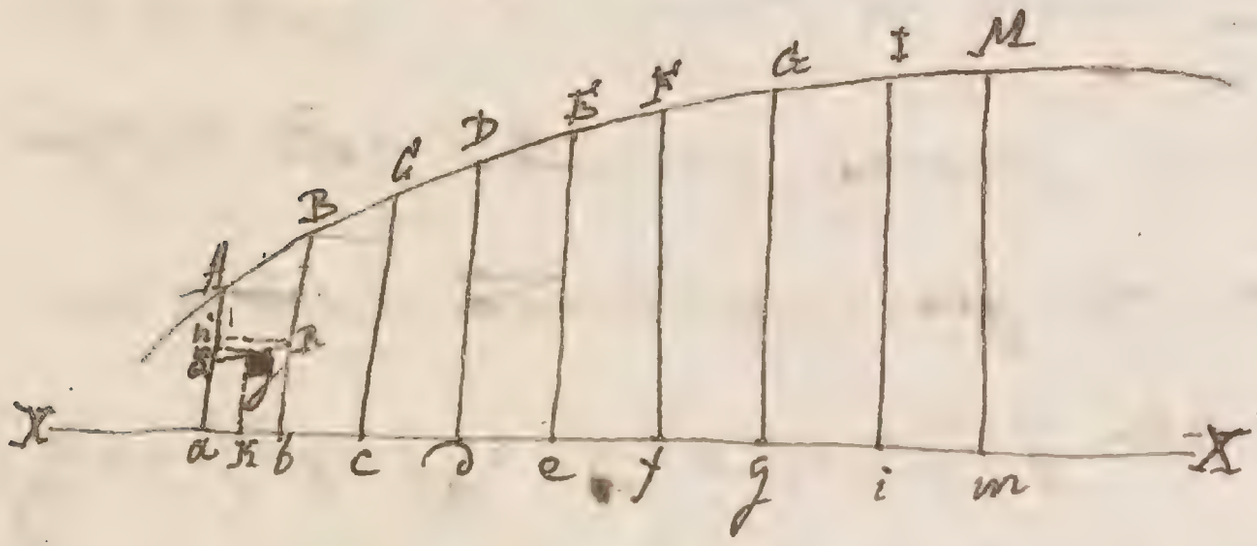
Se l'area non è simmetrica rispetto ad alcuna linea, cioè se invece per esempio dell'area AA'M'M si abbia l'area AamM, di cui si debba trovare il centro di gravità, questo essendo distante da XX' non sarà determinato finchè non ne determineremo la dist.a dalla retta XX', ossia Y come sempre la abbiamo chiamata.

Per determinare Y siccome abbiamo la formola $Y\Sigma p = \Sigma py$, Σpy essendo la somma dei momenti dei trapezii AabB, etc rispetto ad XX', bisogna prima di tutto, che determiniamo tali momenti.

Il centro di gravità g di AabB si trova sulla retta QR, che divide per mezzo i lati paralleli, ad una distanza

$$Qg = \frac{1}{3} QR \frac{y_0 + 2y_1}{y_0 + y_1} ;$$

da g si tirino le ordinate gK, gn, da R si abbassi Rn' perpendicolare ad Aa, per la somiglianza



dei triangoli Qng, Qn'R si ha, che Qn : Qn' :: Qg : QR, donde $Qn = \frac{Qn' \cdot Qg}{QR}$, ora $Qn' = \frac{y_1 - y_0}{2}$, QR = Qg lo abbiamo, QR sparisce dalla frazione, dunque

$$y = gK = \frac{y_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{y_0 + 2y_1}{y_0 + y_1} = \frac{3y_0^2 + 3y_0 y_1 + y_0 y_1 + 2y_1^2 - y_0^2 - 2y_0 y_1}{6(y_0 + y_1)}$$

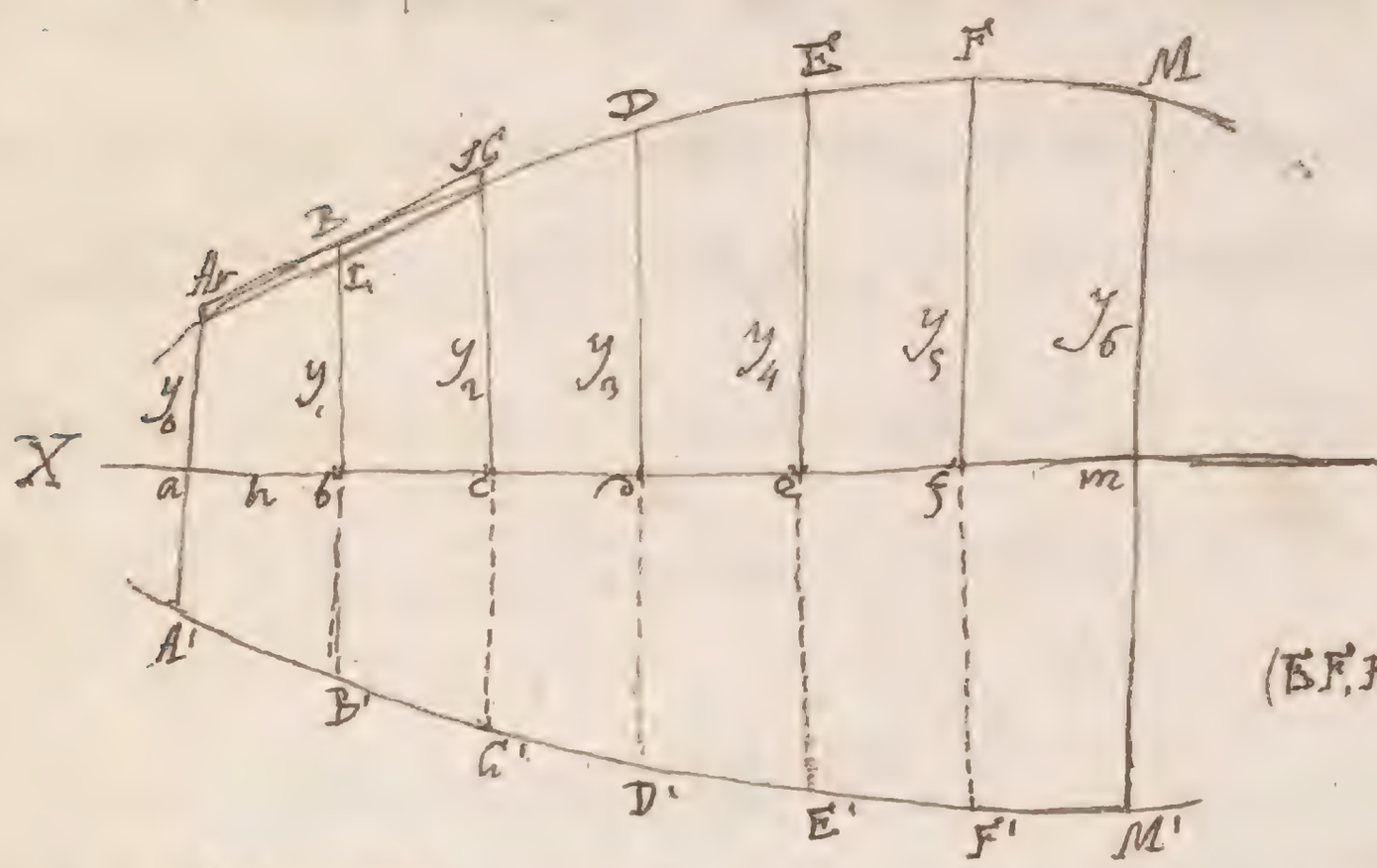
$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{y_0^2 + y_0 y_1 + y_1^2}{y_0 + y_1},$$ è il momento del trapezio AabB eguale ad $\frac{1}{6} h \left[y_0^2 + y_0 y_1 + y_1^2 \right]$, il momento del 2° trapezio si ha cangiando y_0 in y_1, y_1 in y_2, cioè $= \frac{1}{6} h \left[y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 \right]$, in modo analogo si ha il momento del 3° trapezio $= \frac{1}{6} h \left[y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2 \right]$, quindi è evidente la legge di formazione di questi momenti, e possiamo scrivere, che il momento dell'area data è

$$Y \cdot AamM = Y\Sigma p = \frac{1}{6} h \left[y_0^2 + y_0 y_1 + 2y_1^2 + y_1 y_2 + 2y_2^2 + y_2 y_3 + 2y_3^2 + \text{etc} + y_{2m}^2 \right],$$

da questa relazione si ha

$$Y = \frac{1}{3} \frac{y_0^2 + y_0 y_1 + 2y_1^2 + y_1 y_2 + 2y_2^2 + y_2 y_3 + \cdots + y_{2m}^2}{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + \cdots + y_{2m}}.$$

Considerando gli archi ~~una~~ AB, BG, etc. come archi parabolici, e supponendo di nuovo l'area simmetrica rispetto ad XX', supporremo, che gli archi AB, BG appartengano ad una parabola avente il suo asse parallelo alle ordinate y_0, y_1, etc., e cioè degli archi [DD E], (EF, FM); questa supposizione possiamo farla,



poichè per tre punti A, B, G si può sempre far passare una parabola, purchè i punti non siano in linea retta, la qual cosa non accade nel nostro caso. Ciò posto tiriamo AG, questa corda sarà divisa in I in due parti eguali dall'ordinata Bb, perciò se da B tiriamo una parallela rs ad AG, essa sarà tangente all'arco parabolico, ~~[illegible]~~ inoltre le rette Bb, AG saranno parallele a due diametri conjugati, queste osservazioni ci fornisono il mezzo di quadrare ~~la curva~~ l'area compresa da AG, e dall'arco ABG; infatti l'area di un segmento parabolico ABG è eguale ai due terzi del parallelogramma circoscritto rAGs, or questo parallelogramma è $= ac \cdot BI = 2h \cdot BG = 2h\left[y_1 - \frac{y_0+y_2}{2}\right]$, dunque l'area $ABG = \frac{2}{3}h\left[2y_1 - y_0 - y_2\right]$, aggiungendo l'area del trapezio $Aacc = h(y_0+y_2)$, hassi, chiamando S_1 S_2 S_3 etc. le aree delle falde ABGca, GDEeG, etc., $S_1 = \frac{1}{3}h\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$; ripetendo lo stesso ragionamento per le altre falde avrassi: $S_2 = \frac{1}{3}h\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right]$, e se sia $2m$ il numero delle parti in cui si è divisa am, sarà l'ultima falda $S_3 = \frac{1}{3}h\left[y_4 + 4y_5 + y_6\right]$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $S_m = \frac{1}{3}h\left[y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right]$, addizionando queste aree hassi l'area totale Aa m M, che chiamo A.

$$A = \frac{1}{3}h\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \cdots + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right].$$

Trovate le aree delle diverse falde cerchiamone i centri di gravità.
La falda $Aa\beta\beta'$ è composta di un segmento parabolico ABC, e di un trapezio $AaCC'$, il segmento essendo simmetrico rispetto a BL, ha il suo centro di gravità sopra BL, e perciò alla distanza h dalla retta Aa, il momento di questo segmento rispetto ad Aa è dunque $= \frac{2}{3}h^2\left[2y_1 - y_0 - y_2\right]$; la distanza del centro di gravità del trapezio data è $\frac{2}{3}h\left[\frac{y_0+2y_2}{y_0+y_2}\right]$, onde il suo momento è $= \frac{2h^2}{3}\left[y_0+2y_2\right]$, quindi il momento di S_1 sarà $= \frac{2h^2}{3}\left[2y_1+y_2\right]$.
Cangiando in questa formola y_1 in y_3, y_2 in y_4 hassi il momento della falda S_2 rispetto a CC eguale $\frac{2}{3}h^2\left[2y_3+y_4\right]$, aggiungendo a questa quantità il prodotto dell'area S_2 per $2h$, avrassi il momento di S_2 rispetto ad Aa eguale a

$$\frac{2}{3}h^2\left[2y_3+y_4\right]+2h\cdot\frac{1}{3}h\left[y_2+4y_3+y_4\right]=\frac{2}{3}h^2\left[y_2+6y_3+2y_4\right].$$

Parimente il momento di S_3 rispetto a EE sarà $\frac{2}{3}h^2\left[2y_5+y_6\right]$, aggiungendovi il prodotto dell'area S_3 per $4h$ sarà il momento di S_3 rispetto ad Aa eguale a $\frac{2}{3}h^2\left[2y_5+y_6\right]+4h\cdot\frac{1}{3}h\left[y_4+4y_5+y_6\right]=\frac{2}{3}h^2\left[2y_4+10y_5+3y_6\right]$;
scrivendo il momento di S_1 sotto la forma $\frac{2}{3}h^2\left[0\cdot y_0+2y_1+y_2\right]$ si giunge scorgere qual sia la legge di formazione dei momenti delle diverse falde $S_1\ S_2\ S_3 \ldots S_m$, e quindi scrivere il momento di tutta l'area $AaMM$ rispetto ad Aa, il quale sarà anche il momento dell'area $AA'M'M$, questo momento, chiamando X la dist.a del centro di gravità di $AA'M'M$ da Aa, sarà nel nostro caso

$$X\cdot A=\frac{2}{3}h^2\left[0\cdot y_0+2y_1+2y_2+6y_3+4y_4+10y_5+6y_6\right];$$

quindi si ha, sostituendo ad A il valore trovato

$$X=h\,\frac{0\cdot 2y_0+1\cdot 4\cdot y_1+2\cdot 2y_2+3\cdot 4y_3+4\cdot 2y_4+5\cdot 4y_5+6y_6}{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+y_6}.$$

Se invece dell'area AA'M'M fosse stata proposta l'area AamM, questa non essendo più simmetrica rispetto ad un'asse, bisognerebbe ancora, per avere il centro di gravità, trovare la distanza y di questo da XX', per trovarla si procederebbe in un modo analogo a quello impiegato per trovarla, quando supponevamo gli archi AB, Bb, etc. rettilinei.

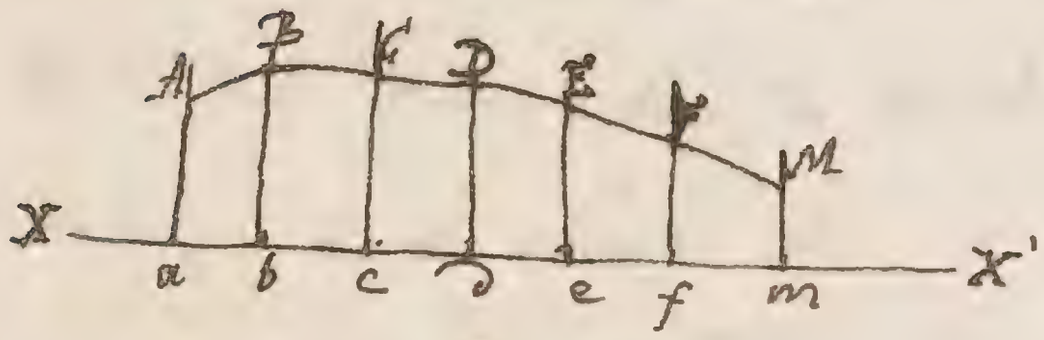
Si osservi, che il centro di gravità dell'area AamM si trova alla stessa distanza X da Aa, che il centro di gravità di AA'M'M

Se la curva ha dei punti di inflessione come A,B, se pei punti a,A,b, etc. b,B,c si fanno passare due parabole, gli archi parabolici differiranno assai di troppo dagli archi aAb, bBC, poichè i primi sono contrari verso XX', come si vede nella fig.a; perciò in questi casi bisogna avvertire di prendere i punti A,B come confini di archi parabolici, ossia dividere XX' in modo, che delle perpendicolari erette sui detti punti di divisione, due vadano a ferire la curva nei punti A,B, e di più che tali ordinate sieno d'indice pari.

La curva AM giri intorno all'asse XX', genererà un certo solido, le ordinate Aa, Bb, Cc, etc genereranno aree circolari, epperciò proporzionali ad y_0^2, y_1^2, y_2^2, etc, il solido generato avrà per volume $V = \frac{nh}{3}\left[y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + \dots\right]$, chiamando $s_0, s_1, s_2, s_3 \dots$ le aree generate dalle ordinate, $V = \frac{h}{3}\left[s_0 + 4s_1 + 2s_2 + 4s_3 + \dots\right]$; questa formola serve per la cubatura di un corpo qualunque, se si intenda, che s_0, s_1, s_2, s_3, etc rappresentino le aree

delle sezioni fatte nel solido con piani paralleli a distanze eguali, ed eguali ad h.

La verità di questa formola diviene evidente, quando si consideri, che il peso sparso sull'area S, per esempio, possiamo considerarlo sparso egualmente sopra una retta [redacted], infatti presa una retta XX' si portino sulla stessa le parti $ab = bc = cd = \ldots = h$, si innalzino dai punti di divisione le perpendicolari indefinite aA, bB, cC, ---, si portino sulle medesime le lunghezze aA, bB, cC, etc proporzionali ai pesi delle aree S_0, S_1, S_2 ---, e si immagini l'area AamM limitata dalla curva ABCDEFM formata dall'unione dei punti A, B, C, etc caricata uniformemente di pesi, il peso che carica ciascuna ordinata essendo d'ipotesi proporzionale al peso della sezione corrispondente nel solido, manifestamente i pesi, che caricano ciascuna delle falde AabB, BbcC, etc saranno proporzionali ai pesi dei volumi corrispondenti compresi fra due sezioni successive, ed il peso dell'area totale Aam sarà proporzionale [redacted] al peso del volume, che si considera, ora il peso dell'area totale, che diciamo A, [redacted] è espresso da g.A, se sia g il peso dell'unità di area, il peso dunque del volume V sarà Kg.A, indicando con K il rapporto del peso dell'unità di volume al peso dell'unità di area; questo rapporto d'ipotesi è lo stesso che quello del peso di una sezione S_0 all'ordinata corrispondente y_0, dunque se nell'equazione



$$\text{[redacted]}\, g \cdot A = \frac{h}{3}\, \text{[redacted]}\, g \left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots \right] = \frac{h}{3} \left[\text{[redacted]}\, g \cdot y_0 + 4\, \text{[redacted]}\, g \cdot y_1 + 2\, \text{[redacted]}\, g \cdot y_2 + \cdots \right]$$

sostituiamo a gA, gy_0, gy_1, gy_2, etc i loro equivalenti Kg V, Kg S_0, Kg S_1, [redacted] S_2, etc -

risulta, dividendo per kg, $V = \frac{h}{3}\left[S_0 + 4S_1 + 2S_2 + 4S_3 + 2S_4 + \cdots\right]$.

Gli topografi per rappresentare in disegno le sporgenze, che sono sulla superficie terrestre, immaginano ad altezze h. 2h. 3h. ec. dalla superficie del mare fatte delle sezioni con piani paralleli all'orizzonte, le curve date da queste sezioni le projettano sulla carta, questo metodo è detto metodo delle curve orizzontali. Colla formola suddetta, d'una carta topografica costrutta nel modo suddetto, si può calcolare il volume di un colle, di una catena qualunque di montagne, e la posizione dei loro centri di gravità.

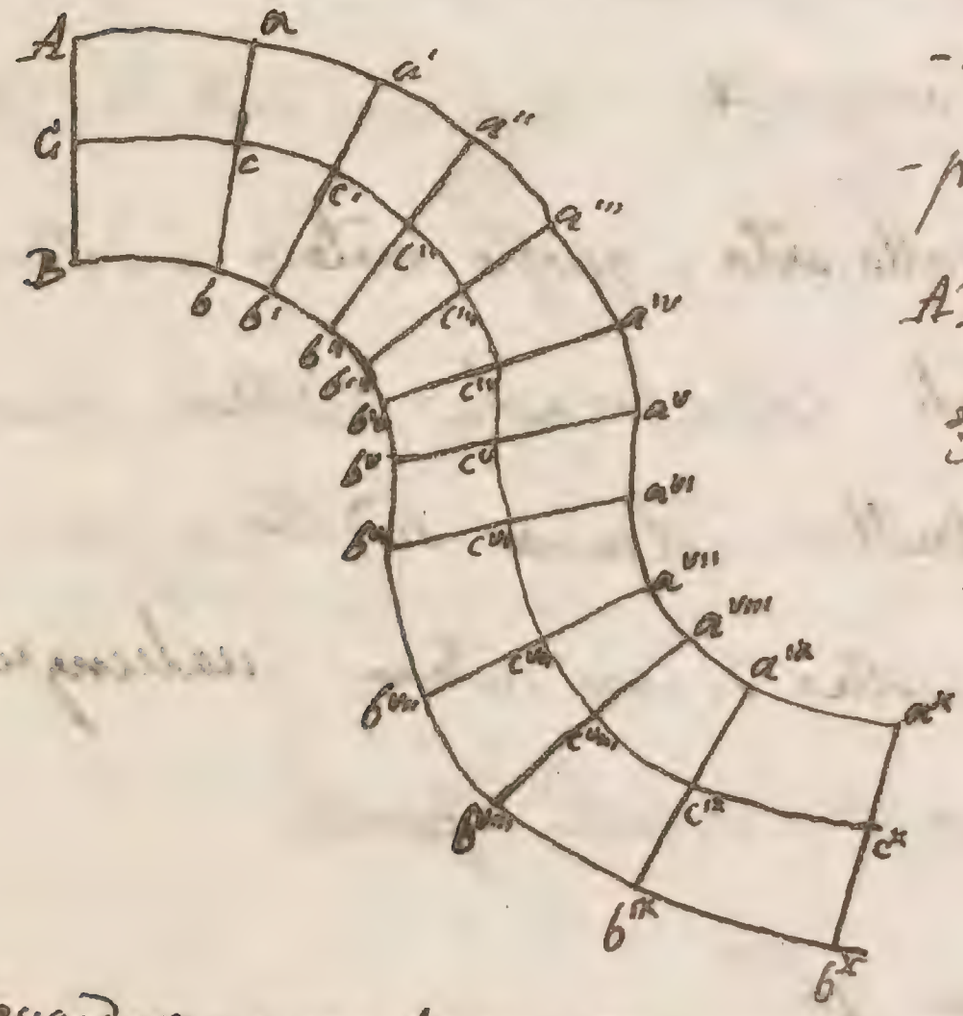
Lezione 26.ª

Generalmente per la quadratura delle superficie sono necessarie due integrazioni, e tre per la cubatura dei solidi, vi sono però dei casi in cui è necessaria soltanto una integrazione sia per la quadratura, che per la cubatura, ne abbiamo un'esempio nelle superficie e nei solidi di rivoluzione, poichè in queste superficie una ed in questi solidi due integrazioni sono già fatte, e sono quelle, che ci danno gli elementi di primo ordine delle une e degli altri. Vi han dei casi, in cui si può quadrare una superficie, o cubare un solido senza far alcuna integrazione, e ciò avviene quando si conosce della superficie o del solido il centro di gravità, poichè come dalla conoscenza delle superficie e dei volumi deriva la conoscenza del centro di gravità in molti casi, così dalla conoscenza del centro di gravità si può dedurre la quadratura o la cubatura in molti casi.

Vediamo qualche applicazione di questa idea.

Sia una retta definita AB, che si muova in modo, che il suo centro di gravità G descriva una curva sempre normale ad essa retta AB, tal retta genererà un' area; di quest'area noi vogliamo otte-nere una porzione qualunque com-presa fra due posizioni della retta AB. $a^x b^x$ senza ricorrere al Calcolo Integrale.

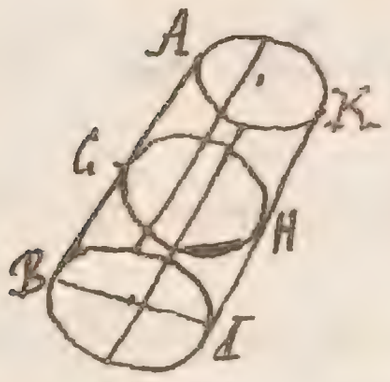
Infatti sieno ab. a'b' due posizioni successive della retta, nel passare di AB da ab in a'b', i due estremi A, B, ed il centro di gravità C descriveranno gli archetti aa', Cc', bb', i quali si possono riguardare come linee rette perpendicolari ad ab. a'b', onde l'area abb'a' potrà considerare come un trapezio, i cui lati paralleli sono aa'. bb', e la cui altezza è ab, epperciò la cui area sarà il prodotto di ab, ossia AB per la semisomma dei lateroli aa', bb', ora questa semisomma è eguale al laterolo cc' descritto dal punto di mezzo C, ossia dal centro di gravità di AB. Facendo la somma di tutte tali aree, avremo l'area totale espressa dal prodotto della retta AB per la somma dei laterali percorsi dal centro G, ossia dal prodotto della retta AB per il viaggio del centro di gravità G, chiamando viaggio la curva descritta dal punto G.



Questa proposizione è vera, qualunque sia la lunghezza di AB, e qualunque sia la curva piana descritta dal centro di gravità a meno, che questa curva non sia tale, che la retta generatrice nel suo movimento non si trovi costretta a passar sopra un'area, che già generò, nel qual caso bisogna por mente al movimento, che fece la generatrice, quando generava l'area, che vengasi a determinare.

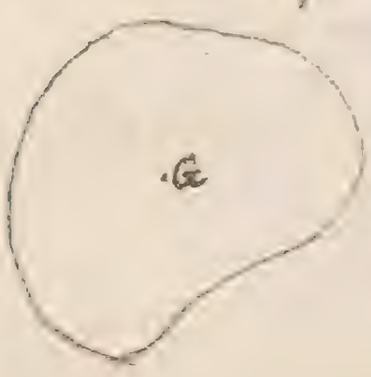
Noi abbiamo supposto, che la generatrice si movesse nel piano della curva direttrice, ma la cosa sarebbe ancora vera, se dessa non si movesse nello stesso piano, se nonche in tal caso bisogna aggiungere per condizione, che l'angolo formato da una posizione qualunque della generatrice col piano della curva, o col piano ajulatore della medesima, se dessa è a doppia curvatura, resti costante.

Econe un'esempio. Sia ~~##~~ il circolo GH la curva direttrice, e sia AB la generatrice inclinata ad un certo angolo col piano di detto circolo, la superficie generata da AB,



che sarà la superficie di un cono tronco, se AB si muova conservando sempre la stessa inclinazione col piano GH, sarà eguale al prodotto di AB per la circonferenza del circolo GH, ora AB è il lato del cono tronco, GH circonferenza GH è la semisomma delle circonferenze delle basi AK, BI, la superficie dunque del cono tronco è eguale al prodotto del lato per la semisomma della circonferenze delle basi, come si vuole dimostrato la Geometria: se invece di un tronco di cono retto si avesse un tronco di cono obliquo, allora la generatrice non conservando sempre la stessa lunghezza nel generare la superficie di tal tronco, il che avviene pel cangiare dell'angolo di essa col piani delle basi, la proposizione non è più vera, infatti sappiamo, che non esiste pel cono obliquo alcuna espressione algebrica della sua superficie convessa, una esse dipende da una trascendente ellittica, che non si può integrare rigorosamente.

Sia ora non più una retta, ma un'area piana, che si muova in modo da mantenersi normale alla curva descritta dal centro di gravità, con considerazioni analoghe a quelle fatte



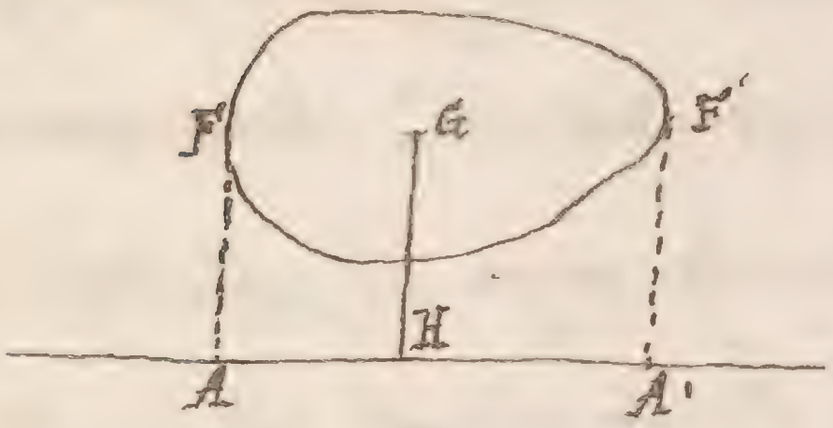
nel problema antecedente potremo trovar il volume generato dall'area, che si muove.

Considerando il volume descritto in un tempo brevissimo, esso si può riguardare come un tronco cilindrico a basi oblique, ed è facile dimostrare, che se si ha un tale cilindro tronco obliquamente alla base, il suo volume è eguale al prodotto dell'area generatrice per la distanza dei centri di gravità delle due posizioni di quest'area, ossia delle due basi, dunque il volume totale compreso tra due posizioni qualunque dell'area generatrice, potendo noi considerarlo come somma di tutti i volumi descritti in tempi brevissimi dell'area generatrice, sarà eguale al prodotto dell'area generatrice per il viaggio del suo centro di gravità, 1° perchè tutti i volumetti descritti in ciascun istante hanno per fattore l'area generatrice, che regola perciò fattor comune alla loro somma, 2° perchè l'altro fattore della loro somma essendo la somma dei viaggetti percorsi dal centro G in ciascun istante, esso non è altro, che il viaggio totale del centro di gravità. In tutti i prismi retti, considerandoli generati dalla base, che si muove perpendicolarmente agli spigoli, ciò è evidente.

La proposizione è ancora vera, se, movendosi l'area normalmente alla curva direttrice, la curva che chiude tale area si muove intorno al centro G nel piano dell'area.

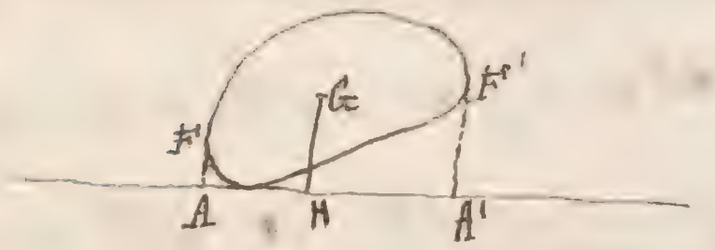
Così se si faccia muovere un quadrato ~~che~~ normalmente ad un'elica, ed in modo, che esso giri intorno al suo centro di gravità, il volume generato è eguale ad esso quadrato moltiplicato per la lunghezza dell'elica. In questo modo si trova anche il volume della colonna torta raramente adoperata dagli architetti; questa colonna è generata nel modo suddetto, di modoche riesce applicare la proposizione dimostrata.

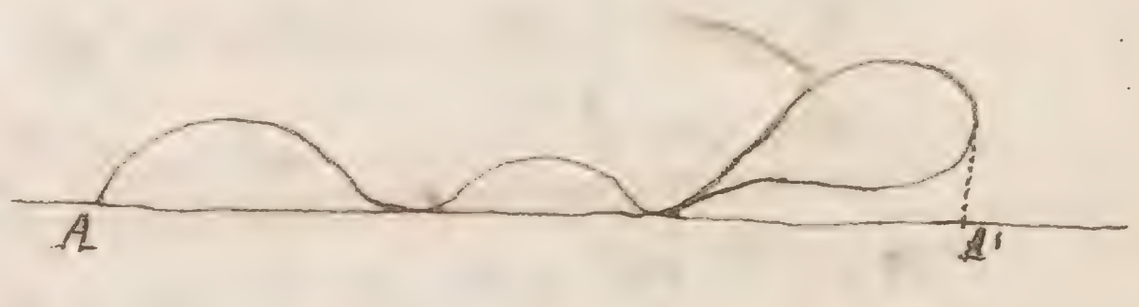
Dalla 2ª proposizione generale enunciata rilevasi l'espressione elegantissima per i solidi di rivoluzione.



Rappresenti FF' una sezione fatta nel solido da un piano meridiano, il solido si può considerare come generato dall'area FF', che si muove mantenendosi normale al circolo descritto dal centro di gravità G attorno all'asse AA', esso solido ha dunque per espressione il prodotto dell'area FF' per la circonferenza del circolo di raggio GH.

Ciò è ancora vero se l'area FF' tocca l'asse AA', o se in parte è limitata da tale asse.





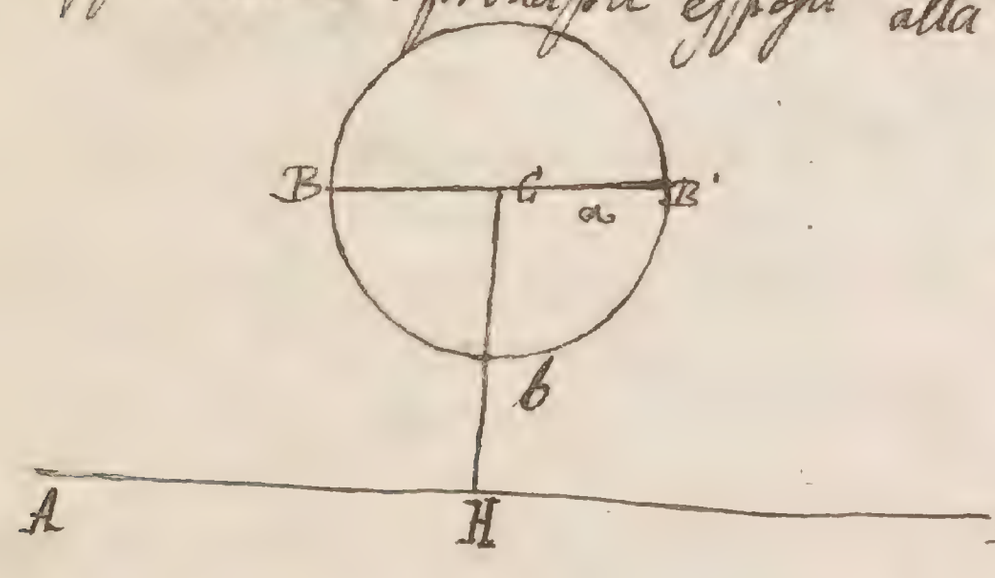
Un caso, che merita una particolare attenzione è quello, in cui una parte dell'area si trova al disopra, l'altra al disotto dell'asse.

L'integrazione in questo caso ci dà per l'area superiore un'espressione affetta dal segno +, per l'area inferiore un'espressione negativo, con queste espressioni di queste aree se noi cerchiamo il solido dalle generate non abbiamo tal solido, ma bensì la differenza dei due solidi generati dalle due aree superiore ed inferiore separatamente, vi ha però un mezzo di poter avere il vero solido generato da tutta l'area FF' pel suo moto di rivoluzione attorno ad AA', perciò bisogna distinguere i diversi casi, o l'area è simmetrica rispetto all'asse AA', ed allora basta considerare l'area superiore, o l'inferiore per avere il solido generato, poichè ambedue

generano gli stessi solidi, o l'area non è simmetrica rispetto all'asse, in questo caso od il solido generato da uno dei due segmenti superiore od inferiore è tutto compreso nell'altro, allora basta considerare questo, od il solido generato dal segmento minore è in parte compreso nell'altro, o in parte è fuori, allora facciamo girare il segmento inferiore attorno all'asse, per esempio, sino anche venga ad abbattersi sul segmento superiore, evidentemente per avere il solido generato dall'area totale bisp' bisognerà tener conto solamente della parte punteggiata del segmento inferiore, come si vede nella figura; il solido in quest'ultimo caso ha dunque il suo volume eguale al volume generato dal segmento superiore più il volume generato dalla parte punteggiata, i quali volumi si hanno nel modo indicato superiormente.

Se invece di un'area si abbiano più aree, le quali tutte girino intorno ad un'asse, il volume del solido da esse generato si ha moltiplicando la somma delle aree per il viaggio del centro comune di gravità, se tutte le aree sono da una stessa parte dell'asse, se ciò non è bisogna procedere nello stesso modo come per un'area sola.

Applichiamo i principii esposti alla ricerca di qualche solido particolare.



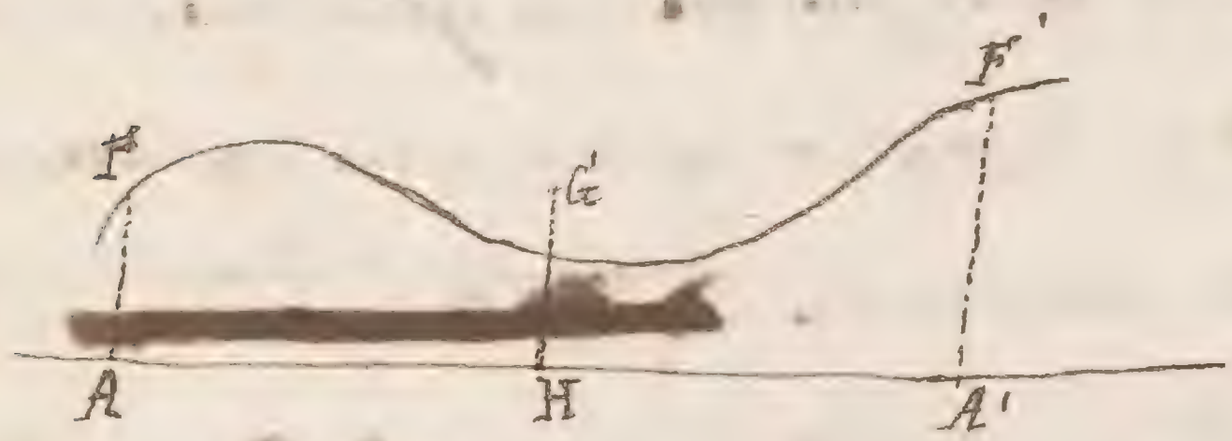
Sia il cinolo CB, il quale giri attorno all'asse AA', tirato il diametro BB' parallelo all'asse, il semicinolo esteriore genererà un solido, il quale in Architettura dicesi toro, il semicinolo interiore genererà un solido, che in Architettura dicesi Scozia.

Per avere questi volumi bisogna conoscere la distanza y del centro di gravità delle aree generatrici dall'asse AA'; pel toro, se sia CH = b, $y = b + \frac{2}{3}a \cdot \frac{2a}{\pi a}$

$y = b + \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}$, per la Scozia $y = b - \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}$, per ambedue il viaggio del centro di gravità è $= 2\pi y$, e l'area generatrice è $\frac{\pi a^2}{2}$, dunque il volume del toro $= 2\pi\left[b + \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}\right]\frac{\pi a^2}{2} = \pi a^2\left[\pi b + \frac{4}{3}a\right]$, e il volume della Scozia

o più propriamente il vano della Scozia, poichè la Scozia è una incavatura, che si pratica generalmente nelle basi delle colonne, è $= \pi a^2 \left[\pi b - \frac{4}{3} a\right]$. Addizionando questi due volumi hasti il volume del solido generato dal cerchio intero eguale $2\pi^2 a^2 b$.

Dalla conoscenza del centro di gravità di una curva FF' si può derivare l'espressione della superficie di rivoluzione generata dalla curva, quando essa si muove intorno ad un' asse AA'. Tal superficie ha per espressione il prodotto dell'arco generatore FF' pel viaggio del centro



di gravità G, ossia, chiamando L la lunghezza dell'arco, e y la dist.a GH del centro di gravità dell'arco dall'asse AA', essa è eguale $2\pi y . L$. Infatti, essendo ds l'elemento dell'arco, $y = \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{\int y ds}{L}$, quindi si ha $L . y = \int y ds$, e moltiplicando i due membri per 2π, $2\pi y . L = 2\pi \int y ds = \int 2\pi y ds =$ Superficie generata dall'arco. Applicando questa formola alla ricerca della Superficie del toro, e della Scozia, abbiamo pel toro $y = b + a . \frac{2a}{\pi a} = b + \frac{2a}{\pi}$, per la Scozia $y = b - \frac{2a}{\pi}$, e quindi

Superficie del toro $= 2\pi \left[b + \frac{2a}{\pi}\right] . \pi a = 2\pi^2 ab + 4\pi a^2$,

Superficie della Scozia $= 2\pi^2 ab - 4\pi a^2$.

Se invece di un'arco si abbia un sistema di più archi, eguali tutti si rivolgano attorno ad un'asse, la Superficie da essi generata si ha nello stesso modo, ossia moltiplicando la somma degli archi per il viaggio del commun centro di gravità.

Conquiste osservazioni si può avere la superficie, ed il volume di una colonna qualunque.

Queste regole, per cui si hanno alcune superficie, o volumi, quando si conosce il centro di gravità dell'arco generatore, o dell'area generatrice, furono trovate da uno ~~Gouta~~ avente per nome Goldino, e sono conosciute sotto il nome di regole Centrobariche, o di Goldino.

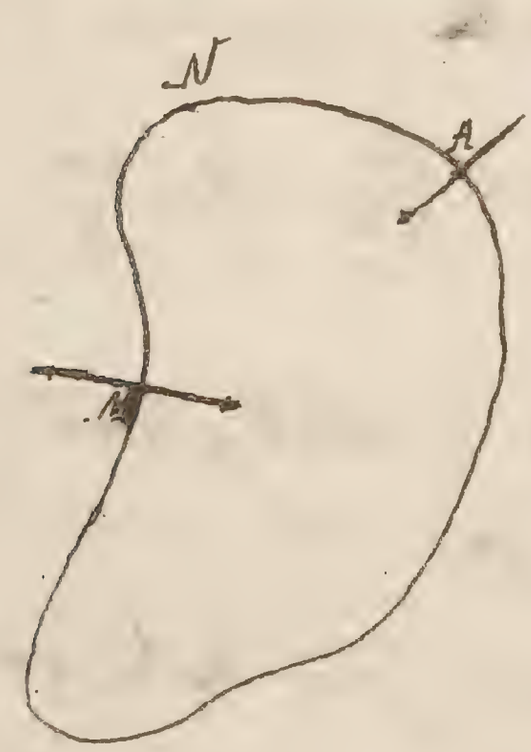
Lezione 27.ª

Alle regole Centrobariche si può dare una estensione, poichè vi ha una infinità di solidi a cui le medesime regole si possono applicare, e sono tutti i solidi generati da un'area, che si muove [illegible] variando ad ogni istante secondo una certa legge e mantenendosi sempre normale alla curva descritta dal suo centro di gravità.

[illegible]

L'elemento di questo volume è eguale all'area nel luogo, in cui si considera moltiplicata per la lunghezza dell'elemento della curva descritta dal centro di gravità; chiamando ds questo elemento del viaggio del centro, si avrà una espressione differenziale, che bisognerà poi integrare per avere il volume domandato.

Per esempio è data la legge, con cui varia un'area, percorrendo il suo centro di gravità la curva MNA, ed è la seguente:

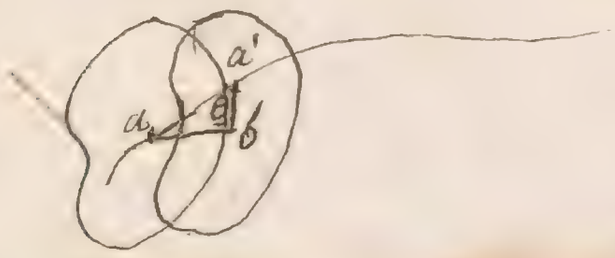


a partire dal punto M l'area varia in modo, che i parametri in essa contenute crescono proporzionalmente agli spazi percorsi dal centro; inoltre l'area cresce proporzionalmente ai quadrati dei parametri. allora sia b l'area iniziale, e sia per es.° a il parametro, che varia, giunta l'area in A, essa sarà diventata $= b\frac{K^2 \cdot AM \cdot a^2}{a^2} = K^2 \cdot AM \cdot b$, essendo K una quantità costante data; chiamisi s l'arco AM. l'espressione dell'elemento di volume

sarà dunque $= hK^2 s^2 ds$, ed integrando fra i limiti 0, s, il volume generato dall'area nel passare del suo centro di gravità da M in A sarà $= hK^2 \overline{AM}^3$.

Si può anche concepire un solido generato dal movimento di un'area, che si mantiene non normale, ma obbligua al piano osculatore della curva descritta dal centro di gravità.

Se l'angolo dell'area col piano osculatore non varii, il volume dell'elemento del solido generato è eguale al prodotto dell'area generatrice non per il viaggio del centro di gravità aa', ma bensì per la sua projezione ab fatta sudi un piano perpendicolare all'area,



questa projezione è detta il viaggio utile del centro di gravità, il viaggio reale aa' è detto viaggio apparente, ciò è vero supponendo l'elemento cilindrico, ma desso si può intendere generato in un tempo tanto breve, che si possa considerare come cilindrico; ab è eguale al prodotto del viaggio apparente pel seno dell'angolo θ, che questo fa coll'area generatrice, quest'angolo nella nostra ipotesi non variando diremo perciò, che il volume di un solido compreso tra due posizioni dell'area generatrice è eguale al prodotto dell'area generatrice per il viaggio apparente moltiplicato per seno θ, ossia eguale al prodotto dell'area generatrice pel viaggio utile del centro di gravità.

Se θ non è costante, bisogna ricorrere ad una integrazione, poichè allora θ variando, varierà con una certa legge, se questa sia analiticamente espressa da $\operatorname{sen}\theta = \varphi(x,y,z)$, x, y, z essendo le coordinate ~~del~~ dei punti del viaggio del centro di gravità, l'espressione dell'elemento sarà, se A sia l'area, $A \cdot \varphi(x,y,z)\, ds$.

Se variano θ e l'area A, ossia se anche $A = \psi(x,y,z)$, con una integrazione arrivasi ancora ad avere il solido generato.

Tutto ciò non fu che una prefazione allo Studio della Meccanica, avevamo infatti detto di voler studiare la Statica, o scienza dell'equilibrio, e noi abbiamo ancora stabilite alcune regole per conoscere se un dato corpo, o sistema di corpi sia in equilibrio; andiamo ora a stabilire tali regole, cominciando dai casi più semplici.

Condizione d'equilibrio di un punto materiale, a cui sono applicate più forze.

Un tal punto evidentemente è in equilibrio se opponiamo alla risultante delle forze che tendono a farlo muovere, una forza eguale, si chiede di esprimere analiticamente la condizione d'equilibrio delle forze sudette, ossia la condizione, che una qualunque di esse sia eguale e direttamente contraria alla risultante delle altre.

Sieno S_1 S_2 S_3 S_4 .... le forze, chiamiamo $\begin{cases}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_3\\ \beta_3\\ \gamma_3\end{cases}$ .... gli angoli, che ciascuna di esse fa con tre assi ortogonali di coordinate prefi ad arbitrio, risolviamo quindi ciascuna forza in tre forze parallele agli assi, tali forze saranno

per S_1 $\begin{cases}S_1 \cos\alpha_1\\ S_1 \cos\beta_1\\ S_1 \cos\gamma_1\end{cases}$, per S_2 $\begin{cases}S_2 \cos\alpha_2\\ S_2 \cos\beta_2\\ S_2 \cos\gamma_2\end{cases}$, etc, per avere la risultante di tutte queste forze eretto una, dia per es.° questa la S_1 bisognerà che componiamo in una sola X' le componenti di S_2 S_3 S_4 ec. dirette nel senso dell'asse delle x, in una sola Y' quelle dirette nel senso delle y, in una sola Z' quelle dirette nel senso delle z,

avremo $\begin{cases}X' = S_2\cos\alpha_2 + S_3\cos\alpha_3 + \text{----}\\ Y' = S_2\cos\beta_2 + S_3\cos\beta_3 + \text{----}\\ Z' = S_2\cos\gamma_2 + S_3\cos\gamma_3 + \text{----}\end{cases}$, la risultante di queste tre forze sarà $\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$, per l'equilibrio bisogna che questa sia eguale e direttamente contraria ad S_1, cio è le $X' = -S_1\cos\alpha_1$, $Y' = -S_1\cos\beta_1$, $Z' = -S_1\cos\gamma_1$;

Infatti da queste equazioni hassi $S_1 = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$, inoltre, essendo a, b, c gli angoli della risultante di S_2 S_3 S_4 --- cogli assi, abbiamo

$\cos a = \frac{X'}{S_1} = \frac{-S_1\cos\alpha_1}{S_1} = -\cos\alpha_1$

$\cos b = \frac{Y'}{S_1} = \frac{-S_1\cos\beta_1}{S_1} = -\cos\beta_1$

$\cos c = \frac{Z'}{S_1} = \frac{-S_1\cos\gamma_1}{S_1} = -\cos\gamma_1$

ora quando due forze fanno cogli assi degli angoli, i cui coseni sono eguali e di segno contrario; esse sono opposte, dunque si ha equilibrio tra le forze S_1 S_2 S_3 ---,

Le $\begin{cases} X' = S_2 \cos\alpha_2 + S_3 \cos\alpha_3 + \dots = -S_1 \cos\alpha_1 \\ Y' = S_2 \cos\beta_2 + S_3 \cos\beta_3 + \dots = -S_1 \cos\beta_1 \\ Z' = S_2 \cos\gamma_2 + S_3 \cos\gamma_3 + \dots = -S_1 \cos\gamma_1 \end{cases}$, portando tutti i termini in un membro, ed introducendo il simbolo Σ, in queste tre equazioni,

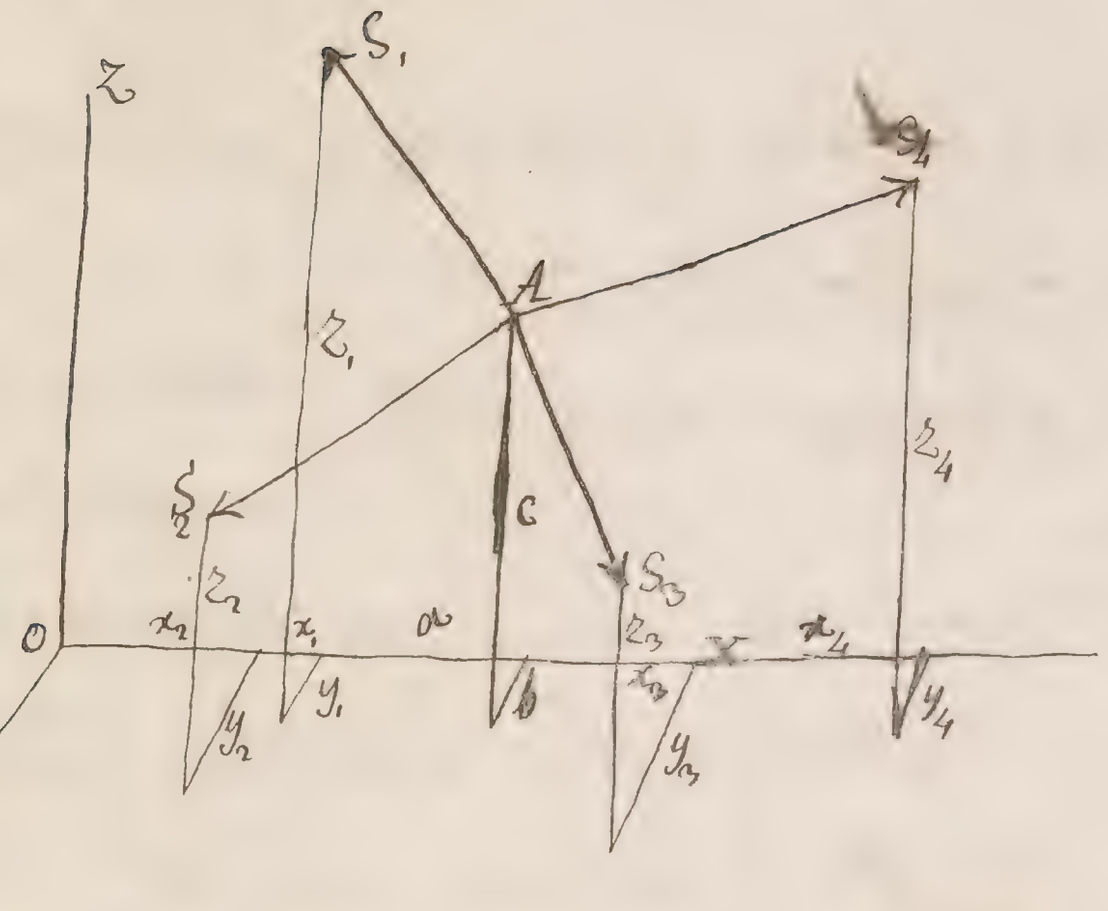
esse si possono stampare nella memoria sotto la forma, che acquistano $\begin{cases} \Sigma S\cos\alpha = 0 \\ \Sigma S\cos\beta = 0 \\ \Sigma S\cos\gamma = 0 \end{cases}$. Se vogliamo rendere ancora più concisa la scrittura di queste formole, chiamiamo $\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases}$ le componenti di S_1, $\begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}$ quelle di S_2, ecc.,

ed allora le formole già scritte possiamo scriverle sotto la forma $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, ma è meglio ritenerle sotto l'altra forma.

Lezione 28ª.

Un sistema di forze applicate ad un punto non è in equilibrio, se esso non si può ridurre al sistema di due forze eguali e direttamente opposte. Questa condizione fisica, che una forza sia eguale e direttamente contraria alla risultante delle altre, riferendo il sistema a 3 assi di coordinate, l'abbiamo espressa analiticamente con tre formole, se prendiamo ora un'altro sistema di assi pure ortogonali, e se per i primi assi le tre somme delle componenti delle forze date rispetto ciascuna in tre parallele agli assi erano zero, esse lo saranno ancora per i nuovi assi.

Se invece dei coseni degli angoli, che le direzioni delle forze fanno cogli assi introduciamo nelle formole trovate i loro valori espressi per le coordinate del punto d'applicazione, e per quelle degli estremi delle rette rappresentanti le forze, ne risulta un'altra maniera di esprimere la condizione di equilibrio di un punto isolato.



Consideriamo la forza S_4, la quale nella figura fa angoli acuti cogli assi, i coseni di questi angoli saranno manifestamente positivi ed ~~i degli~~

$$\begin{cases} \cos\alpha_4 = \dfrac{x_4 - a}{S_4} \\ \cos\beta_4 = \dfrac{y_4 - b}{S_4} \\ \cos\gamma_4 = \dfrac{z_4 - c}{S_4} \end{cases}$$

, per le altre forze le stesse formole, purchè si cangino gli indici delle lettere, danno i coseni degli angoli, che esse fanno cogli assi, le nonchè essi potranno essere negativi, le gli angoli saranno ottusi; questi coseni così espressi sostituiti nelle formole esprimenti la condizione d'equilibrio del punto A, danno le

formole
$$\begin{cases} \Sigma_i S\cos\alpha = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots - ma = 0 \\ \Sigma_i S\cos\beta = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots - mb = 0 \\ \Sigma_i S\cos\gamma = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \cdots - mc = 0 \end{cases}$$

, le m dia il numero delle forze. Queste formole si possono anche sotto la forma più concisa

$$\begin{cases} \Sigma_i x - ma = 0 \\ \Sigma_i y - mb = 0 \\ \Sigma_i z - mc = 0 \end{cases}$$

, oppure
$$\begin{cases} a = \dfrac{\Sigma_i x}{m} \\ b = \dfrac{\Sigma_i y}{m} \\ c = \dfrac{\Sigma_i z}{m} \end{cases}$$

, donde la seguente regola per verificare se un punto è in equilibrio; Misurate le coordinate degli estremi delle rette rappresentanti le forze che sono applicate al punto, fate la somma di quelle parallele all'asse delle x, la somma di quelle parallele all'asse delle y, e la somma di quelle parallele all'asse delle z, dividete queste somme pel numero delle forze; i quozienti dovranno essere precisamente le coordinate del punto dato. I valori di a, b, c possiamo scriverli $a = \dfrac{\Sigma_i px}{pm}$, $b = \dfrac{\Sigma_i py}{pm}$, $c = \dfrac{\Sigma_i pz}{pm}$,

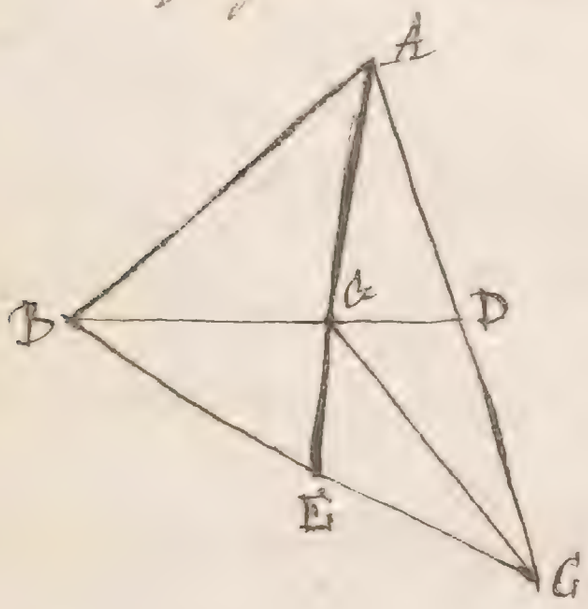
Se p sia un peso, $\frac{\Sigma px}{pn}$, $\frac{\Sigma py}{pn}$, $\frac{\Sigma pz}{pn}$ rappresentano le coordinate del centro di gravità di un sistema di pesi eguali applicati nei punti $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3, \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}$ etc, quindi risulta il seguente teorema dimostrato da Leibnitz, e detto perciò teorema di Leibnitz.

Se un numero qualunque di forze si fanno equilibrio intorno ad un punto, rappresentiamo le forze per rette, e consideriamo le rette come verghe rigide, ed applicati ad esse dei pesi eguali, il centro di gravità di tali pesi coincide col punto d'applicazione delle forze.

Il teorema inverso è ancora vero, e può enunciarsi così;

Se dal centro di gravità di un sistema di pesi eguali si tirano ai punti d'applicazione dei pesi delle rette, e consideriamo il centro come punto d'applicazione di tante forze rappresentate in intensità e direzione dalle rette sudette, tali forze si fanno equilibrio.

Da questo teorema si possono tosto dedurre alcuni corollarii semplici.

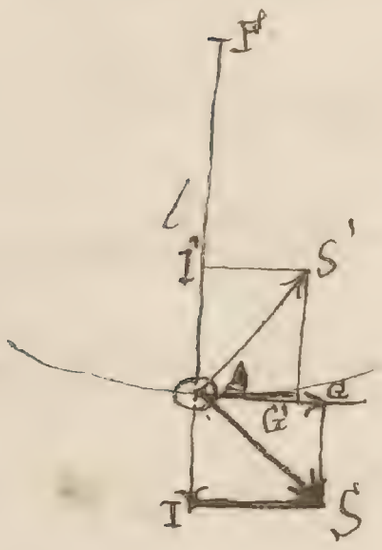


Se mettiamo tre pesi eguali nei tre vertici del triangolo ABC, il centro comune di gravità dei tre pesi coincide col centro di gravità G del triangolo; ciò è facile a dimostrarsi, poichè se componiamo i pesi in B, C, abbiamo, che il centro di gravità deve trovarsi sopra la retta AE, essendo E il punto di mezzo di BC, componendo i pesi applicati in A, C, troviamo, che il centro di gravità deve trovarsi sopra BD, cioè quella che divide per mezzo AC; esso centro coincide dunque col centro G del triangolo; ciò posto dal teorema antecedente risulta, che le rette GA, GB, GC rappresentando in intensità e direzione tre forze applicate in G, esse si fanno equilibrio.

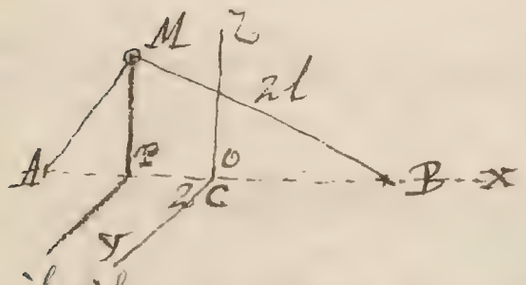
Le invece di un triangolo consideriamo un tetraedro qualunque, quattro pesi eguali applicati ai suoi vertici hanno il centro loro di gravità nel centro di gravità del tetraedro, ed è facile il dimostrarlo, quindi risulta, che se dal centro di gravità di un tetraedro si tirano ai vertici del tetraedro quattro rette, rappresentando esse in intensità e direzione quattro forze, queste forze si fanno equilibrio.

Questi due teoremi ~~son~~ uno relativo al triangolo, l'altro al tetraedro sono detti teoremi di Roberwall, dal nome di un certo Roberwall, il quale primo li dimostrò senza partire dal teorema, di cui noi ci siamo serviti. Abbiam trovate le condizioni d'equilibrio di più forze applicate ad un punto isolato, non ritenuto da alcun ostacolo, ma di tali punti non ve ne sono in natura; generalmente un punto materiale è sempre ritenuto da ostacoli, ossia è assoggettato a qualche condizione fisica; esprimere la condizione fisica con una condizione analitica si è il problema, che deve occuparci.

Supponiamo sia A un punto materiale applicato all'estremità di un filo, il quale sia attaccato per l'altra sua estremità al punto fisso F, evidentemente il punto A non potrà muoversi, che sulla superficie sferica descritta dal centro F con raggio FA se il filo è inflessibile, o nella sfera racchiusa dalla detta superficie, se il filo è flessibile; queste condizioni fisiche sono espresse analiticamente, chiamando x, y, z le coordinate del punto A riferito ad un sistema di assi ortogonali avente l'origine nel punto fisso F, dalle condizioni $x^2+y^2+z^2=l^2$, o $x^2+y^2+z^2 \leq l^2$.



Similmente se sia M un punto materiale obligato a stare su di un filo AMB fisso per le sue estremità in A, B, quest'obligo evidentemente equivale all'obligo di scorrere sulla superficie di rivoluzione dell'ellisoide, che ha i suoi fochi in A, B, ed il grand'asse $= AM+MB = 2l$, e se il filo non sia sempre teso all'obligo di stare nell'ellisoide racchiusa dalla detta superficie, analiticamente, riferendo il punto ~~ad~~ al centro, ed agli assi della ellisoide,



queste condizioni sono espresse da queste altre, $\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2+z^2}{l^2-c^2} = 1$,

$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2+z^2}{l^2-c^2} = 0 < 1$; se il punto M sia inoltre obligato a star sopra un piano MP perpendicolare AB, che è quando il filo è inflessibile, ossia quando M non può correre lungo esso, la condizione analitica equivalente a questo obbligo è $x = OP$; il punto M è allora costretto a stare sulla circonferenza del circolo intersezione del piano coll' ellissoide.

In generale quando un punto è ritenuto da vincoli, od è ritenuto sopra una superficie, da cui non può scappare, allora le sue coordinate debbono soddisfare ad una equazione, che è quella della superficie; od è ritenuto sopra una linea, allora, scelta potendosi considerare come intersezione di due superficie, le coordinate del punto dovranno soddisfare a due equazioni, che sono le equazioni delle superficie, ossia della linea nello spazio; o non può muoversi affatto; il punto dove deve stare possiamo considerarlo come intersezione di tre superficie, e perciò le coordinate di esso dovranno soddisfare a tre equazioni; quindi concludiamo, che se leghiamo un punto con vincoli, possiamo analiticamente esprimere tal condizione per mezzo di una od due o tre equazioni fra le tre coordinate del punto.

Ciò posto vediamo quale sia la condizione d'equilibrio di più forze applicate ad un punto, il quale non possa muoversi liberamente.

Nel primo caso che fu considerato, in cui il punto lo supponevamo sospeso ad un filo, la condizione d'equilibrio è, che le forze applicate al punto A sieno tali, che la loro risultante sia diretta secondo FA, altrimenti vi ha movimento. Infatti se la risultante sia rappresentata da AS, essa si può sempre scomporre in due, di cui una AG tangenziale alla superficie sferica, della cui è ritenuto il punto, l'altra AI normale, il punto essendo

ritenuto sulla superficie sferica si può intendervi ritenuto da una forza indefinita normale alla superficie, questa forza distrugge la componente AL, ossia AI ne è eliso il punto dunque si muove secondo AG; ancorchè la forza, ~~sia~~ risultante delle forze AS sia diretta ~~nell'~~ verso l'interno della sfera, essa produce ancora movimento se non è diretta nel senso di FA; Per l'equilibrio, se il filo FA è flessibile, bisogna ancora che la risultante sia diretta, ossia tiri all'infuori.

Nel 2° caso del punto M scorrente sul filo fisso per le sue estremità nei punti A,B, per l'equilibrio delle forze applicate al punto M, bisogna che la loro risultante giaccia nel piano del filo, e sia diretta nel senso della retta, che divide per metà l'angolo dei fili AM, MB; ora questa retta è la normale all'ellissoide di rivoluzione.

Generalmente più forze applicate ad un punto ritenuto sopra una superficie, ~~se~~ si fanno equilibrio, se la loro risultante agisce nel senso della normale alla superficie, poichè quando il mobile non si può scostare dalla superficie esso si può sempre intendere sollecitato da una forza normale alla superficie.

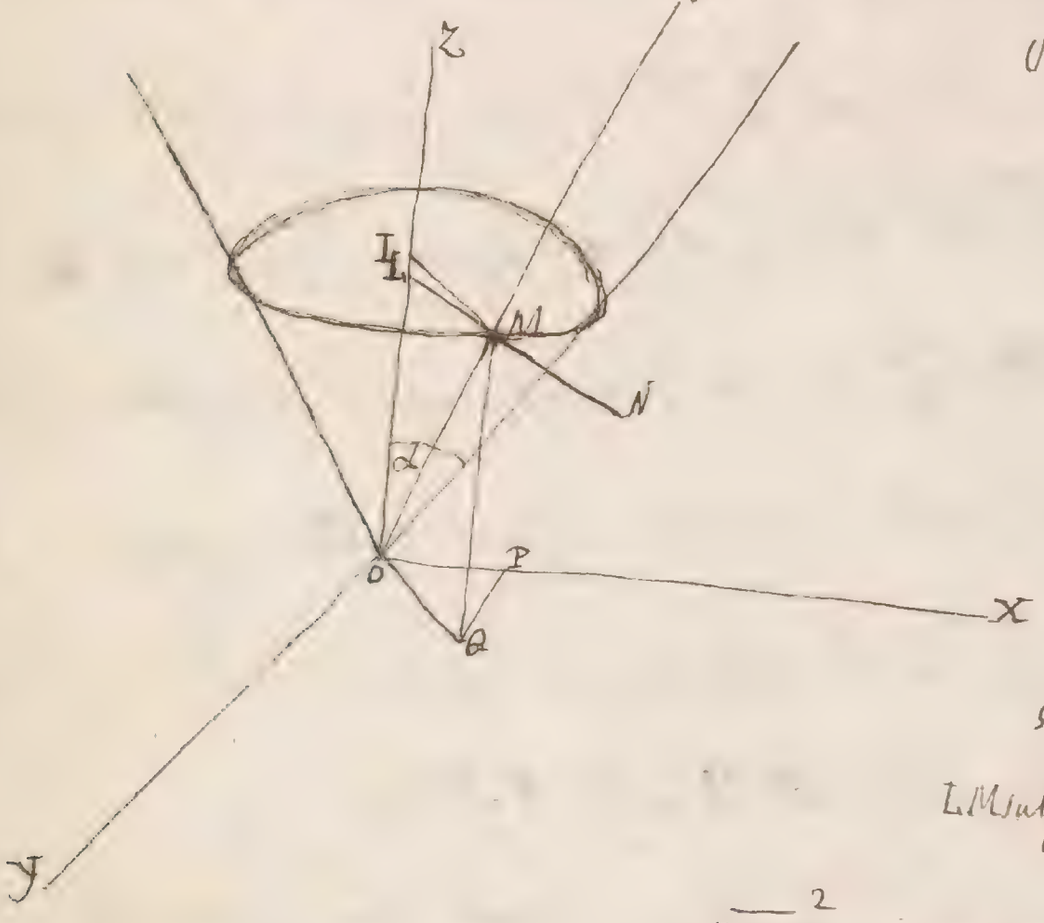
Per l'equilibrio bisogna inoltre, che ci assicuriamo, che le pressioni o le tensioni delle verghe o dei fili eccitate dalle ~~risultante~~ forze, che si fanno equilibrio, non rompano le verghe, non stra-scino i fili.

Lezione 29ª

Se il mobile non è attaccato alla superficie, ma semplicemente appoggiato, allora la risultante delle forze, che gli sono applicate è necessario per l'equilibrio, che operi all'in-
Data una superficie per la sua equazione, ed un'elemento materiale collocato su di essa in un punto avente per coordinate x, y, z, potremo generalmente determinare la posizione della normale in questo punto; se la superficie è di 2° grado, e l'algebra ci somministra la direzione della normale, od è trascendente, o di grado superiore al 2°, ed il calcolo Differenziale la somministra lui; supponiamo perciò determinati gli angoli, che essa fa cogli assi, sieno λ, μ, ν; chiamiamo S la forza risultante delle forze applicate all'elemento mate-che consideriamo, scomponiamola in tre parallele ai semiassi positivi, le quali chiame-remo X, Y, Z, per l'equilibrio bisognerà, che sia $X = S\cos\lambda$, $Y = S\cos\mu$, $Z = S\cos\nu$, ed eliminando S $x : y : z :: \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$. Dunque per l'equilibrio di più forze applicate ad un punto

obbligato a stare sopra di una superficie data, che le componenti parallele agli assi della risultante sieno proporzionali ai coseni degli angoli, che la normale fa cogli assi. In ogni caso particolare o son date x, y, z, e possiamo conoscere cos λ, cos μ, cos ν, od è data la direzione della normale, e si trova il punto a cui bisogna applicarla.

Facciamo subito degli esempii. Sopra un cono retto si vuol collocare un elemento materiale in equilibrio in un punto (x, y, z).



Pel punto dato M fo passare un piano meridiano, in questo piano innalzo una perpendicolare MN alla generatrice OM in M, essa sarà normale alla superficie conica, l'angolo V, che essa fa con OZ, sia α l'angolo della generatrice coll'asse OZ, è $= 90 + \alpha$, dunque

$$\begin{cases} \cos V = -\operatorname{sen}\alpha, \text{ inoltre x essendo la proiezione di LM sull'asse OX,} \\ \cos\lambda = \dfrac{x}{LM}, \text{ ed y essendo la proj.}^{e} \text{ di LM sull'asse OY,} \\ \cos\mu = \dfrac{y}{LM}, \text{ essendo} \end{cases}$$

$$\overline{LM}^2 = \overline{IM}^2 + \overline{IL}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{LM}^2 \operatorname{sen}^2\alpha = x^2 + y^2 + \overline{LM}^2 \operatorname{sen}^2\alpha,$$

hassi quindi $\overline{LM}^2 = \dfrac{x^2+y^2}{\cos^2\alpha}$, il qual valore, che quindi ho di LM sostituito nei coseni di λ, μ ci danno tre coseni di λ, μ, ν espressi per x, y, z; perchè l'elemento materiale, che è in M sia in equilibrio bisogna, che la forza, che lo sollecita sia tale, che ripetta in tre parallele agli assi, questa tre sieno proporzionali a cos λ, cos μ, cos ν. da questa proporzione hansi le due equazioni $\dfrac{X}{Y} = \dfrac{\cos\lambda}{\cos\mu}$, $\dfrac{X}{Z} = \dfrac{\cos\lambda}{\cos\nu}$, evidentemente una delle componenti X, Y, Z resta indeterminata, ciò avviene; perchè comunque sia l'intensità della risultante, purchè essa sia diretta nel senso della normale, vi ha sempre equilibrio, supponendo noi la superficie resistente indefinitamente.

Se fossero date X, Y, Z alle due equazioni ultime aggiungendo l'altra $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, si hanno λ, μ, ν

Rappresentando $f(x,y,z)=0$ l'equazione di una superficie qualunque, volendo avere le condizioni d'equilibrio di un'elemento materiale posto su di essa, abbiamo se l'equazione differenziale di $f(x,y,z)=0$, che si ha differenziando questa equazione rispetto ad x,y,z riguardate come variabili indipendenti, sia $L\,dx+M\,dy+N\,dz=0$,

$$\begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}} \\ \cos\mu = \dfrac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}} \\ \cos\nu = \dfrac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}} \end{cases}$$

; se la superficie sia quella di una sfera, e la sua equazione sia $x^2+y^2+z^2=a^2$, l'equazione differenziale di questa essendo $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$, sarà $\cos\lambda=\frac{x}{a}$, $\cos\mu=\frac{y}{a}$, $\cos\nu=\frac{z}{a}$, onde la condizione d'equilibrio di un punto obbligato a stare sopra una superficie sferica, è, che la risultante delle forze, che lo sollecitano sia tale, che, scomposta in tre componenti parallele agli assi, stia $X:Y:Z :: x:y:z$.

se il mobile è soltanto appoggiato alla superficie, allora la risultante delle forze, che gli sono applicate deve fare angoli ottusi cogli assi, e gli angoli della normale cogli assi sono acuti.

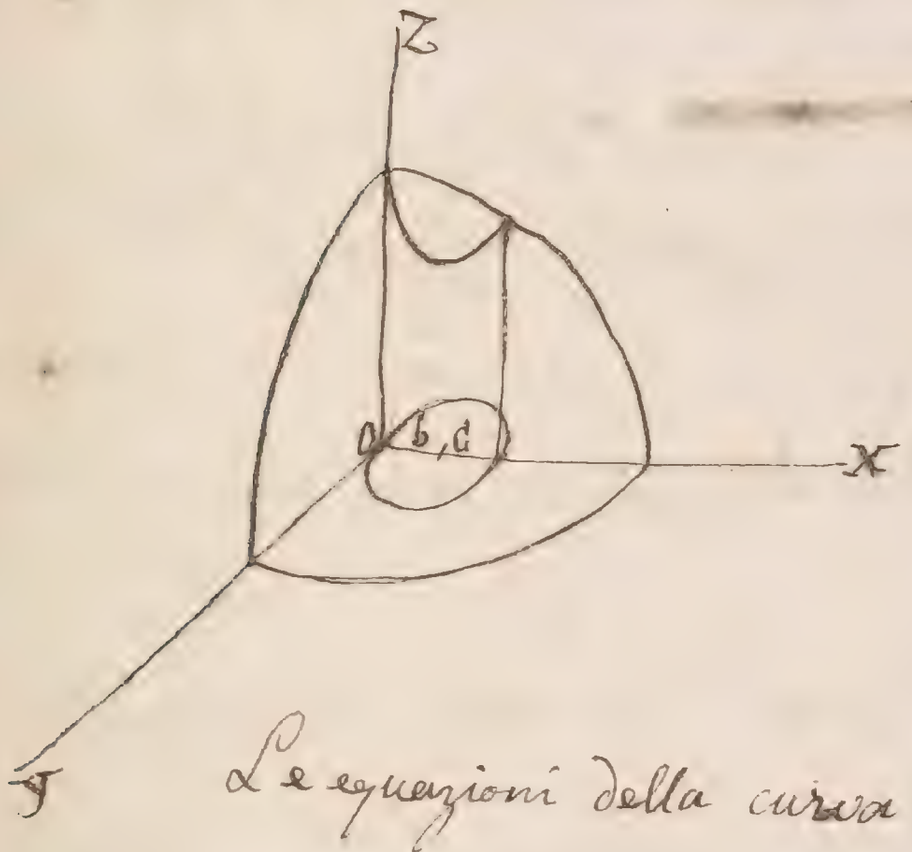
Un mobile abbiasi ora, il quale sia costretto a star sopra due superficie curve, si domanda la condizione perchè desso sia in equilibrio.

Partendo dalla idea, che esso è obligato a star sopra la curva intersezione delle superf. diremo, che le forze applicate al mobile devono esser tali da ridursi ad una, che giaccia sul piano normale; se questa condizione è adempiuta, scomponendo la forza risultante di tutte le forze applicate al mobile in tre forze parallele agli assi, e ciascuna di queste in due di cui una tangenziale, l'altra giacente nel piano normale le tre forze tangenziali se si addizionano, la loro somma deve esser zero;

Per esprimere questa condizione analiticamente, sieno X,Y,Z le componenti della forza risultante parallele agli assi, sieno $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''$ gli angoli, che la tangente alla curva fa cogli assi, scomponendo X,Y,Z nel modo anzidetto, le loro componenti

Saranno rispettivamente $\begin{cases} X\cos\varepsilon \\ X\operatorname{sen}\varepsilon \end{cases}$, $\begin{cases} Y\cos\varepsilon' \\ Y\operatorname{sen}\varepsilon' \end{cases}$, $\begin{cases} Z\cos\varepsilon'' \\ Z\operatorname{sen}\varepsilon'' \end{cases}$,

e dovrà essere $X\cos\varepsilon + Y\cos\varepsilon' + Z\cos\varepsilon'' = 0$ per l'equilibrio, ora il calcolo differenziale ci dice, che $\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}$, $\cos\varepsilon' = \frac{dy}{ds}$, $\cos\varepsilon'' = \frac{dz}{ds}$, dunque $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$, questa è la condizione perchè un punto collocato su di una curva qualunque stia in equilibrio.



Per esempio abbiasi una superficie sferica, la cui equazione sia $x^2+y^2+z^2=a^2$, ed un cilindro a base circolare, la cui superficie abbia per equazione $y^2 = 2bx - x^2$, e cerchisi un punto in equilibrio sull'intersezione delle due superficie.

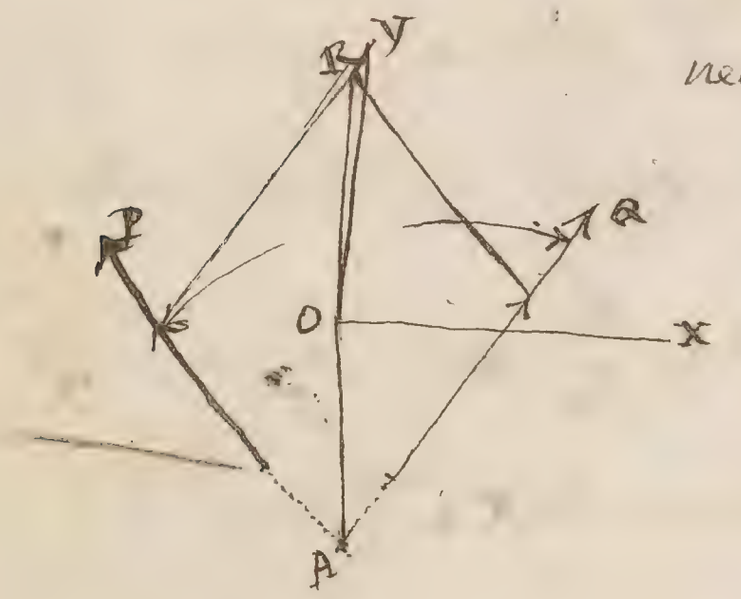
Le equazioni della curva intersezione $\begin{cases} y^2 = 2bx - x^2 \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases}$, le differenzio considerando y, z come funzioni di x, ed ho $\begin{cases} y\,dy = (b-x)\,dx \\ x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \end{cases}$, quindi eliminando dy ho $z\,dz + \left(x + y\frac{b-x}{y}\right)dx = 0$, donde $\begin{cases} \frac{dz}{dx} = -\frac{b}{z} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{b-x}{y} \end{cases}$, questi coefficienti differenziali sostituiti nella equazione $X + Y\frac{dy}{dx} + Z\frac{dz}{dx} = 0$, danno per la condizione d'equilibrio domandata la seguente $X + \frac{b-x}{y}Y - \frac{b}{z}Z = 0$, o meglio $X + (b-x)\frac{Y}{y} - b\frac{Z}{z} = 0$.

Lezione 30.ª

Esaminata la statica di un punto esaminiamo ora la statica di più punti connessi tra di loro. Un sistema rigido, di più punti invariabilmente tra di loro connessi, è fisso assolutamente se tre punti di esso sono assolutamente fissi, ma se nel sistema vi sono soltanto due punti fissi, esso è volubile intorno alla retta che unisce i punti fissi; questa retta fissa è detta asse, i punti fissi loro detti cardini.

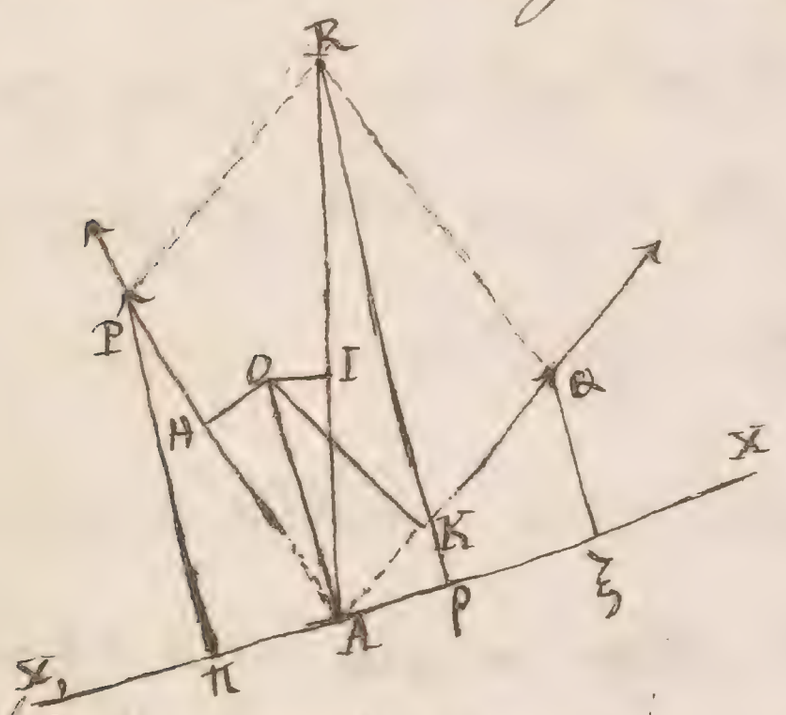
Se un solo punto del sistema è fisso, il sistema può prendere una infinità di moti rotatorii, in questo caso tre condizioni d'equilibrio bastano, come vedremo a suo tempo. Al caso in cui due punti son fissi basta una sola condizione d'equilibrio; in questo caso ogni movimento di traslazione è impossibile, e vi ha un solo moto di rotazione. Per impedire questo moto è necessario e basta [redacted] che passi per l'asse la risultante delle forze, che lo producono, poichè allora l'azione di tal forza viene distrutta dalla resistenza dell'asse; [redacted] le forze, che agiscono sul sistema essendo generalmente poste in piani diversi non possono sempre ridursi ad una risultante unica, per l'equilibrio basta che ciascuna forza passi per l'asse, o che il sistema possa ridursi ad un'altro sistema tale, che ciascuna delle forze, che lo compongo passi per l'asse.

Per esprimere analiticamente questa condizione d'equilibrio cominciamo a supporre che il sistema rigido sia in moto per l'azione di due forze giacenti in un piano perpendicolare all'asse. Sieno P, Q queste forze, sia O il punto d'intersezione del piano in cui giacciono coll'asse, la prima condizione necessaria per l'equilibrio è, che tali forze tendano a far girare il piano in sensi contrarii, cioè che se una tenda a farlo girare per es° da sinistra verso destra, come P, l'altra tenda a farlo girare da destra verso sinistra come la forza Q, poichè se altrimenti fosse una forza non farebbe che diminuire l'effetto dell'altra in vece di disturbo; riferendo le direzioni di tali forze a due assi OY, OX diremo, che la 1ª condizione d'equilibrio del piano è che se una forza tende a farlo girare da Y verso X, l'altra tenda a farlo girare da X verso Y; Considero io soltanto il moto del piano, poichè come esso muovesi, muovesi anche tutto il sistema; perchè sia adempiuta la condizione sudetta è necessario, che il punto O cada nell'angolo compreso tra



le direzioni delle due forze, o nell'angolo opposto. Supponiamo ora i punti d'applicazione delle forze trasportati sulle loro direzioni nel loro punto d'intersezione A, la risultante dovendo passare per l'asse perciò vi sia l'equilibrio, la condizione fisica sarà, che, costrutto il parallelogramma colle due forze, la diagonale passi per O.

Ciò è lo stesso, che dire, che il prodotto della diagonale per la sua distanza dal punto O deve esser zero. vediamo come si esprima questa distanza per i dati del problema; Dal punto O si abbassino OH, OK, OL perpendicolari sulle direzioni delle forze P, Q, R, rappresentando P, Q, R le intensità delle forze AP, AQ, e della loro risultante, rappresentiamo colle lettere p, q, r le perpendicolari tirate,



supponiamo fatti i prodotti Pp, Qq, Rr

facciamo la differenza Pp − Qq dico, che essa è uguale ad Rr, fra poco lo dimostro, intanto si vede, che se Pp − Qq è positiva, R tende a far girare nel senso di P, e che se Pp − Qq è negativa, ossia che se Qq − Pp è positiva, R tende a far girare nel senso della forza Q; se poi Pp = Qq, allora Rr = 0, R non essendo zero, dovrà essere r = 0, ossia vi sarà equilibrio.

Dimostro, che Pp − Qq = Rr. Perciò tiriji OA, e vi innalzi XX, a essa perpendicolare, si proiettino quindi i punti P, Q, R sulla di XX, in π, ξ, ρ, saranno Aπ, Aξ, Aρ le projezioni delle forze P, Q, R sulla di XX; ora πρ, ρξ sono anche come Aξ, Aπ projezioni delle forze Q, P sopra XX, dunque πρ = Aξ, ρξ = Aπ, ed Aρ = Aξ − ρξ = Aξ − Aπ, ma Aρ = R cos RAX, Aξ = Q cos QAX, Aπ = P cos PAX, dunque R cos RAX = Q cos QAX − P cos PAX, introduciamo gli angoli, che P, Q, R fanno con OA, questa equazione diventa

$R\,\mathrm{sen}\,RAO = Q\,\mathrm{sen}\,QAO - P\,\mathrm{sen}\,PAO$, e se moltiplichiamo ambi i membri per AO,

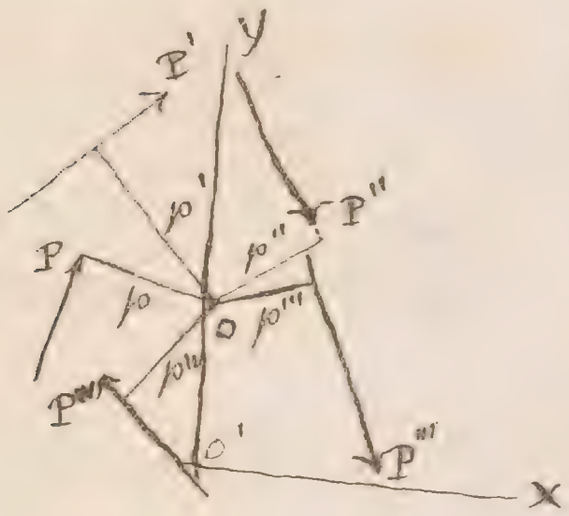
$R.AO\,\mathrm{sen}\,RAO = Q.AO\,\mathrm{sen}\,QAO - P.AO\,\mathrm{sen}\,PAO$, onde, poichè $AO\,\mathrm{sen}\,RAO = r$, $AO\,\mathrm{sen}\,QAO = q$, $AO\,\mathrm{sen}\,PAO = p$, $Rr = Qq - Pp = -(Pp - Qq)$. Poichè come si vede nella figura R agisce nel senso di Q, abbiamo trovato $Pp - Qq$ negativa, non tenendo conto del segno, abbiamo $Rr = Pp - Qq$;

Se il punto O non è nell'angolo PAQ, con un ragionamento analogo si dimostra, che $Rr = Pp + Qq$; possiamo comprendere le due formole in una sola formola $Rr = Pp \pm Qq$ intendendo, che il segno superiore vale pel caso, in cui le forze P, Q tendono a produrre rotazioni contrarie, ossia O è dentro l'angolo PAQ, l'inferiore vale pel caso, in cui le forze P, Q tendono a produrre rotazioni simili, ossia O è fuori dell'angolo PAQ.

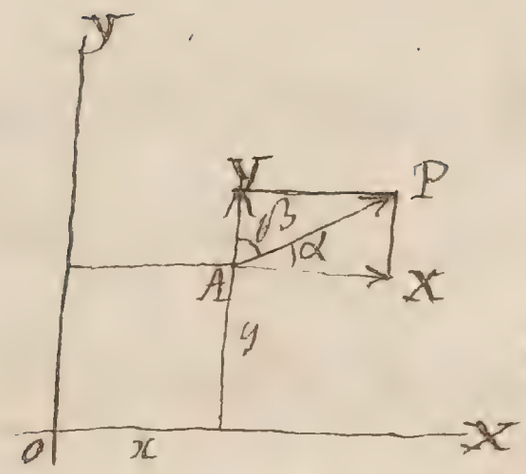
4. Il prodotto di una forza per la perpendicolare abbassata da un punto sulla di lei direzione fu denominato momento di rotazione della forza rispetto al punto. Da questa denominazione risulta, che Rr, Pp, Qq sono i momenti di rotazione delle forze R, P, Q rispetto al punto O, epperò, che il momento di rotazione della risultante di due forze preso rispetto ad un punto nel piano delle forze è equale alla somma od alla differenza dei momenti delle Componenti rispetto allo stesso punto secondochè esse tendono a produrre rotazioni simili o rotazioni contrarie. Quando il momento della risultante è positivo essa agisce nel senso della forza P, quando è negativo nel senso della forza Q, quando è zero vi ha equilibrio, ora P agisca secondo noi da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra, se però conveniamo di chiamar positive le rotazioni, che si fanno da sinistra verso destra, negativa quella da destra verso sinistra, e di chiamar positivi i momenti delle forze producenti le prime rotazioni, negativi quelli delle altre, avremo,

che il momento di P è positivo, e negativo quello di Q; quando O è fuori dell'angolo PAQ il momento di Q è positivo, possiamo dunque dire, che il momento Rv della risultante è eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti, le tal somma è zero vi ha equilibrio; ossia vi ha equilibrio se il momento d'una forza è eguale e di segno contrario al momento dell'altra.

Qualunque sia il numero delle componenti P, P', P''..... il momento della risultante è eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti, dunque $Rv = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' +$ etc, se Rv è positivo il piano girerà da sinistra a destra intorno al punto O, se R è zero vi ha equilibrio, se R è negativo il sistema girerà da destra verso sinistra. Per conoscer se vi ha equilibrio la regola generale è dunque di addizionare i momenti delle Componenti, che tendono a produr rotazione da sinistra verso destra, addizionare i momenti delle componenti, che agiscono nel senso contrario, e vedere se tali somme sieno eguali.



Per evitare di calare le perpendicolari p, p', p'' etc, introduciamo invece di queste lunghezze gli angoli, che le direzioni delle forze fanno con un sistema qualunque di assi ortogonali oy, ox, e le coordinate dei punti d'applicazione, avremo così una formola, per cui date le Componenti, i loro punti d'applicazione, ed i loro angoli cogli assi, potremo subito calcolare il momento della risultante senz'altre operazioni. Questa formola l'avremo subito, se cerchiamo come si esprime il momento d'una forza P rispetto ad un punto O per le coordinate x, y del punto d'applicazione A, e gli angoli L, B, che essa fa cogli assi.



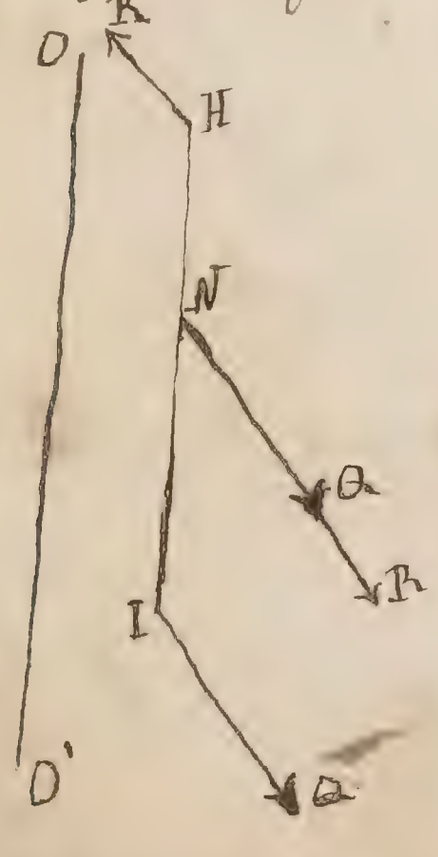
L'origine degli assi sia in O, decomponiamo la forza P in due parallele ai semiassi positivi, siano X, Y, sarà $X = P\cos\alpha$, $Y = P\cos\beta$, il momento di P sarà eguale alla differenza dei momenti di X, e di Y, poichè il momento di X è positivo, quello di Y negativo, ora i momenti di X e di Y sono Xy, Yx, dunque $Pp = Xy - Yx$, $Pp = P(y\cos\alpha - x\cos\beta)$, e $Rr = \Sigma Pp = \Sigma(Xy - Yx) = \Sigma P[y\cos\alpha - x\cos\beta]$; questa è la formola a cui volevamo arrivare.

1.ª lezione 31.ª

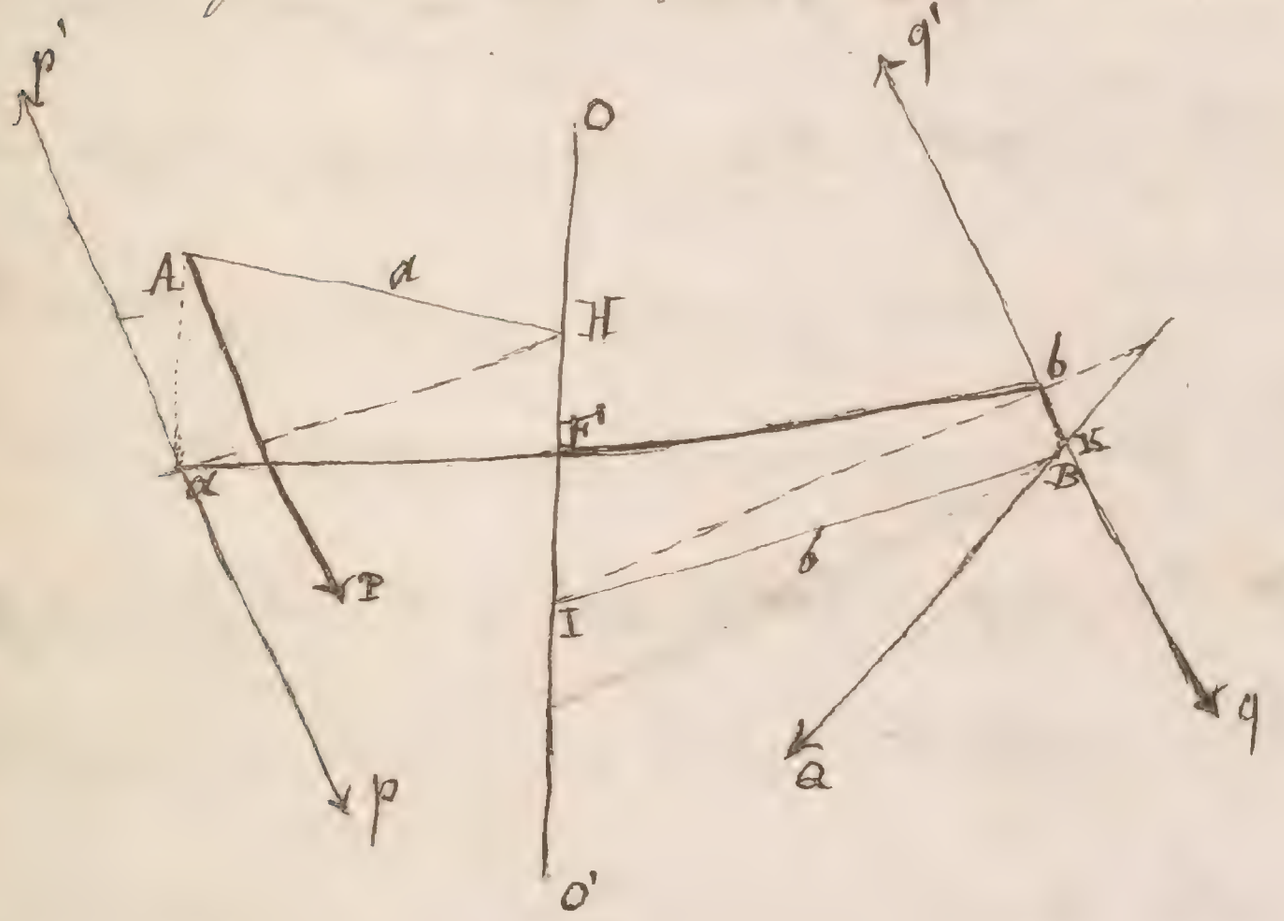
Le due sistemi di forze $P, P', P'', \ldots$ $Q, Q', Q'', \ldots$ hanno lo stesso momento rispetto ad uno stesso asse, ossia se $Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc} = Qq + Q'q' + Q''q'' + \text{etc}$, ossia concisamente $\Sigma Pp = \Sigma Qq$, essi sono equivalenti, e si possono sostituire l'uno all'altro.

Abbiam supposte le forze giacenti in uno stesso piano perpendicolare all'asse, se esse giacciano in piani diversi, ma perpendicolari all'asse, le stesse proposizioni hanno ancora luogo.

Infatti una forza giacente in un piano perpendicolare all'asse, si può trasportare sopra un altro piano perpendicolare all'asse, perchè il suo momento non cangi, senza che cangii lo stato del sistema rigido a cui è applicata la forza; per dimostrar questa teorema si osservi, che se ad un sistema volubile applico una coppia giacente in un piano parallelo all'asse; essa non cangia lo stato del sistema, se quindi si applichino in N ed H presi ad arbitrio sulla HN parallela all'asse, due forze eguali, invece della sola forza Q ne avremo tre producenti lo stesso effetto R', Q, R, o meglio due R, Q+R, e la risultante di queste due forze IQ produrrà lo stesso effetto della forza NQ, ora



queste forze sono eguali, hanno rispetto momento rispetto all'asse, e sono in piani perpendicolari all'asse, abbiamo dunque dimostrato quello che ci eravamo proposti; ciò posto trasportiamo tutte le forze operanti sul sistema e giacenti in piani diversi perpendicolari all'asse, ~~in modo~~ piano pure perpendicolare all'asse, per questa trasposizione non cangiando i momenti delle forze, non cangiando lo stato del sistema, dobbiamo concludere, che ancorchè le forze giacciano in piani diversi perpendicolari all'asse, per l'equilibrio bisogna sempre che la somma dei momenti di tutte le forze sia zero. Aggiungasi a questa conclusione servendoci dei teoremi della Lezione antecedente, è però bene, che giungiamo direttamente alla stessa condizione d'equilibrio di un sistema volubile intorno ad un'asse.



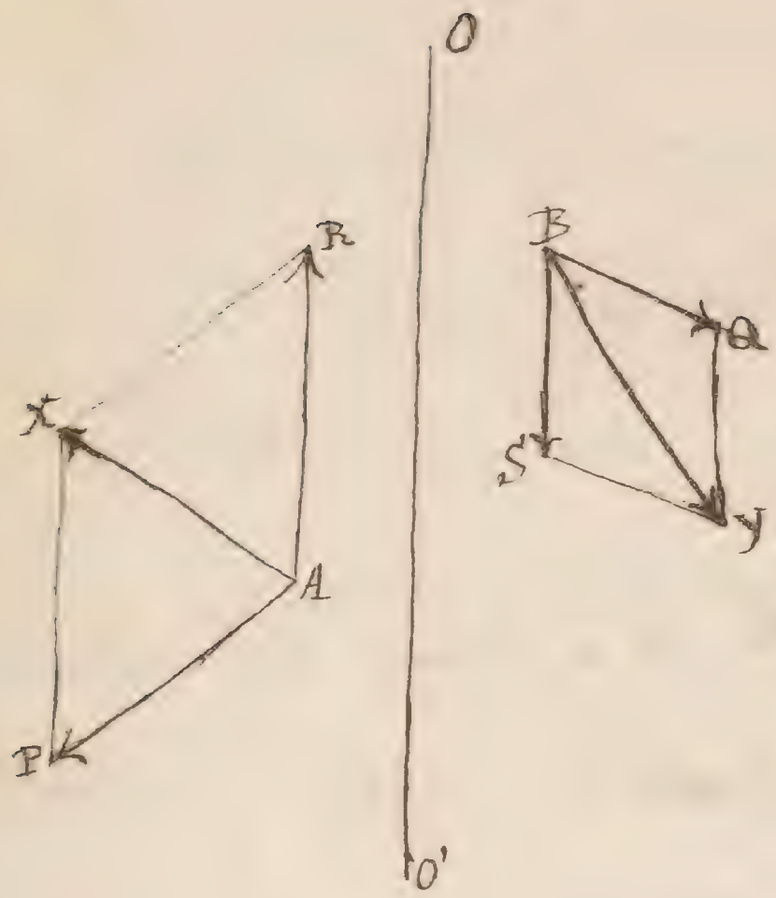
Sieno due forze P, Q giacenti in piani perpendicolari all'asse, i quali lo incontrino nei punti H, I, sieno a, b le distanze da questi punti alle direzioni delle forze; supponiamo che si abbia $Pa = Qb$ è le forze agiscano in senso contrario, e che inoltre nostro assunto è dimostrare, che si fanno equilibrio le forze P, Q, ossia, che è possibile di sostituirne altre, che incontrino l'asse.

Conduciamo per l'asse OO' un piano qualunque, esso taglierà i piani H, I secondo due rette Hα, Ib, su queste rette si prenda $Hα = HA = a$, $Ib = IB = b$, in A si intendano applicate perpendicolarmente ad Ha due forze P, P' eguali ciascuna alla forza P, e direttamente opposte, similmente in b si intendano applicate perpendicolarmente ad Ib, due forze Q, Q' ambi eguali a Q, e direttamente opposte; P, P' si fanno facendosi

equilibrio, come pure q, q', l'aggiunta di queste quattro forze non avrà cangiato lo stato del sistema, epperò se vi ha equilibrio tra le sei forze P, Q, p, p', q, q' vi ha anche equilibrio tra le forze P, Q. Ora in questo nuovo sistema di forze Q, q' si fanno equilibrio, infatti prolunghiamo la direzione della forza Q fino che incontri in K la retta qq', possiamo supporre trasportati i punti d'applica-zione delle forze Q, q' in K, stendo Q = q' evidentemente la diagonale del paral-lelogramma costrutto sopra le forze Q, q', ossia la direzione della risultante di queste forze dividerà per metà l'angolo q'KQ, ora nel quadrilatero IbKB la diagonale IK divide per metà l'angolo q'KQ, la risultante dunque delle forze Q, q' passa per l'asse, ossia le forze si fanno equilibrio; lo stesso ragionamento vale per dimostrare, che P, p' si fanno equilibrio, possiamo dunque senza cangiare lo stato del sistema togliere le forze P, p', Q, q', restano allora le sole forze p, q, queste essendo parallele hanno la loro risultante, la quale è applicata in qualche punto di ab, questa retta essendo contenuta nel piano condotto per l'asse, taglia l'asse in un punto F, e forma i triangoli HaF, IbF i quali sono simili, poichè Ha è parallela ad Ib, ed aFH = bFI, donde Fa : Fb :: Ha : Ib :: a : b, ora d'ipotesi p = P, q = Q,

P : Q :: b : a, dunque P : Q :: Fb : Fa, dunque la risultante delle forze p, q passa per l'asse, dunque vi ha equilibrio tra le date forze P, Q.

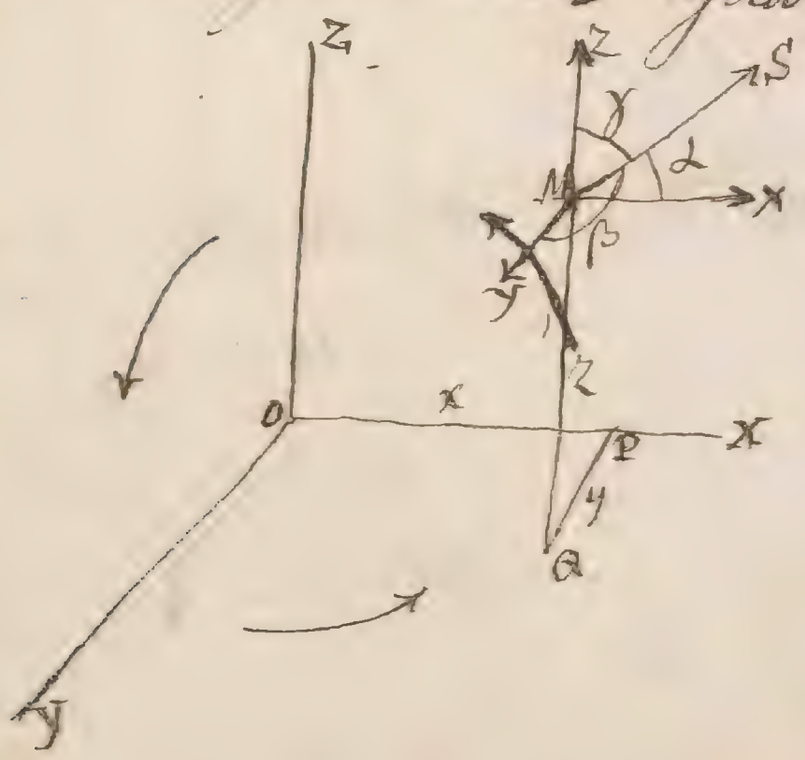
Da questo teorema risulta, che una forza applicata ad un sistema volu-bile intorno ad un' asse, e giacente in un piano perpendicolare all' asse, può cangiar di posizione nello stesso piano, od esser trasportata in un piano qualunque perpendicolare all'asse, perchè il suo momento di rotazione rispetto all'asse non cambii.



Siano ora due forze comunque dirette AX, BY, scomponiamole ciascuna in due, una parallela all'asse, l'altra ~~diretta secondo~~ giacente ~~in un~~ piano perpendicolare all'asse, e la cui direzione comunica colla retta intersezione di questo piano, col piano parallelo all'asse contenente la forza data, sieno P, R, Q, S le componenti delle forze X, Y, le forze parallele all'asse possiamo trascurarle, poichè non capaci da se di produrre alcun movimento, restano le forze P, Q, queste forze si fanno equilibrio quando hanno i momenti eguali e di segno contrario, dunque le forze X, Y si fanno equilibrio, quando i momenti delle loro componenti P, Q sono eguali, e di segno contrario.

Per generalizzare il teorema della pagina antecedente si conviene di chiamare momento di rotazione rispetto all'asse OO' di una forza X comunque applicata al sistema e comunque diretta il momento della sua componente P giacente in un piano perpendicolare all'asse. Da questa convenzione risulta il teorema generale, che

Due forze applicate ad un sistema volubile intorno ad un asse si fanno equilibrio, quando i loro momenti di rotazione sono eguali e di segno contrario.



I momenti di rotazione di una forza S rispetto ~~ai tre~~ a tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz, se sieno le componenti di S parallele agli assi,

$$\begin{cases} X = S\cos\alpha \\ Y = S\cos\beta \\ Z = S\cos\gamma \end{cases}$$

e le chiamiamo positive le rotazioni da y verso x, da x verso z, da z verso y,

sono rispetto ad oz --- $Xy - Yx$
rispetto ad oy --- $Zx - Xz$
rispetto ad ox --- $Yz - Zy$

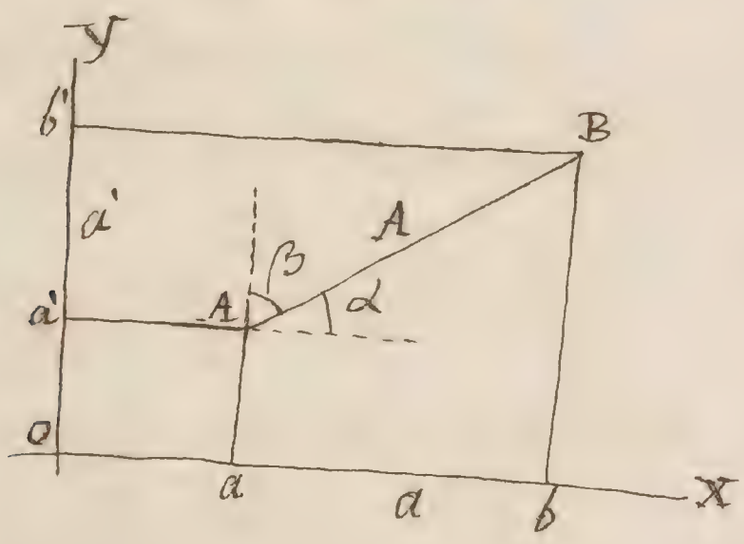
Lezione 32ª

Nelle lezioni antecedenti abbiamo determinate le condizioni a cui debbono soddisfare i momenti di un sistema qualunque di forze rispetto ad un' asse qualunque, perchè il sia equilibrio, dobbiamo ora risolvere i due problemi seguenti,

Dato un sistema qualunque di forze determinare i momenti di rotazione di questo sistema rispetto a qualunque asse.

Dati i momenti di rotazione di un sistema di forze rispetto a tre assi ortogonali dedurre il momento di rotazione dello stesso sistema rispetto a qualunque altro asse.

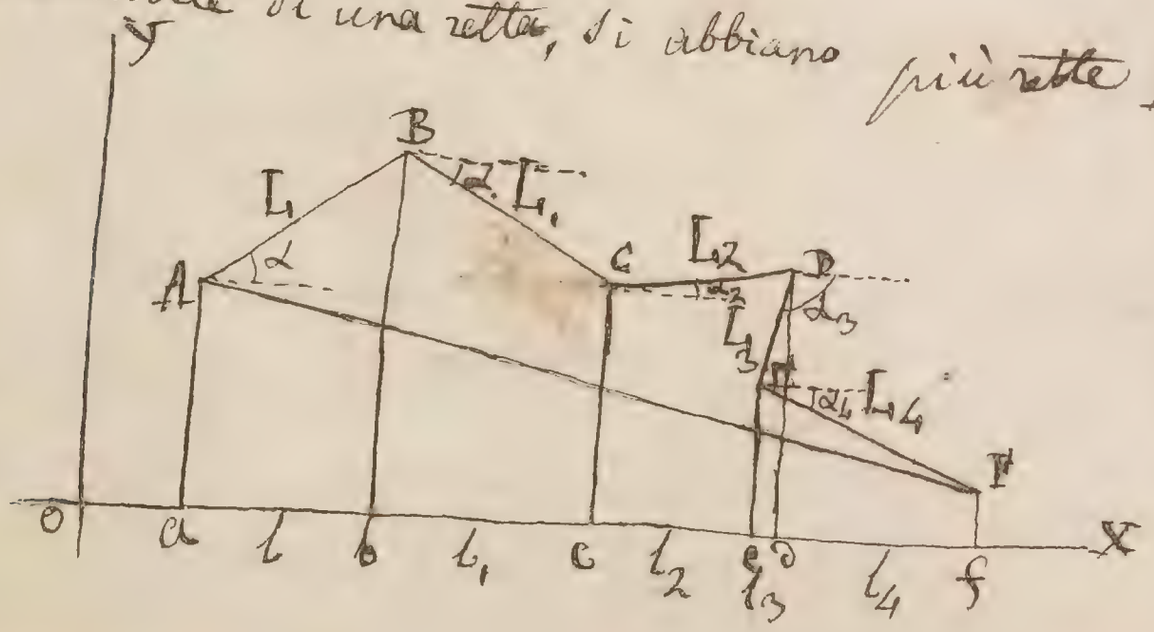
Premettiamo alcuni lemmi geometrici relativi alle proiezioni di rette e piani sopra rette e piani dati.



Sia sopra il piano yox una retta AB di lunghezza A, la proiezione ortogonale di A sopra un'altra retta ox contenuta nello stesso piano sia $ab = a$, sia α l'angolo di AB con ox, abbiamo $ab = a = A\cos\alpha$, parimente la proiezione $a'b' = a'$ di AB sopra oy, se sia β l'angolo di AB con oy, è $a' = A\cos\beta$.

Se oy, ox sono perpendicolari tra di loro, come nella fig.ª, $\beta = 90 - \alpha$, ed $a^2 + a'^2 = A^2$, in questa equazione non vi sono gli angoli α, β; dunque la somma dei quadrati delle proiezioni b, b' della retta AB su due assi ortogonali diversi da oy, ox è uguale al quadrato di AB.

Se invece di una retta, si abbiano più rette $AB, BC, CD, DE, \ldots$, le cui lunghezze sieno $L, L_1, L_2, L_3 \ldots$, e le cui proiezioni sopra di una retta ox sieno $l, l_1, l_2, l_3 \ldots$, abbiamo

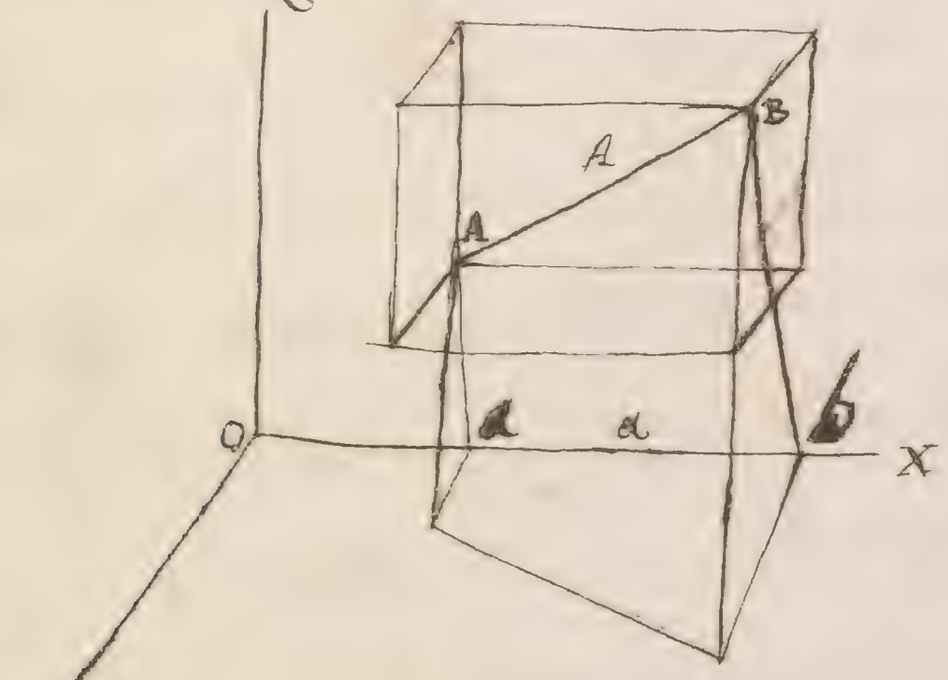


$\alpha_1 \alpha_1$ α_2 α_3 --- gli angoli delle rette con OX, abbiamo $l = L \cos\alpha$, $l_1 = L_1 \cos\alpha_1$, $l_2 = L_2 \cos\alpha_2$, $l_3 = L_3 \cos\alpha_3$ ------. Sora stabiliamo un verso per cui dobbiamo considerare ~~le~~ rette positive, che per es. debbansi considerare come positive quelle che a partire dal punto A son dirette da sinistra verso destra, avremo alcune rette, che faranno angoli acuti, ed altre, che faranno angoli ottusi con OX, le proiezioni delle prime in questa convenzione saranno positive, quelle delle altre negative. Posta questa convenzione, evidentemente la proiezione della retta AF, che unisce i due punti estremi del sistema di rette, che consideriamo, è eguale alla somma algebrica delle proiezioni di tutte le rette del sistema; se dunque n sia il numero delle rette del sistema compresa AF, od in altri termini se si abbia un poligono chiuso di n lati, abbiamo

$$L_{n-1} \cos\alpha_{n-1} = L \cos\alpha + L_1 \cos\alpha_1 + L_2 \cos\alpha_2 + \text{-----},$$

essendo L_{n-1} il lato AF, ossia quello, che chiude il poligono, il quale comincia da F, estrema con OX angolo ottuso, cangiando il segno perciò a $\cos\alpha_{n-1}$, e portando tutto in un membro nella equazione, avremo $L \cos\alpha + L_1 \cos\alpha_1 + L_2 \cos\alpha_2 + \text{- - -} + L_{n-1} \cos\alpha_{n-1} = 0$, dunque la somma delle proiezioni dei lati di un poligono chiuso è zero.

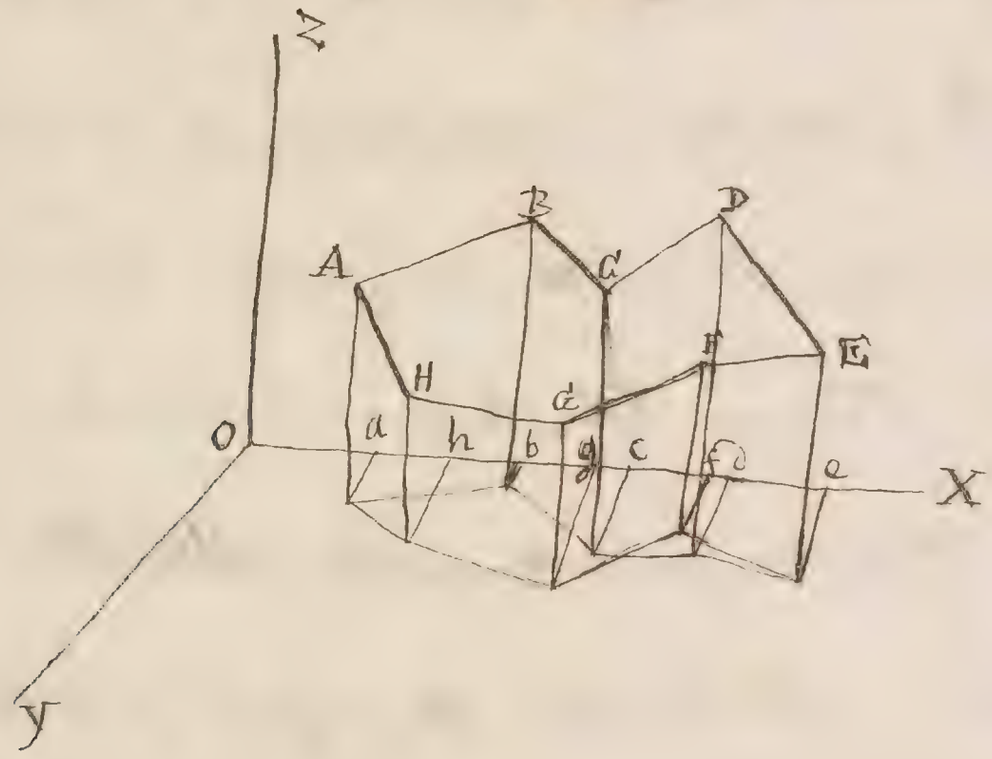
Se una retta AB=A si proietta su di un'altra qualunque OX, con cui faccia un'angolo α, la proiezione $ab = a = A \cos\alpha$; se la proiettiamo la stessa retta su tre assi ortogonali OX, OY, OZ, e sieno a, a', a'' le tre proiezioni costruendo un parallelepipedo rettangolo, la cui diagonale sia AB, e i cui spigoli sieno paralleli agli assi,



si vede evidentemente, che, se sieno $\alpha, (\beta), \gamma$ gli angoli di AB cogli assi

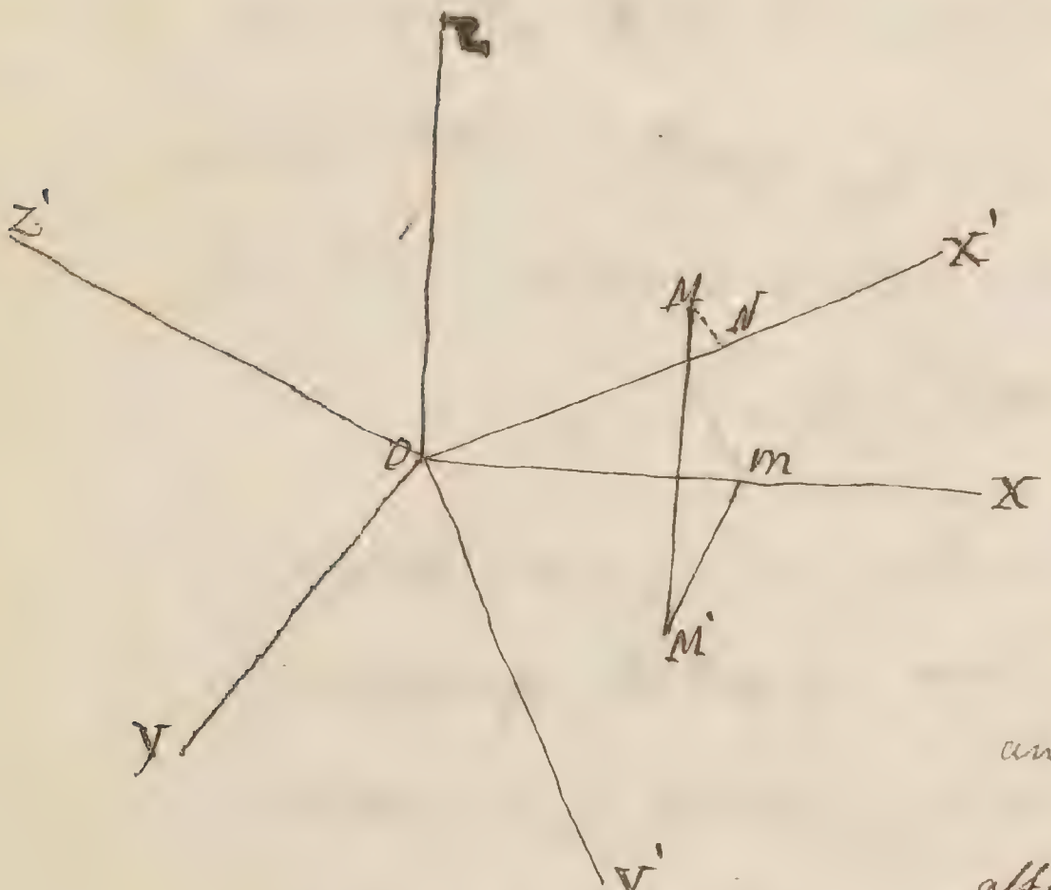
$$\left.\begin{aligned} a &= A\cos\alpha \\ a' &= A\cos\beta \\ a'' &= A\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{ed } a^2+a'^2+a''^2 = A^2.$$

Se si proiettino più rette AB, BC, CD ---- GH sopra una retta OX, e Se Stabiliamo anche qui la convenzione, che le rette sieno positive Le sono dirette da sinistra verso destra cominciando a contare dal punto A, e negative Le dirette in senso contrario, Le prime faranno angoli acuti con OX, Le seconde angoli ottusi, e potremo facilmente con-



- chiudere, che la proiezione della retta, che unisce il punto A, e l'ultimo H è eguale alla somma algebrica delle proiezioni di tutti i lati del poligono Sghembo ABC---HA meno AH.

Quindi ne risulta un mezzo di stabilire le formole per la trasposizione delle coordinate nello spazio, ossia le formole, che danno i valori delle coordinate x', y', z' rispetto



ad un nuovo sistema di assi di un punto M per mezzo delle coordinate x, y, z dello stesso punto rispetto agli antichi assi. Rimanendo l'origine sempre la stessa ciò che determina la posizione dei nuovi assi sono gli angoli, che ciascuno di essi fa cogli antichi assi, sieno α, β, γ gli angoli, che il nuovo asse OX' fa cogli assi antichi, e α', β', γ' gli angoli, che OY' fa cogli stessi assi, e $\alpha'', \beta'', \gamma''$ gli angoli, che OZ' fa cogli stessi assi, Da M si abbassi MN perpendicolare su di OX' sarà $ON = x'$, ON può si considerare come lato del poligono sghembo OmM'MNO, la sua proiezione su di OX' è dunque eguale alla somma algebrica delle proiezioni sopra OX' delle quattro rette Om, mM', M'M, MN, ora la proiezione di ON è $ON = x'$, quella di Om è $= x\cos\alpha$, la proiezione di $mM' = y\cos\beta$, la proiez^e di $MM' = z\cos\gamma$, la proiezione di MN è zero,

dunque che $\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \\ y' = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' \\ z' = x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' \end{cases}$ (1), in modo analogo si può dimostrare, in queste equazioni vi sono nove costanti $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, non possono però prendersi arbitrarie, tra esse devono esistere le relazioni

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1 \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1 \end{cases} \quad (2)$$

, inoltre siccome il coseno, che due rette $0X', 0Y'$ fanno tra di loro si determina per i coseni degli angoli, che le rette fanno cogli assi, ed è $= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$, e siccome queste rette sono perpendicolari tra di loro, e perpendicolari ad $0Z'$, ne segue, che fra gli angoli α, β, γ ..... dovranno ancora aver luogo le relazioni

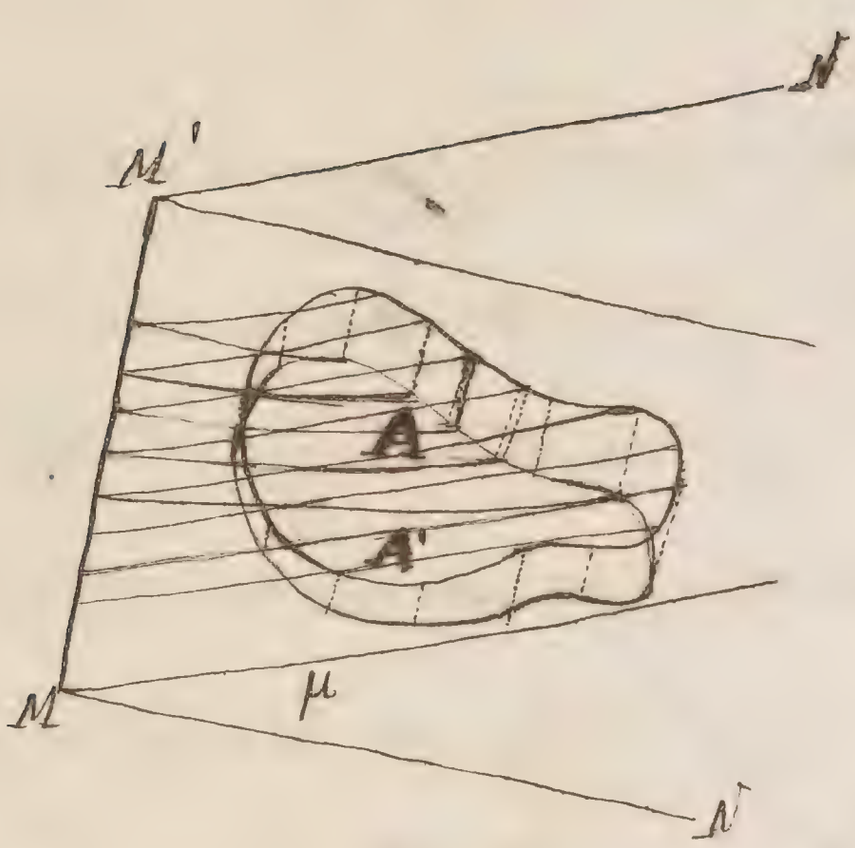
$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0 \\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0 \\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0 \end{cases} \quad (3)$$

, tre dei nove angoli si possono dunque prender ad arbitrio, e non di più.

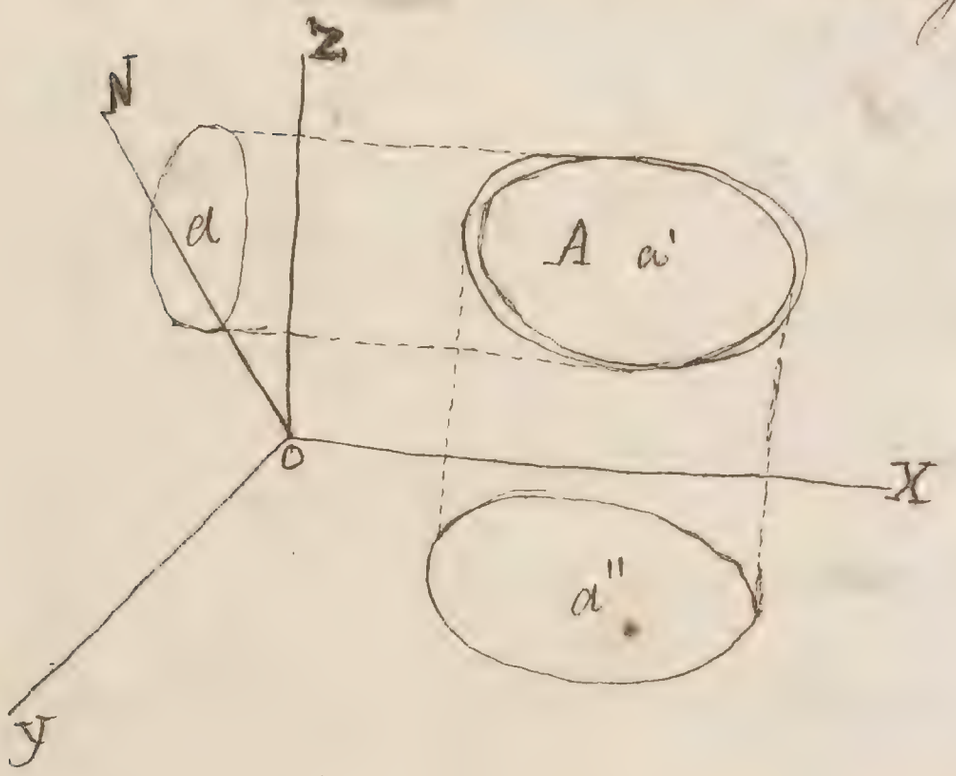
Queste formole assai eleganti e facili a ritenersi per la loro simmetria non son però le più comode nei casi pratici, si impiegano perciò altre formole per cui son necessarii tre angoli scelti ad arbitrio, questi angoli furono scelti nel modo il più conveniente, e sono l'angolo, che il nuovo piano delle xy fa coll'antico, l'angolo, che la loro intersezione fa coll'asse antico delle x, e l'angolo che la detta intersezione fa col nuovo asse delle x; per stabilire tali formole si richiede la cognizione della Trigonometria sferica, noi però ci terremo alle prime formole.

Risolvendo le equazioni (1) rispetto ad x, y, z, si hanno queste coordinate espresse per x', y', z', e quindi le formole per ritornare dal nuovo sistema di assi all'antico, ma osservando, che gli assi di questo fanno coi nuovi gli angoli $\begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'' \\ \beta, \beta', \beta'' \\ \gamma, \gamma', \gamma'' \end{matrix}$ abbiamo tosto

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'' \\ y = x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'' \\ z = x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma'' \end{cases}.$$



La projezione di un'area piana A sopra un piano M'MN è eguale al prodotto dell'area A pel coseno dell'angolo μ, che il piano dell'area fa col piano di projezione. Infatti dividendo l'area A in parti rettangole con rette parallele e perpendicolari all'intersezione dei due piani MN, le projezioni di queste rettangoli sono rettangoli, le cui basi sono eguali e eguali a quelle dei rettangoli che si projettano, e le cui altezze sono eguali alle altezze di queste moltiplicate pel coseno dell'angolo μ, dunque ciascun rettangolo projezione è eguale al rettangolo projettato moltiplicato pel coseno dell'angolo dei due piani ora A' è la somma di tali rettangoli projezioni, dunque $A' = A \cos\mu$.



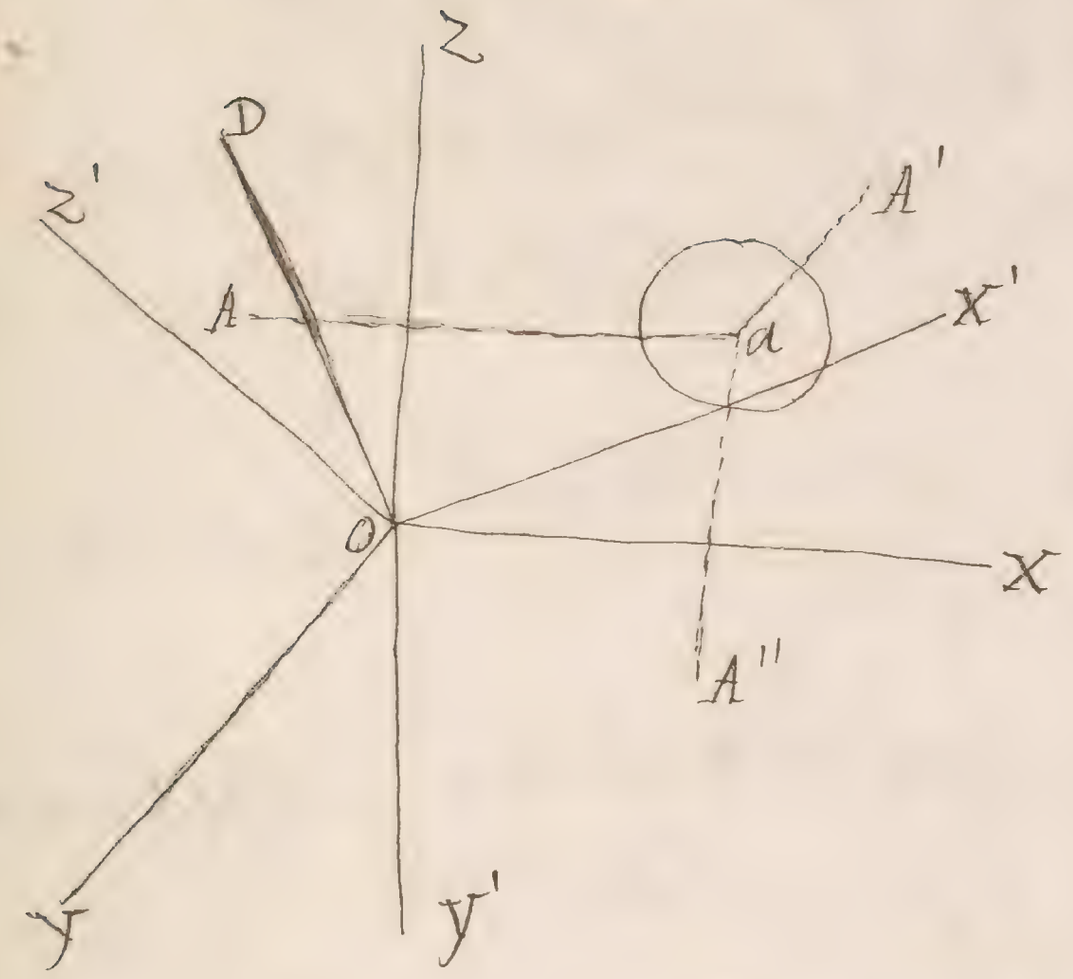
Dunque se un'area A la projettiamo sui tre piani ortogonali OXZ, OXY, e chiamiamo a, a', a'' le tre projezioni e se ON sia una perpendicolare al piano dell'area A, avrassi

$$\begin{cases} a = A\cos NOX \\ a' = A\cos NOY \\ a'' = A\cos NOZ \end{cases}$$

elevando al quadrato ciascun membro di queste equazioni e sommandole hassi $a^2 + a'^2 + a''^2 = A^2$, equazione, la quale essendo indipendente dagli angoli del piano dell'area con i piani coordinati conviene anche alle projezioni b, b', b'' dell'area A sui tre altri piani coordinati qualunque.

Si può chiedere di determinare i piani coordinati in modo, che una delle projezioni a di A sia la massima possibile; essendo $a^2 = A^2 - (a'^2 + a''^2)$ si vede, che il valor massimo di a corrisponde ai valori $a' = 0, a'' = 0$, allora $a = A$, ed il piano delle YZ è parallelo al piano dell'area A.

Lezione 33.ª



Un'area a nello spazio la projettiamo sopra tre piani ortogonali yz, xz, xy, chiamiamo A, A', A'' le tre projezioni, supponiamo, che per la medesima origine si conducano tre altri piani ortogonali determinati dagli angoli (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$, che i nuovi le projezioni A, A', A'', e le projezioni

Infatti supponiamo sia OD una perpendicolare al piano dell'area a sarà $B = a.\cos X'OD$, ora

$\cos X'OD = \cos\alpha \cos XOD + \cos\beta \cos YOD + \cos\gamma \cos ZOD$, dunque

a $\cos X'OD = B = a\cos XOD.\cos\alpha + a\cos YOD.\cos\beta + a\cos ZOD.\cos\gamma = A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma$,

nello stesso modo si dimostrano esser vere le due ultime relazioni sovrascritte.

In tutte queste equazioni non essendovi gli angoli dell'area a coi piani coordinati, ne segue,

afti fanno coi primitivi, dico, che tra B, B', B'' passeranno le relazioni seguenti

$$(1)\quad \begin{cases} B = A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma \\ B' = A\cos\alpha' + A'\cos\beta' + A''\cos\gamma' \\ B'' = A\cos\alpha'' + A'\cos\beta'' + A''\cos\gamma'' \end{cases}$$

Se fossero date B, B', B'' e si volessero A, A', A'' si avrebbe

$$\begin{cases} A = B\cos\alpha + B'\cos\alpha' + B''\cos\alpha'' \\ A' = B\cos\beta + B'\cos\beta' + B''\cos\beta'' \\ A'' = B\cos\gamma + B'\cos\gamma' + B''\cos\gamma'' \end{cases}$$

che se si abbia un numero qualunque di aree $a_1\ a_2\ a_3$----, le cui projezioni sui primi piani coordinati sieno $A_1\ A_2\ A_3$, e le cui projezioni sui secondi sieno $B_1\ B_2\ B_3$ / $A'_1\ A'_2\ A'_3$ ---
$B'_1\ B'_2\ B'_3$ --- / $A''_1\ A''_2\ A''_3$
$B''_1\ B''_2\ B''_3$

, avrassi ancora

$$\begin{cases} B_1 = A_1\cos\alpha + A_1'\cos\beta + A_1''\cos\gamma \\ B_1' = A_1\cos\alpha' + A_1'\cos\beta' + A_1''\cos\gamma' \\ B_1'' = A_1\cos\alpha'' + A_1'\cos\beta'' + A_1''\cos\gamma'' \end{cases} , \quad \begin{cases} B_2 = A_2\cos\alpha + A_2'\cos\beta + A_2''\cos\gamma \\ B_2' = A_2\cos\alpha' + A_2'\cos\beta' + A_2''\cos\gamma' \\ B_2'' = A_2\cos\alpha'' + A_2'\cos\beta'' + A_2''\cos\gamma'' \end{cases} , \text{----},$$

se sommiamo i valori di B, B_1, B_2 ---- , come pure quelli di B', B_1', B_2' ---- ,

e di B'', B_1'', B_2'', ---- , abbiamo

$$\begin{cases} B + B_1 + B_2 + \text{---} = (A + A_1 + A_2 + \text{---})\cos\alpha + (A' + A_1' + A_2' + \text{---})\cos\beta + (A'' + A_1'' + A_2'' + \text{---})\cos\gamma \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

Se le somme delle projezioni [redacted] le chiamiamo A, A', A'', B, B', B'', abbiamo $\begin{cases} A, A_1, A_2, \text{---}, B, B_1, B_2, \text{---} \\ A', A_1', A_2' \text{----}, B', B_1', B_2' \text{----} \end{cases}$

per questo, come per le projezioni di un'area sola ---------

$$\begin{cases} B = A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma \\ B' = A\cos\alpha' + A'\cos\beta' + A''\cos\gamma' \\ B'' = A\cos\alpha'' + A'\cos\beta'' + A''\cos\gamma'' \end{cases}$$

. Perchè queste relazioni abbiano un significato ben preciso è necessaria un' avvertenza.

Ogni piano ha due faccie, che possiamo distinguer superiore ed inferiore, o per meglio distinguerle, che possiamo fingerci una bianca, l'altra nera, nel sollevare una perpendicolare al piano la possiamo innalzare ad una faccia od all'altra, per saper dire che segno debbano essere affette le proiezioni, siccome queste dipendono dagli angoli del piano su cui è l'area da projettare coi piani di projezioni, e questi angoli son misurati dagli angoli, che fa una perpendicolare al detto piano con delle perpendicolari ai piani di projezione, bisogna far una convenzione, per determinare quale delle due faccie dei piani di projezione del piano dell' area si debbano innalzare le perpendicolari; supponiamo, che ciascuno di questi piani abbia una faccia bianca e l'altra nera; conveniamo di ergere le perpendicolari alle faccie bianche, se la perpendicolare alla faccia bianca del piano dell' area fa angolo acuto con la perpendicolare al piano di projezione, la projezione è

positiva, se fa angolo ottuso la projezione è negativa.

Da questa convenzione risulta, che le somme B, B', B'', A, A', A'', che poch'anzi abbiamo introdotte, sono somme algebriche; se eleviamo al quadrato i membri delle tre ultime equazioni scritte, e le sommiamo, abbiamo, fatte le debite riduzioni somministrate dalle relazioni, che esistono fra i coseni degli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots\ldots$, $B^2+B'^2+B''^2=A^2+A'^2+A''^2$; questa equazione tradotta in italiano si dice, che la somma dei quadrati delle somme algebriche delle projezioni di un sistema di aree su tre piani ortogonali è eguale alla somma dei quadrati delle somme algebriche delle projezioni dello stesso sistema sopra tre piani ortogonali qualunque diversi dai primi, od in altri termini, che la somma dei quadrati delle somme algebriche delle projezioni di un sistema di aree su tre piani ortogonali rimane costante col variare dei piani ortogonali di projezione.

Questo teorema è conosciuto sotto il nome di Complemento del teorema di Pitagora.

La somma costante $A^2+A'^2+A''^2$ chiamiamola M^2, abbiamo $B^2+B'^2+B''^2=M^2$, e $B^2=M^2-(B'^2+B''^2)$, da quest'ultima equazione si vede, che il valor massimo, che possa avere B è $B=M$, al qual valore corrispondono $B'=0, B''=0$, possiamo dunque modificare l'enunciato del teorema antecedente nel modo seguente; la somma dei quadrati delle somme algebriche delle projezioni di un sistema di aree su tre piani ortogonali qualunque è eguale al quadrato della somma massima delle projezioni delle aree del sistema.

Quando $B=M$, essendo $B'=0, B''=0$, le formole, che danno i valori di B, A', A'' per mezzo di B, B', B'', e sono $\begin{cases} A=B\cos\alpha+B'\cos\alpha'+B''\cos\alpha'' \\ \text{---------} \\ \text{---------} \end{cases}$ si riducono a queste altre $\begin{cases} A=B\cos\alpha \\ A'=B\cos\beta \\ A''=B\cos\gamma \end{cases}$, e poichè $B=M=\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}$, abbiamo, rimpiazzando $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}} \\ \cos\beta=\dfrac{A'}{\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}} \\ \cos\gamma=\dfrac{A''}{\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}} \end{cases}$$

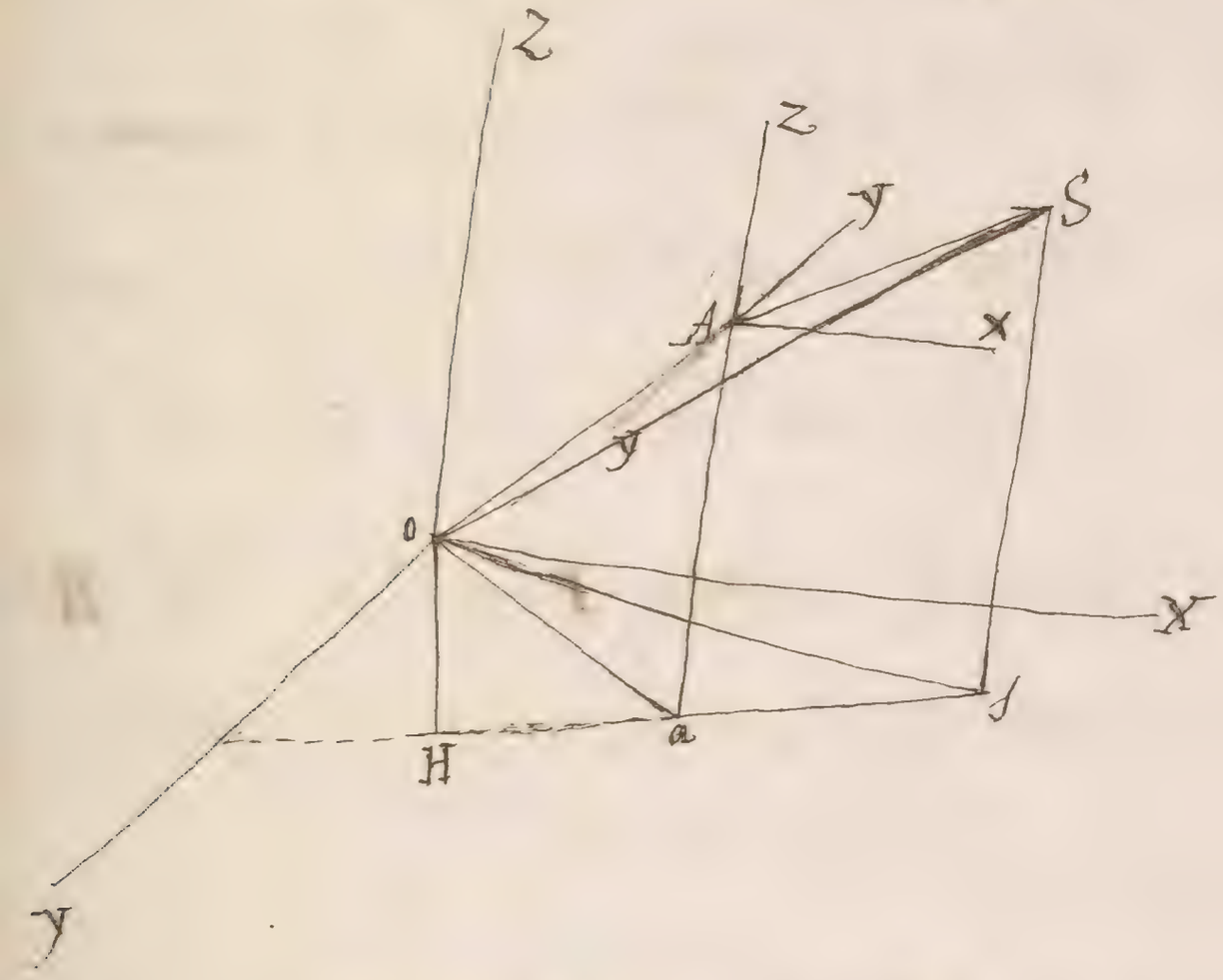
, queste formole risolvono il problema seguente:

Dato un sistema qualunque di aree piane, si projettino sopra tre piani ortogonali, si facciano le somme algebriche delle proiezioni fatte su ciascun piano, siano esse A, A', A'' si chiede di condurre un piano in modo per l'origine dei primi piani, che la ~~proj~~ somma delle projezioni delle aree del sistema su questo piano sia un massimo. Questo piano deve fare coi piani ortogonali yz, xz, xy gli angoli α, β, δ, che si hanno dalle formole antecedenti; le somme delle projezioni delle aree del sistema su due piani perpendicolari a questo sono zero.

Lezione 34ª

Dopo la lunga digressione, che abbiamo fatta torniamo ai momenti di rotazione delle forze rispetto ad un'asse. Il momento di rotazione di una forza geometricamente interpretato è un'area, poichè esso è il prodotto della retta, che rappresenta la intensità della forza per la perpendicolare comune alla direzione della forza e all'asse, se la forza giace in un piano perpendicolare all'asse, ed è il prodotto della projezione di un piano perpendicolare all'asse della retta, che rappresenta la intensità della forza

per la perpendicolare comune alla direzione della forza ed all'asse, se la forza è comunque applicata al sistema rigido; sopra sia S una forza comunque diretta, e tale, che essa sia determinata rispetto ai tre assi ortogonali OX, OY, OZ per le coordinate x, y, z del suo punto d'applicazione A, e per gli angoli, che essa fa cogli assi, e voglia si il suo momento di rotazione rispetto all'asse OZ,



scomponendo la forza S in due una parallela all'asse, l'altra giacente in un piano perpendicolare all'asse, l'intensità e la direzione di quest' ultima sono rappresentate dalla projezione as, e per conseguenza il momento di S è eguale al prodotto della retta as per la perpendicolare comune oH a questa retta, ed all'espressione anche il doppio del triangolo oas projezione del triangolo oAS, che ha per base la data forza, ed il vertice nell'origine delle coordinate, Da ciò ne consegue, che tutto quello che si è detto riguardo alle projezioni delle aree nello spazio, è immediatamente applicabile alla teoria dei momenti di rotazione delle forze.

Abbiamo trovato, che la forza S ha i suoi momenti di rotazione rispetto a tre assi ortogonali OZ, OY, OX, i quali sono rispettivamente espressi da

$$\left.\begin{matrix} Xy - Yx \\ Zx - Xz \\ Yz - Zy \end{matrix}\right\}$$

e che la somma dei momenti di più forze rispetto ai tre assi ortogonali sono espresse dalle somme algebriche di questi binomii.

Attraverso ad un sistema rigido conduciamo tre assi ortogonali, supponiamo, che sieno conosciuti i momenti di una forza S rispetto a questi assi, e sieno P, Q, R, e che si vogliano i momenti della stessa forza rispetto

che facciano coi primi gli angoli α, β, γ, conservando la stessa origine, e tre nuovi assi, chiamando questi momenti F', G', H', dico, che

$$\begin{cases} F' = F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma \\ G' = F\cos\alpha' + G\cos\beta' + H\cos\gamma' \\ H' = F\cos\alpha'' + G\cos\beta'' + H\cos\gamma'' \end{cases}$$

; infatti se chiamiamo A, A', A'' le proiezioni del triangolo OAS sui piani ~~2 proiez~~ coordinati antichi, e B, B', B'' le proiezioni dello stesso triangolo sui nuovi piani coordinati, abbiamo tra B, B', B'', A, A', A'' le relazioni (1) (Lez.ne 33ª), ed inoltre $\begin{cases} F = 2A, \ G = 2A', \ H = 2A'' \\ F' = 2B, \ G' = 2B', \ H' = 2B'' \end{cases}$ questi valori sostituiti nelle relazioni (1) suddette danno luogo alle relazioni sovrascritte.

Se al sistema rigido sieno applicate più forze $S \ S_1 \ S_2 \ldots$, i cui momenti rispetto a tre assi ortogonali sieno conosciuti, ~~troveremo~~ avremo anche le somme algebriche di questi momenti, avuto riguardo al senso in cui agiscono le forze, sieno queste somme rappresentate da F, G, H, vogliamo costruire queste somme relativamente a tre nuovi assi, che facciano coi primi gli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, le chiamiamo F', G', H' queste somme dico che tra esse e le prime hanno luogo le relazioni $\begin{cases} F' = F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma \\ G' = F\cos\alpha' + G\cos\beta' + H\cos\gamma' \\ H' = F\cos\alpha'' + G\cos\beta'' + H\cos\gamma'' \end{cases}$; Infatti la somma algebrica dei momenti di tutte le forze per es. rispetto all'asse OZ è eguale al doppio della somma algebrica delle proiezioni dei triangoli come OAS sul piano delle xy, quindi rispetto a tra le somme algebriche dei momenti esistono le stesse relazioni, che tra le somme algebriche delle proiezioni dei triangoli.

Ciò posto $F'^2 + G'^2 + H'^2 = F^2 + G^2 + H^2$, Dunque la somma dei quadrati delle somme algebriche dei momenti di rotazione ~~delle~~ di più forze rispetto a tre assi ortogonali è costante comunque varii la direzione degli assi; inoltre questa somma costante

le la rappresentiamo con M^2, M è il massimo valore, che possa acquistare la somma F', a mò d'esempio, dei momenti delle forze rispetto all'asse delle x', quest'asse deve allora fare gli angoli α, β, γ cogli assi OX, OY, OZ, i cui coseni sono

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{F'}{M} = \dfrac{F'}{\sqrt{F'^2+G'^2+H'^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{G'}{M} = \dfrac{G'}{\sqrt{F'^2+G'^2+H'^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{H'}{M} = \dfrac{H'}{\sqrt{F'^2+G'^2+H'^2}}. \end{cases}$$

le somme G', H' dei momenti rispetto a due assi perpendicolari a questo sono nulle, altre primi assi ci può dunque sostituire un solo tale, che il sistema possa rotare soltanto intorno ad esso, questo teorema vien detto Teorema della Composizione dei momenti; la proposizione inversa è evidente per se stessa; Si ha un sistema rigido volubile intorno ad un'asse, il quale fa con tre assi ortogonali gli angoli α, β, γ, a questo sistema è applicato un sistema di forze, che tende a produr rotazione con un momento M, posto sostituire ad M tre momenti $M\cos\alpha$, $M\cos\beta$, $M\cos\gamma$ rispetto agli assi ortogonali, che producano lo stesso effetto.

Le formole della Scomposizione di una forza in tre dirette secondo tre assi ortogonali sono, essendo M la forza, $M\cos\alpha$, $M\cos\beta$, $M\cos\gamma$, i momenti di rotazione hanno dunque le stesse leggi delle forze applicate ad un punto.

Delle formole della pag.a antecedente. Le $F=0, G=0, H=0$, anche $F'=0, G'=0, H'=0$, le dunque le somme dei momenti di un sistema di forze rispetto a tre assi sono nulle, sono pure nulle rispetto a qualunque asse condotto per la medesima origine.

Le ora si trasporti l'origine degli assi, e si voglia trasformare i momenti rispetto ad un sistema di assi in momenti rispetto ad un sistema di assi paralleli ai primi, dei momenti rispetto ai primi assi essendo le somme dei momenti rispetto ai nuovi assi, basterà x in $x+a$, y in $y+b$, z in $z+c$, le a, b, c sieno le della nuova origine, fatti sarà sono d'angue, diamandole f, g, h

$$\begin{cases} \Sigma(Xy-Yx)=H, \text{ per avere} \\ \Sigma(Zx-Xz)=\text{cangiare} \\ \Sigma(Yz-Zy)=F \text{ coordinate} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = \Sigma(Xy - Yx) + \Sigma(Xb - Ya) = H + b\Sigma X - a\Sigma Y \\ g = G + a\Sigma Z - c\Sigma X \\ f = F + c\Sigma Y - b\Sigma Z \end{cases}$$

; Supponiamo si trovi in un caso particolare $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $H = 0$, $G = 0$, $F = 0$, in questo caso comunque si trasportino gli assi, le somme dei momenti rispetto ad essi sono sempre nulle.

Lezione 38ª

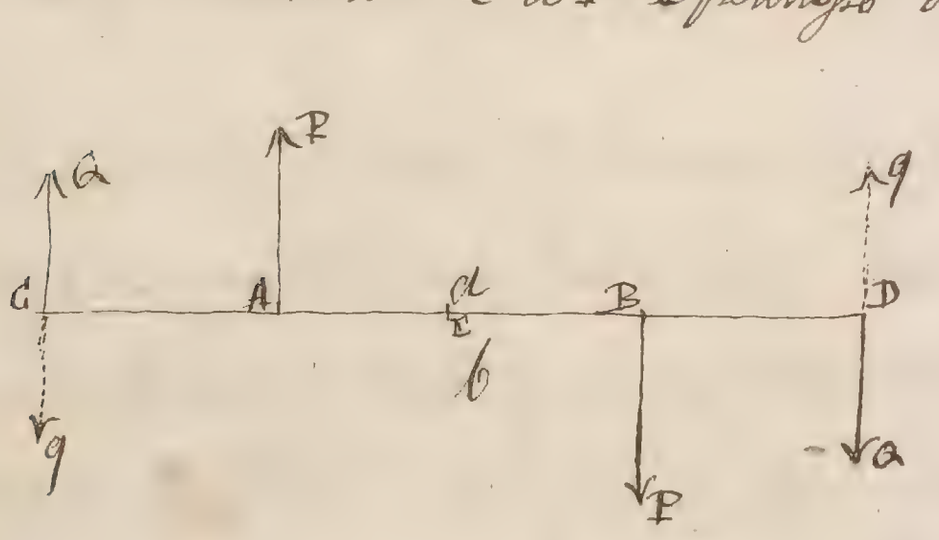
Due forze parallele, eguali, contrarie ma non opposte compongono una coppia; Una o più coppie tendono produr rotazione, quando un sistema rigido tende a rotare intorno ad uno o più assi, si può dunque intendere applicata ad esso una coppia, od anche più coppie.

La coppia ci fu già presentata già altra volta come un caso d'eccezione delle forze parallele, fra poco vedremo, che tutte le forze applicate ad un sistema rigido si possono ridurre ad una forza e ad un numero di coppie, importa perciò, che studiamo particolarmente le proprietà delle coppie.

Teoria delle coppie

L'intensità di ciascuna delle forze, che compongono una coppia si chiama l'intensità della coppia. La lunghezza della perpendicolare comune alle direzioni delle due forze si chiama il braccio della coppia. Il prodotto della intensità per il braccio si chiama momento della coppia, o anche più concisamente la coppia.

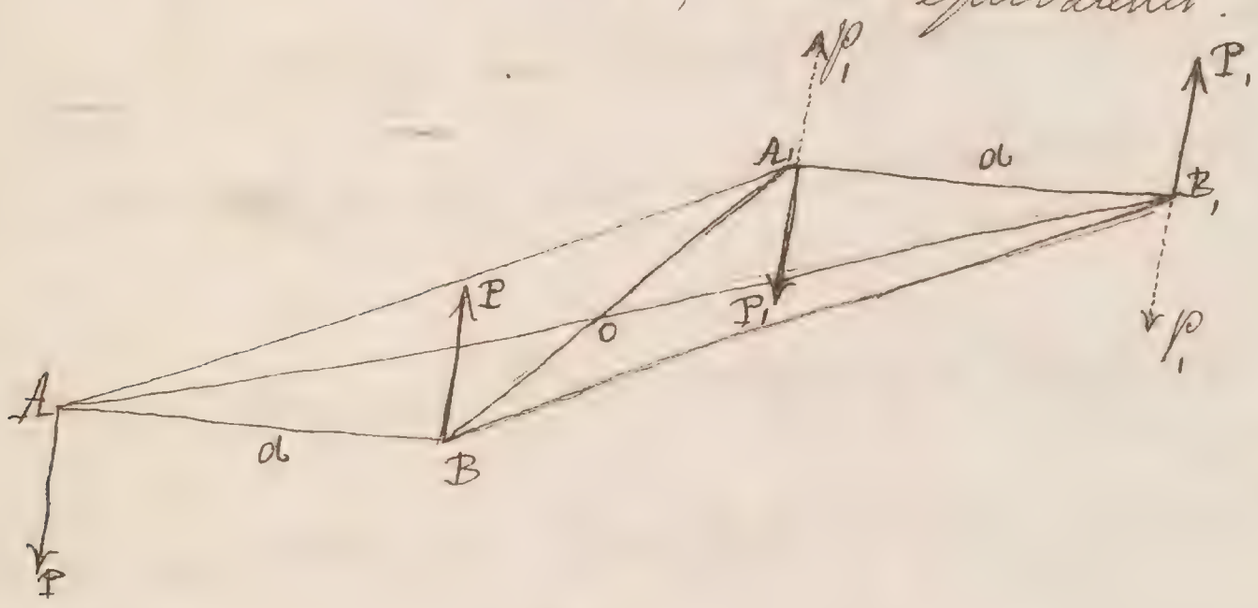
Proposizione 1ª Ad una coppia è sempre permesso di sostituirne un'altra, purchè il momento di questa sia eguale a quello della coppia data; così ad una coppia, il cui momento è aP è permesso di sostituirne un'altra, il cui momento sia bQ, purchè sia $aP = bQ$, e $AE = EB$, $CE = ED$.



Infatti due sistemi di forze se sono equivalenti, portandoli l'uno in senso contrario dell'altro, essi si fanno equilibrio (ritengasi questa verità, poichè ce ne serviremo in tutte le dimostrazioni, che daremo in seguito a questa), se dunque essendo $aP = bQ$, e tendendo le due coppie a far girare la leva rigida a cui sono applicate intorno al suo punto di mezzo, ossia essendo $AC = BD$

la coppia bQ, la cui intensità è Q, ed il cui braccio CD=b, è equivalente alla coppia aP, il cui braccio AB=a, e la cui intensità è P, voltando Q, Q in senso contrario, esse forze dovranno farsi equilibrio colle forze P, P, voltiamole, e sieno q, q le forze Q, Q così volte, le componiamo le forze volte dalla stessa parte P, P / q, q insieme, le due risultanti saranno eguali, e contrarie, e di più dico, che saranno opposte, ossia applicate in uno stesso punto; ciò è evidente, quando si osservi che il punto d'applicazione della risultante delle forze P, q dirette all'insù deve distare dalla forza P, tanto come il punto d'applicazione della risultante delle forze P, q volte all'ingiù dista dalla forza P volta all'ingiù. Le forze P, P, q, q facendosi equilibrio le due coppie P, P e Q, Q sono equivalenti.

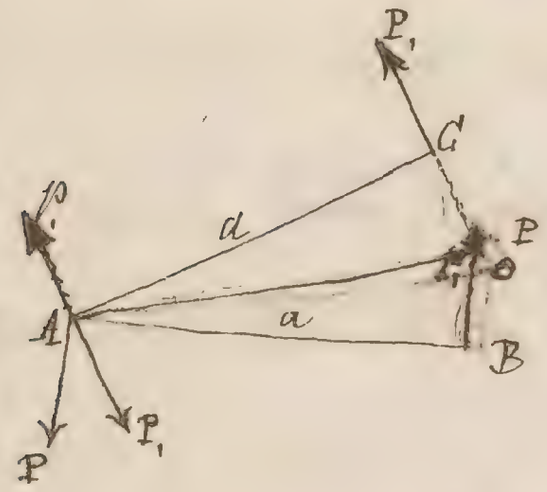
Proposizione 2.ª Una coppia si può sempre comunque trasportare parallelamente a se stessa nel proprio piano, senza che cangi l'effetto diretto, ossia due coppie parallele ed eguali, come le coppie AP, BP di A, P, , B, P, per cui A, B, = AB, AE = A, P, , sono equivalenti.



Per dimostrar ciò voltiamo la seconda coppia in senso contrario, e sieno p, , p, le forze P, , P, così voltate, dico, che le forze P, P, p, , p, si fanno equilibrio. Infatti congiungendo A con A, , B con B, , la figura AA, B, B è un parallelogrammo, se in esso tiriamo le diagonali, esse si tagliano in parti eguali in O, ora se componiamo le forze P, p, volte all'insù, e le forze P, p, volte all'ingiù, queste forze essendo eguali, i punti di mezzo nelle rette a cui sono applicate le forze, il punto O è dunque

nello stesso tempo punto d'applicazione di queste rijuttanti, inoltre queste, essendo eguali e dirette in senso contrario, si fanno equilibrio, dunque le forze P, P, P, P si fanno equilibrio. Dunque le coppie aP, aP, sono equivalenti.

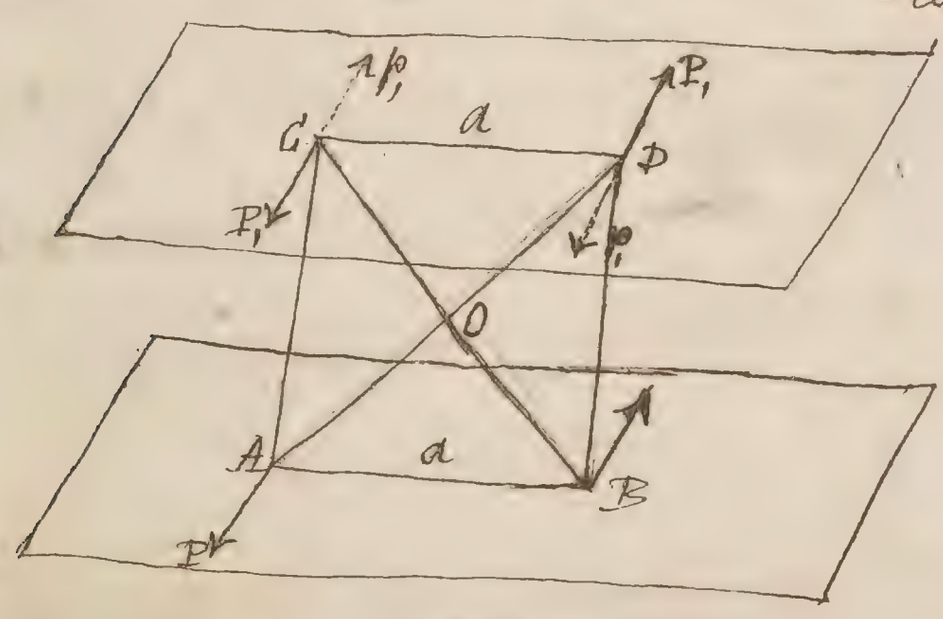
Propozizione 3.ª Una coppia si può comunque rivolgere in uno stesso piano, ossia due coppie eguali aP, aP, collocate in uno stesso piano, ma che fanno un'angolo qualunque tra di loro sono equivalenti.



Supponga la 2ª coppia volta in senso contrario, e le forze P, P, volteta in P, P, dico, che le quattro forze P, P, P, P, fanno equilibrio. Infatti si prolunghi la direzione di P, ossia GP, sino ad incontrare BP in O, si tiri AO, essendo AG=AB, la retta AO divide l'angolo BAG in due parti eguali, ma se si compongono le forze GP, BP, la loro rijultante divide anche per mezzo gli angoli CDB, CAB, essa è dunque diretta secondo AO; Se componiamo AP, con AP vedremo che la loro rijultante è eguale in intensità alla rijultante di GP, BP, diretta secondo la stessa retta AO, ma in senso contrario, queste due rijuttanti si fan dunque equilibrio, è dunque permesso di rivoltare comunque una coppia in un piano senza che cangi il suo effetto.

Corollario. Combinando questa proposizione colla precedente rijutta, che una coppia possiamo trasportarla comunque in uno stesso piano, e l'effetto sarà il medesimo.

Proposizione 4.ª Una coppia si può trasportare parallelamente a se stessa da un piano in un' altro parallelo, ossia due coppie parallele, eguali e non giacenti nello stesso piano sono equivalenti.

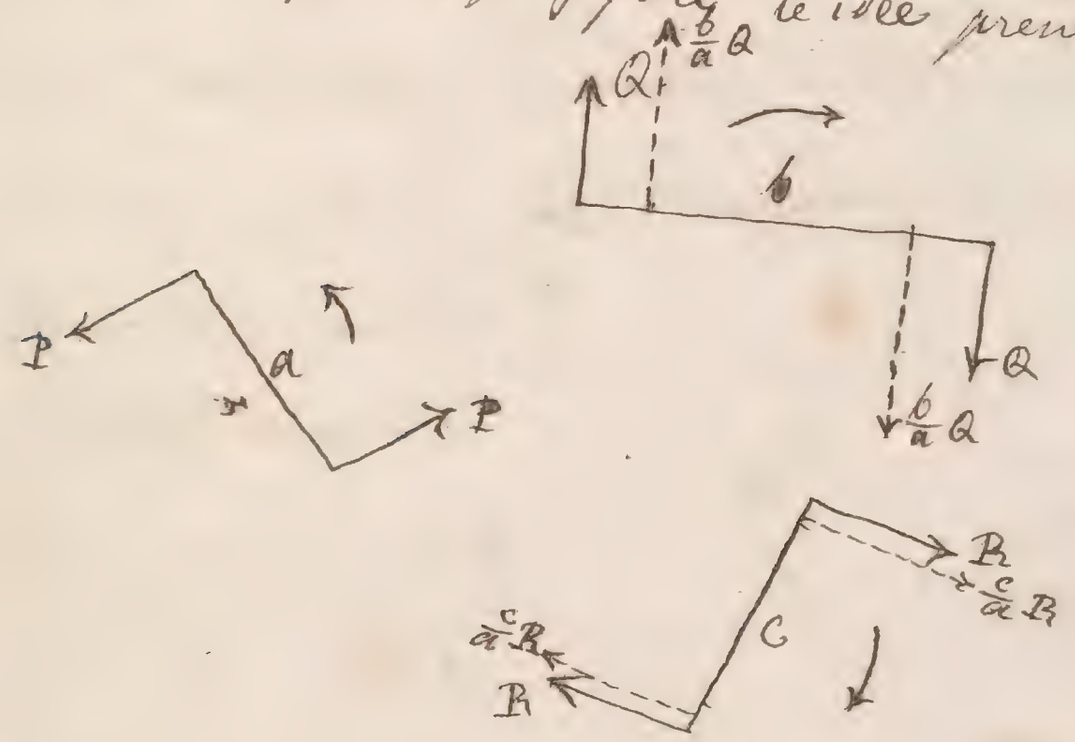


Sieno aP, aP, le due coppie, per dimostrare, che sono equivalenti, volto la seconda in senso contrario in aP, PP, e dico che le coppie aP, aP, si fanno equilibrio.

Infatti facendo il parallelogramma ABDC, e tirando in esso le diagonali, le quali si tagliano nel punto O in due parti eguali, si vede, che le quattro forze P, P, P, P, si riducono a due applicate nel punto O, eguali e direttamente opposte, le quattro forze sudette conjungono le coppie a P, a p, queste dunque si fanno equilibrio, son dunque equivalenti le Coppie a P, a P.

Corollario. Combinando questa proposizione colle precedenti ne viene, che una Coppia è sempre comunque trasportabile da un piano in un'altro parallelo, senza che cangi il suo effetto, e che trasportandola posto anche cangiarne l'intensità, il braccio, purchè rimanga il medesimo il prodotto dell'intensità per il braccio, ossia il momento.

Ammessi questi preliminari applichiamoli alla composizione delle Coppie. cominciando dai casi più semplici, tendo da comporre più Coppie tutte poste in un piano; per fissare le idee prendiamo tre Coppie a P, bQ, cR,



e componiamole, il metodo che adopreremo servirà per comporne un numero qualunque.

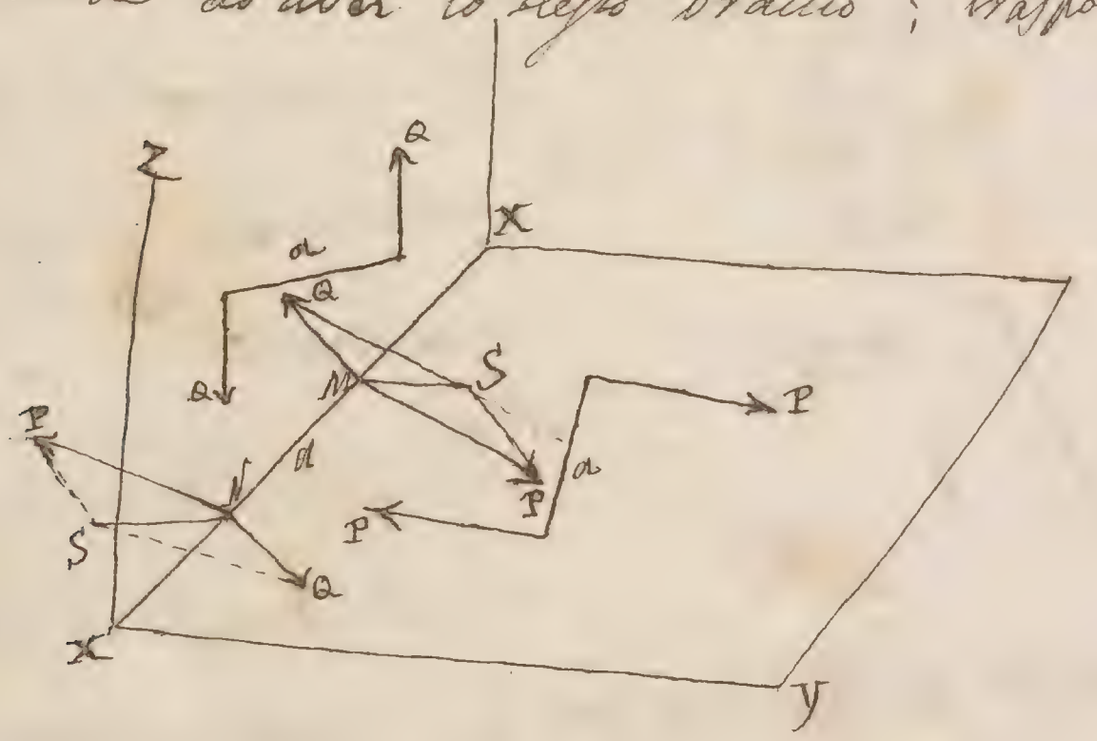
Cominciamole a ridurre ad altre aventi lo stesso braccio a della prima Coppia, le intensità delle altre due Coppie cangieranno, e saranno eguali la seconda $\frac{b}{a}Q$, la 3.a $\frac{c}{a}R$. Ciò fatto si trasportino due

Coppie, in modo, che il loro braccio coincida col braccio della terza, riducendo in una le tre forze applicate alle estremità di ciascun braccio, ne risulta una nuova Coppia, il cui braccio $=a$, e la cui intensità $= \frac{bQ+cR-aP}{a}$; il momento di

questa coppia è dunque = $bQ + cR - aP$; se convenciamo di chiamar positivi i momenti delle coppie, che tendono a produr rotazione da sinistra verso destra, e negativi i momenti delle coppie, che tendono a produr rotazione da destra verso sinistra, il momento dP sarà negativo, dunque in questa convenzione il momento della Coppia equivalente alle tre coppie date è $= dP + bQ + cR$, ora aP, bQ, cR sono i momenti delle tre coppie date, dunque il momento della coppia equivalente alle coppie date è eguale alla somma algebrica dei momenti delle coppie date; ciò è vero qualunque sia il numero delle coppie date, quindi conchiudiamo la seguente Regola —

Per ridurre un numero qualunque di Coppie ad una coppia sola si faccia la somma algebrica dei momenti delle coppie date, essa sarà il momento di una coppia unica equivalente alle coppie date.

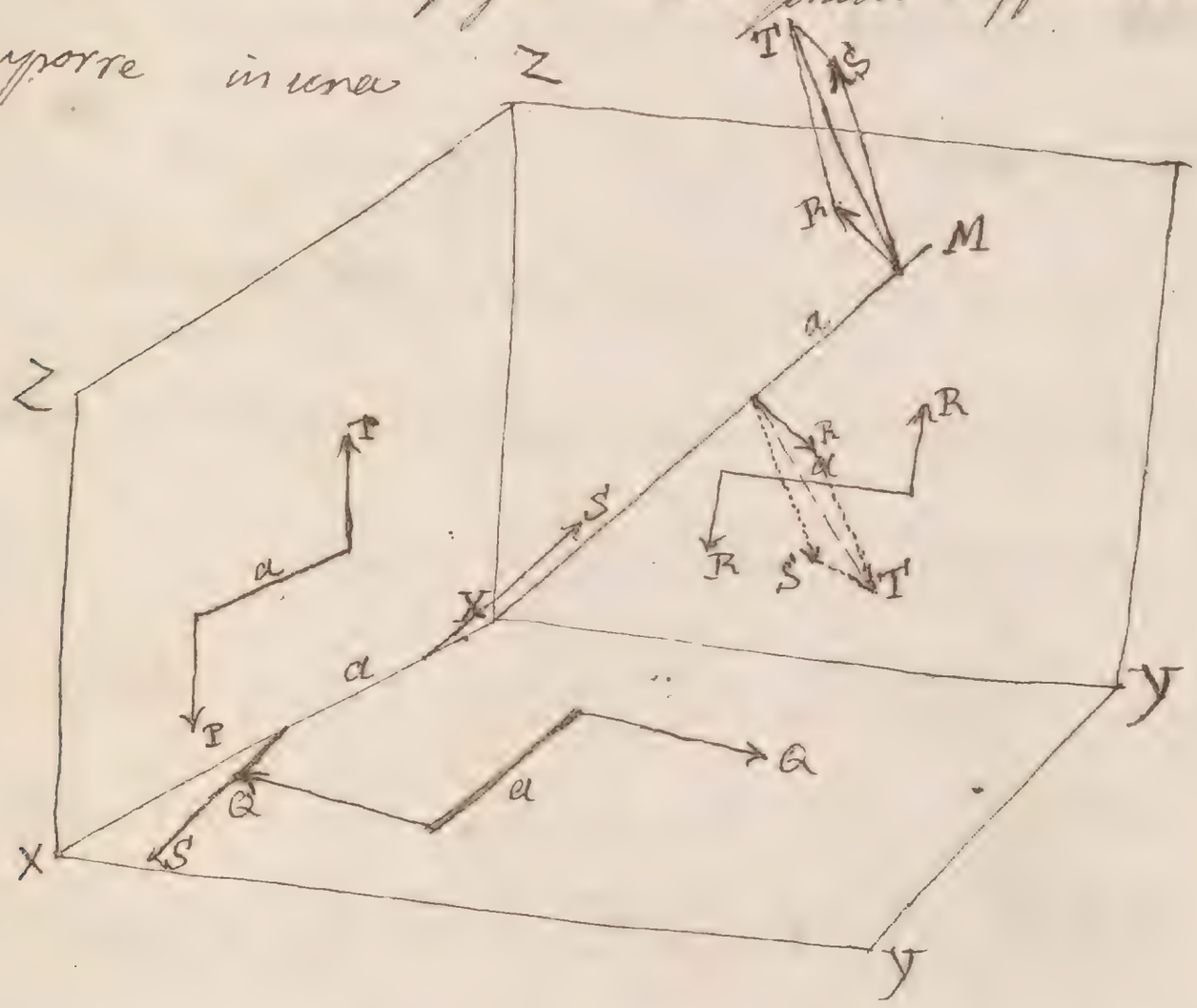
Passando a casi meno semplici, siano ora due coppie poste in piani differenti da ridursi ad una coppia unica equivalente, e siano le coppie aP, aQ, che supponga già ridotte ad aver lo stesso braccio; trasportiamole nei loro piani in modo, che i loro bracci coincidano sulla comune intersezione XX dei piani in MN, componiamo quindi MP con MQ, NP con NQ, le risultanti S, S avranno la stessa intensità, saranno eguali, contrarie, ma non opposte, esse dunque comporranno una coppia equivalente alle coppie date.



Se i due piani contenenti le coppie sono perpendicolari, allora $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, ed aS ossia il momento della coppia risultante è eguale $\sqrt{aP^2 + aQ^2}$, ossia alla radice della somma dei quadrati dei momenti delle coppie componenti; oppure, chiamando F, G i momenti delle cop

Date, K quella della risultante, $K = \sqrt{F^2 + G^2}$, perchè la coppia sia completamente determinata, bisogna conoscere ancora la posizione del piano, che la contiene, ora SM ed MP misurano l'angolo di questo piano col piano della coppia P, SM ed MQ misurano l'angolo del piano della coppia S col piano della coppia Q, dunque, chiamando α, β questi angoli, $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \dfrac{F}{\sqrt{F^2+G^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \dfrac{G}{\sqrt{F^2+G^2}} \end{cases}$;

Se le coppie sono tre poste in tre piani differenti, esse si possono facilmente comporre in una



componendo prima, se sieno $\alpha P, \alpha Q, \alpha R$ le coppie, la coppia αP con la coppia αQ, e quindi la coppia risultante αS con la coppia αR; queste due coppie essendo poste in piani differenti, che si tagliano secondo XM, si compongono nello stesso modo, che le coppie $\alpha P, \alpha Q$, in una coppia unica αT.

Se i tre piani delle coppie sono perpendicolari, allora $T = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, ed $\alpha T = \sqrt{\overline{\alpha P}^2 + \overline{\alpha Q}^2 + \overline{\alpha R}^2}$, ossia, chiamando F, G, H, K i momenti delle coppie $\alpha P, \alpha Q, \alpha R, \alpha T$, abbiamo $K^2 = F^2 + G^2 + H^2$, inoltre, chiamando λ, μ, ν gli angoli, che fa il piano della coppia risultante con i piani delle coppie P, Q, R, abbiamo $\cos\lambda = \dfrac{F}{K}$, $\cos\mu = \dfrac{G}{K}$, $\cos\nu = \dfrac{H}{K}$;

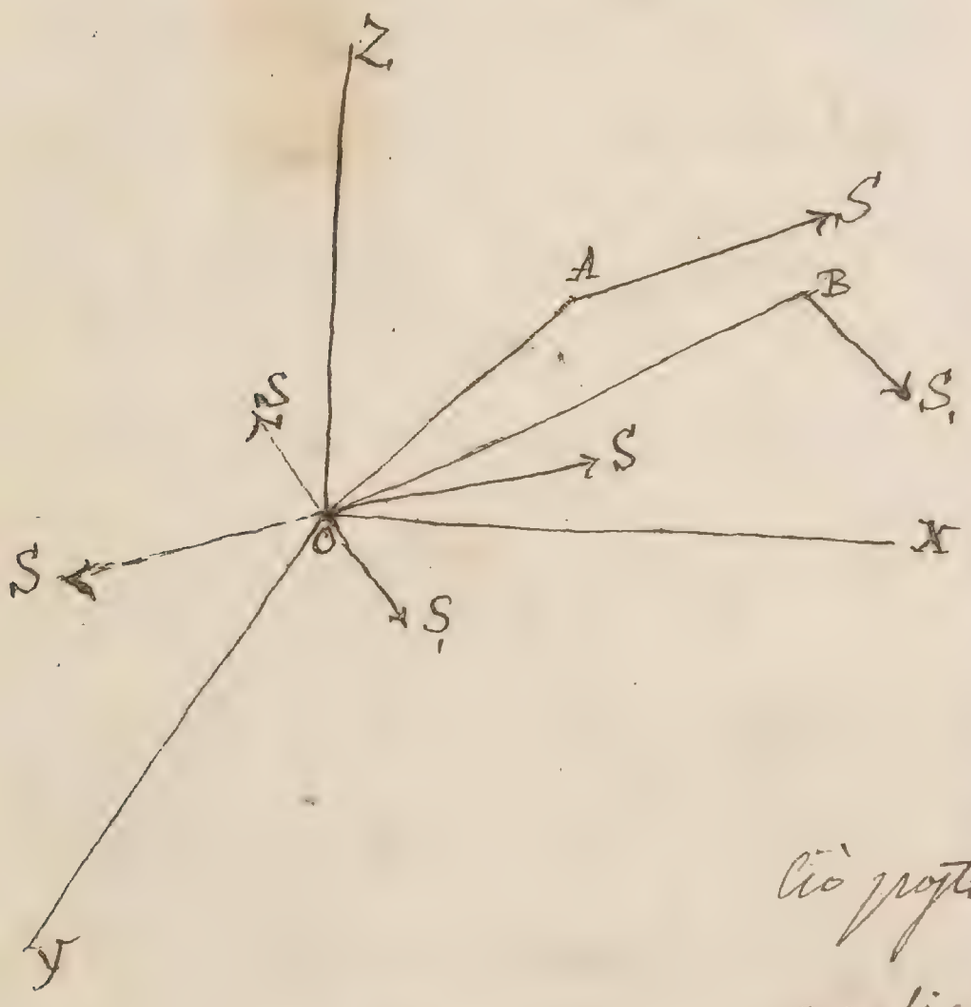
Dalla proprietà, di cui gode il momento K della coppia risultante, $K^2 = F^2 + G^2 + H^2$ risulta, che se il sistema rigido, il quale abbia tendenza a rotare intorno a tre assi ortogonali, [illegible] per tre assi ortogonali si può sostituire un asse solo, tale, che il sistema tenda a girare tutto intorno ad esso,

questo teorema l'abbiamo stabilito nel finir della Lez.e antecedente, eccovi testa-
-to ora giunti allo stesso teorema partendo dalle proprietà fisiche delle coppie
Qualunque numero di coppie si abbia collocate in piani differenti, esse si ripos-
-no comporre in una sola, procedendo in modo analogo a quello, con cui ne
abbiamo composte tre. Lezione 36.a

Ad un sistema rigido sono applicate più forze, attraverso ad esso conducia-
-mo tre assi ortogonali, determiniamo le direzioni delle forze e i loro punti d'appli-
-cazione riferendole a questi tre assi; qualunque sia il numero delle forze,
si tratta di ridurle al minor numero, che sia possibile.

La risoluzione di questo problema ci condurrà alle condizioni d'equilibrio di
più forze applicate comunque ad un sistema rigido.

Rappresentiamo con S . S_1 S_2 ---- le intensità delle forze,
con x, y, z ; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ---- le coordinate dei loro punti
d'applicazione, e con X, Y, Z ; X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 --- le componenti parallele agli
assi di ciascuna forza; osserviamo quindi, che se A è uno dei punti d'applicazione



quello a cui è applicata la forza S,
potremo senza alterar l'effetto di
questa forza S aggiungervi due
applicate in O, eguali ed eguali a S,
direttamente opposte, ed in direzione
parallela alla direzione della forza S.

Ciò posto se pure ciascuna forza le ne aggiungono due
applicate in O, eguali alla forza, direttamente opposte
ed in direzione parallela alla direzione della forza, se

m era il numero delle forze, ~~esso~~ sarà ridotto a 3m dopo fatta questa addizione; questo numero può diminuire tosto, e ti riduce a tre, ~~si può ridurre~~ in una sola forza le forze applicate in O eguali ad S S_1 S_2 ----, parallele e dirette nello stesso senso ~~[illegible]~~ delle forze S, S_1, S_2 ----,

ed Osserviamo, che le 2m forze parallele due a due, eguali e dirette ~~[illegible]~~ in senso contrario compongono in coppie le quali si possono ridurre ad una coppia unica equivalente;

La forza unica equivalente alle prime m forze ha per componenti parallele agli assi le forze $\begin{cases} X+X'+X''+\dots = \Sigma X \\ Y+Y'+Y''+\dots = \Sigma Y \\ Z+Z'+Z''+\dots = \Sigma Z \end{cases}$, la di lei intensità è dunque $\Omega = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 + \Sigma Z^2}$,

ed i coseni degli angoli, che essa fa cogli assi saranno $\frac{\Sigma X}{\Omega}, \frac{\Sigma Y}{\Omega}, \frac{\Sigma Z}{\Omega}$.

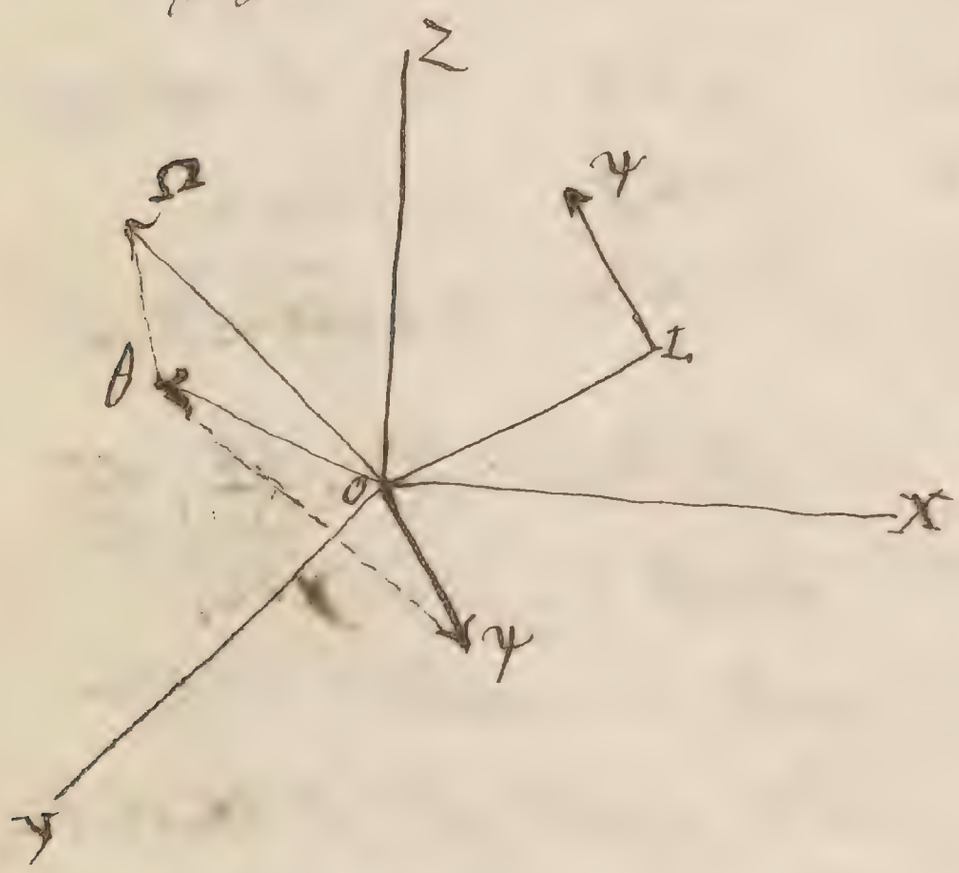
Ciascuna delle m coppie scomposta in tre giacenti nei piani XOZ, XOY, queste tre avranno per momenti i momenti di rotazione della forza corrispondente della loro risultante rispetto agli assi OX, OY, OZ,

Le dunque tutte le m coppie le scomponiamo in 3m coppie giacenti m nel piano yz, m nel piano xz, m nel piano xy, e componiamo quindi quelle giacenti in uno stesso piano in una coppia unica, avremo tre coppie le quali insieme equivarranno alle m coppie primitive, e che avranno per momenti F, G, H, essendo F, G, H le somme dei momenti di rotazione delle forze S S_1 S_2 ---- rispetto agli assi OX, OY, OZ.

Queste tre coppie possiamo comporle in una coppia unica equivalente, ~~il piano~~ il cui momento ~~la cui intensità~~ sarà $M = \sqrt{F^2 + G^2 + H^2}$, ed il cui piano sarà perpendicolare ad una retta tale, che i coseni degli angoli, che essa fa cogli assi OX, OY, OZ saranno rispettivamente $\frac{F}{M}, \frac{G}{M}, \frac{H}{M}$.

Sul piano di questa coppia risultante delle in prime coppie portiamo trasportarlo parallelamente a se stesso finchè passi per l'origine O, e la coppia in esso contenuta portiamo trasportarla in esso piano in modo, che una delle forze sia applicata in O.

Un sistema dunque di forze applicate ad un sistema rigido può sempre ridurre ad una forza e ad una coppia contenuta in un piano condotto pel punto d'applicazione della forza, questo punto essendo arbitrario, questa riduzione si può fare in infinite guise.



Se Ω sia la forza, $[\Psi, \Psi]$ la coppia potendo comporre $O\Omega$ con $O\Psi$, ed ottenere per risultante unica $O\theta$, ne risulta anche, che un sistema qualunque di forze applicate ad un sistema rigido si può ridurre ad una forza -se sole in infinite guise, delle quali -se una si può far passare per un punto preso ad arbitrio; Ma teniamoci ora alla prima riduzione ad una forza

$$\begin{cases} \Omega = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 + \Sigma Z^2} \\ \dfrac{\Sigma X}{\Omega}\ ,\ \dfrac{\Sigma Y}{\Omega}\ ,\ \dfrac{\Sigma Z}{\Omega} \end{cases}$$

, che fa cogli assi gli angoli i cui coseni sono

, e ad una coppia, che sia per momento,

$$\begin{cases} M = \sqrt{F^2 + G^2 + H^2} \\ \dfrac{F}{M}\ ,\ \dfrac{G}{M}\ ,\ \dfrac{H}{M} \end{cases}$$

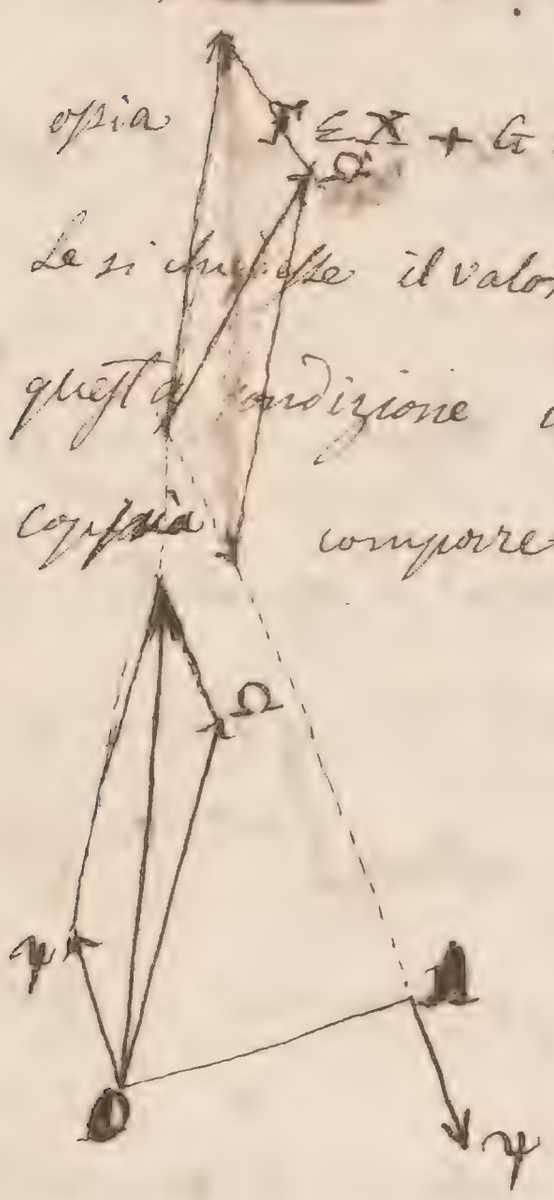
ed il cui piano è tale, che la normale ad esso fa cogli assi gli angoli, i cui coseni sono

Perchè il sistema ammetta una risultante unica, bisogna, che la forza Ω giaccia nel piano della coppia; in questo caso essa fa colla normale al piano della coppia un angolo retto, ora quest'angolo ha per coseno $\dfrac{F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z}{M\Omega}$, dunque la

condizione perchè il sistema sia riducibile ad una risultante unica è espressa analiticamente dalla condizione $\frac{F\Sigma x + G\Sigma y + H\Sigma z}{M\Omega} = 0$, (1)

ossia $F\Sigma x + G\Sigma y + H\Sigma z = 0$. (2)

Se si conosce il valore di questa risultante unica, nel caso, in cui questa condizione vien soddisfatta, bisognerebbe nel piano della coppia componre Ω con O_7, e la loro risultante quindi con A_7; la risultante di queste Ω', se la figura fosse meglio fatta, sarebbe eguale e parallela ad Ω.



Dunque quando il sistema ammette una risultante, dessa è eguale in intensità a $\Omega = \sqrt{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2}$, fa cogli assi gli angoli, i cui coseni sono $\frac{\Sigma x}{\Omega}$, $\frac{\Sigma y}{\Omega}$, $\frac{\Sigma z}{\Omega}$, e le coordinate $\frac{x}{}, \frac{y}{}, \frac{z}{}$ della sua direzione soddisfanno alle relazioni

$$\begin{cases} H = y\Sigma x - x\Sigma y \\ G = x\Sigma z - z\Sigma x \\ F = z\Sigma y - y\Sigma z \end{cases}$$

, per dimostrare la verità di queste equazioni, prima consideriamo alcuni casi, che sembrano far eccezione alla regola generale perciocchè se ci sia una risultante unica.

Se $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma z = 0$, l'equazione (2) è soddisfatta, il sistema però non è riducibile ad una forza unica, poichè F, G, H non essendo zero, la coppia resta, mentre essendo nulle le somme $\Sigma x, \Sigma y, \Sigma z$, la forza Ω è nulla; questa contraddizione non c'è più, se si osserva, che la equazione (1), la quale è la vera condizione, perchè ci dia una risultante unica, non è soddisfatta, il suo 1° membro riducendosi non a zero, ma $\frac{0}{0}$, per essere anche $\Omega = 0$.

Se F, G, H sono nulle, e non sono nulle ΣX, ΣY, ΣZ, il 1° membro dell'equazione (1) si riduce ancora a $\frac{0}{0}$, [illegible] vi ha [illegible] una risultante unica in questo caso, la quale è Ω, la quale passa per l'origine delle coordinate.

Se F, G, H, ΣX, ΣY, ΣZ sono nulle nello stesso tempo, la forza e la coppia sono nulle, vi ha dunque equilibrio, le condizioni d'equilibrio di più forze applicate ad un sistema rigido sono dunque sei, $\begin{cases} F=0,\ G=0,\ H=0 \\ \Sigma X=0,\ \Sigma Y=0,\ \Sigma Z=0 \end{cases}$ che tradotte in linguaggio volgare ci insegnano, che se attraverso al sistema conduciamo tre assi ortogonali, e facciamo le somme delle componenti delle forze parallele a ciascun asse, e le somme dei momenti di rotazione delle forze rispetto a ciascun asse, queste sei somme devono esser nulle, onde vi sia equilibrio.

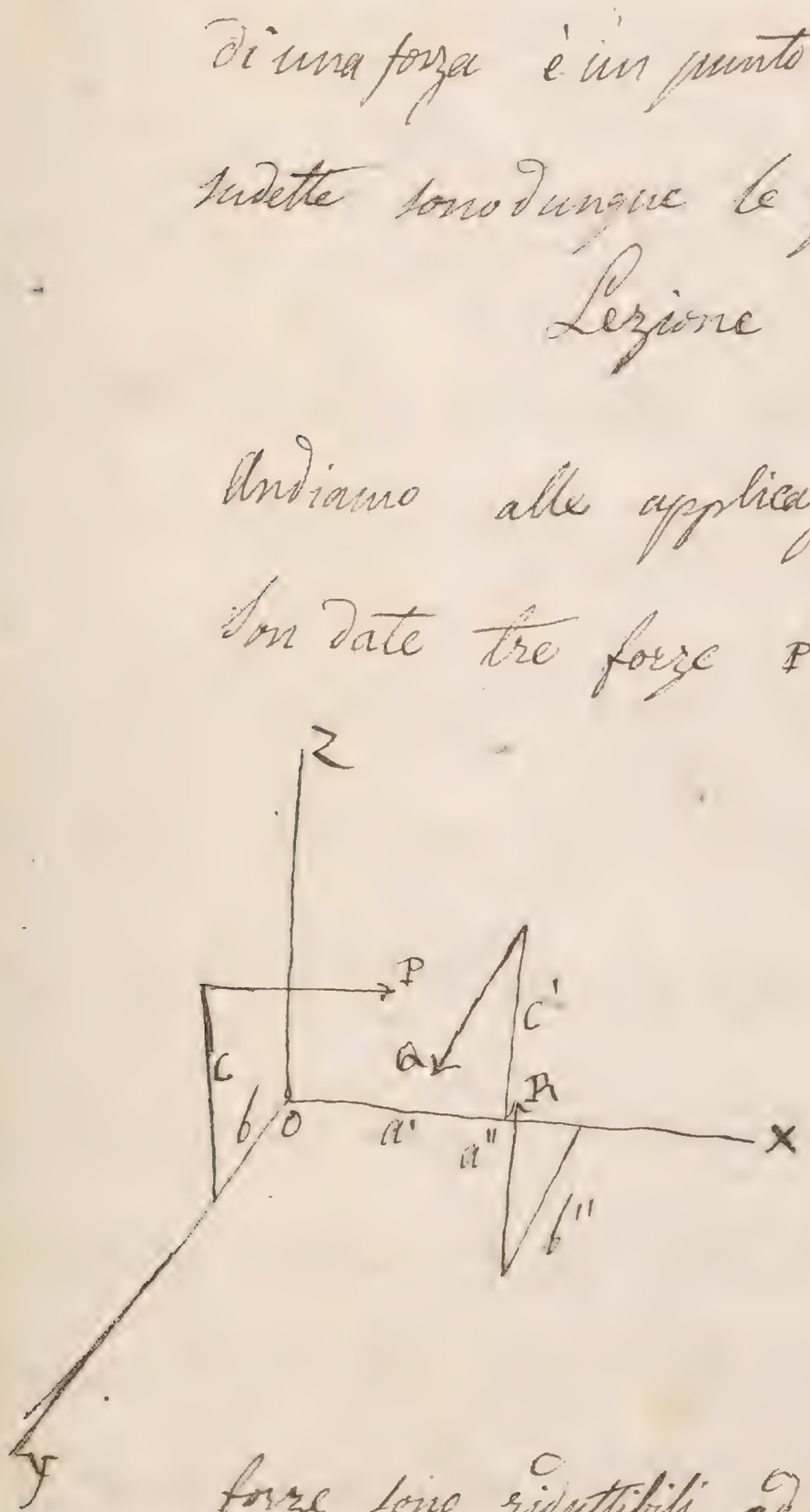
Il fin qui detto ci dimostra, che per conoscere lo stato di un sistema rigido a cui sono applicate più forze, basta conoscere le somme delle componenti parallele a tre assi ortogonali delle forze date, e le somme dei loro momenti rispetto ai medesimi assi.

Ritornando al caso della risultante unica, se ad essa opponiamo una forza che vi dovrà essere equilibrio, tra questa forza e le forze date dovranno dunque esistere le relazioni suddette, ossia dovranno essere zero le somme delle componenti e dei momenti di tutte le forze comprese questa, queste relazioni ci insegnano, che le componenti della risultante sono ΣX, ΣY, ΣZ, e che i di lei momenti sono F, G, H, ora i momenti di una forza, il cui punto d'applicazione ha per coordinate x, y, z, e le cui componenti parallele agli assi sono X, Y, Z sono $Xy-Yx$, $Zx-Xz$, $Yz-Zy$, dunque, se x_1 y_1

siano le coordinate del punto d'applicazione della risultante, tra
essa deve esistere le relazioni $\begin{cases} H = y\Sigma X - x\Sigma Y \\ G = x\Sigma Z - z\Sigma X \\ F = z\Sigma Y - y\Sigma Z \end{cases}$, queste equazioni
equivalgono a due sole; Infatti moltiplicando la 1ª equazione per ΣZ, la 2ª
per ΣY, la 3ª per ΣX, e sommandole, abbiamo $F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z = 0$,
la quale equazione deve essere soddisfatta, perché esista una risultante
unica; dunque le coordinate $x\ y\ z$ non sono completamente determinate,
ma soltanto tra esse devono esistere due relazioni, che sono rappresentate
da due equazioni di primo grado, ora due equazioni di 1° grado tra
$x\ y\ z$ significano, che il punto $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ si trova sulla retta rap-
-presentata dalle due equazioni, inoltre il punto d'applicazione
di una forza è un punto della direzione della forza, le equazioni
suddette sono dunque le equazioni della direzione della risultante.

Lezione 37ª

Andiamo alle applicazioni di quanto si è detto a sistemi particolari di forze.
Son date tre forze P, Q, R parallele agli assi OX, OY, OZ, son dati i
punti, ove esse incontrano i piani coordinati,



la P incontra il piano YOZ in un punto,
le cui coordinate sono b, c, la Q incontra il
piano XOZ in un punto, che ha per coor-
-dinate a', c', la R incontra il piano YOX
in un punto $\begin{cases} a'' \\ b'' \end{cases}$, si domanda se le tre
forze sono riducibili ad una risultante unica.

Le forze sono riducibili ad una risultante unica se è soddisfatta la condizione

$F'\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z = 0$, nel nostro caso $\Sigma X = P$, $\Sigma Y = Q$, $\Sigma Z = R$,

$$\begin{cases} F' = \Sigma[yz - zy] = Qc' - Rb'' \\ G = \Sigma[zx - xz] = Ra'' - Pc \\ H = \Sigma[xy - yx] = Pb - Qa' \end{cases}$$

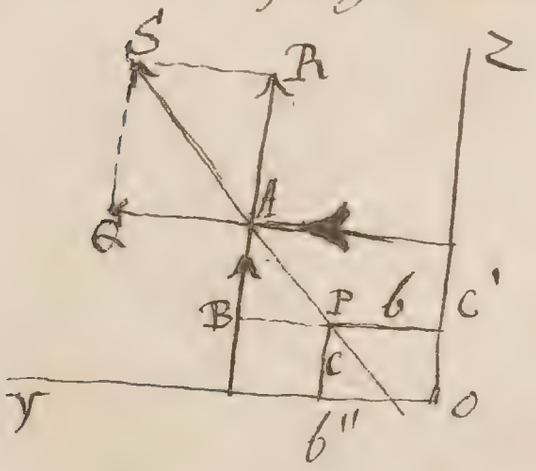
, la condizione dunque perchè le tre P, Q, R abbiano una risultante unica è la seguente,

$PQc' - PRb'' + QRa'' - PQc + PRb - QRa' = PQ(c'-c) + PR(b-b'') + QR(a''-a') = 0$,

in questa equazione le coordinate dei punti d'applicazione delle forze non entrano, che per via di differenze, chiamiamo perciò l, m, n queste differenze, allora la cond. sarà $PQn + PRm + QRl = 0$, e dividendo tutto per PQR diverrà

$\frac{l}{P} + \frac{m}{Q} + \frac{n}{R} = 0$; questa equazione ci dice, che secondo i valori delle intensità ed i loro segni, e secondo i valori delle coordinate dei loro punti d'applicazione vi sarà o non vi sarà una risultante unica, ed inoltre, che se P ed l, Q ed m, R ed n sono dello stesso segno o di segno contrario è impossibile l'esistenza di una risultante unica.

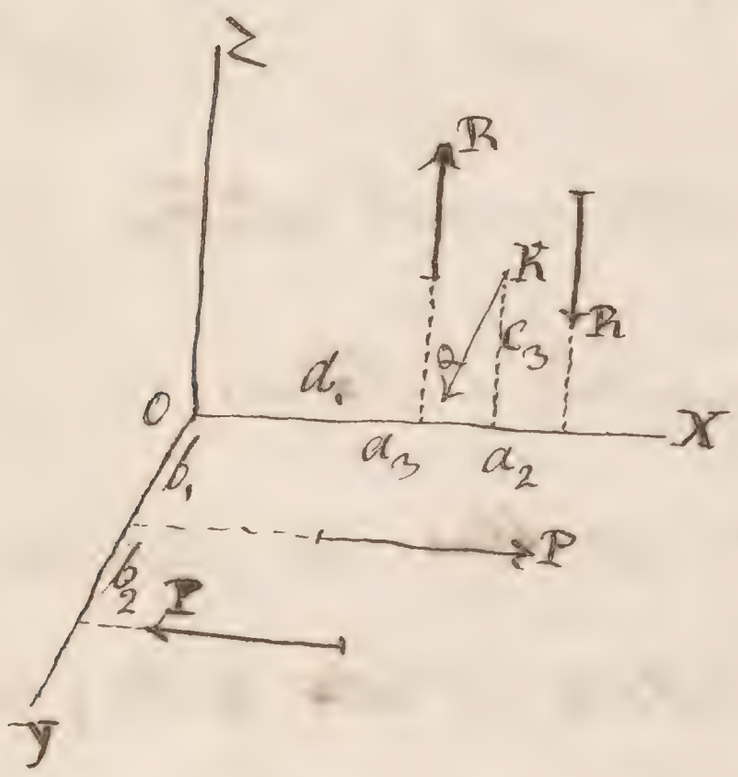
Supponiamo che sia $l = a'' - a' = 0$, ciò significa, che le forze Q, R giacciono in un piano parallelo al piano yz ad una distanza a' da tal piano, in tal ipotesi la condizione della ris. unica si riduce alla seguente $\frac{m}{Q} + \frac{n}{R} = 0$, ossia $\frac{m}{Q} = -\frac{n}{R}$, ossia, non avvertendo ai segni, deve essere $Q:R :: m:n$; questa proporzione esprime che la forza P incontra la risultante delle forze Q, R; facile è il veder ciò, se si immaginino proiettate le forze Q, R sul piano yoz. Difatti componendo Q, R si abbia la risultante S, sia P il punto in cui la forza P incontra questa risultante, i triangoli simili ASR ABP ci danno la proporzione



$RS : RA :: BP : AB$, ossia $Q : P :: b'' - b : c' - c$, donde

$$\frac{b - b''}{Q} + \frac{c' - c}{P} = \frac{m}{Q} + \frac{n}{P} = 0.$$

Altro esempio. Nel piano delle xy ho due forze eguali, parallele all'asse delle x, contrarie e non opposte, e sono P, P, distanti da OX delle quantità b_2, b_1, ho parimente nel piano delle xz due forze P, P eguali, parallele, ad OZ contrarie e non opposte alle distanze a_2, a_1, dall'asse OZ, ho finalmente nello spazio una forza Q parallela all'asse OY, e due incontra il piano delle xz in un punto K, le cui coordinate ~~b~~ c_3, a_3, si domanda se queste cinque forze hanno una risultante unica.



Perciò formiamo le somme ΣX, ΣY, ΣZ, F, G, H, e vediamo se esse soddisfanno alla equazione $F\Sigma x + G\Sigma y + H\Sigma z = 0$, ora

$\Sigma x = 0$, $\Sigma y = Q$, $\Sigma z = 0$, $F = \Sigma(yz - zy) = Q c_3$, $G = \Sigma(zx - xz) = R(a_1 - a_2)$

$H = \Sigma[xy - yx] = P(b_1 - b_2) - Q a_3$, la condizione è dunque

$Q R(a_1 - a_2) = 0$, questa condizione è soddisfatta se $a_1 = a_2$,

dunque quando P, P si fanno equilibrio, ossia non esistono, le forze P, P, Q ~~si fan~~ hanno una risultante unica; essa è determinata nella sua direzione dalle equazioni $Q c_3 = Z Q$

$$\left.\begin{array}{l} P(b_1 - b_2) - Q a_3 = -Q x \\ \text{ossia } x = \dfrac{Q a_3 + P(b_2 - b_1)}{Q} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Z = c_3 \end{array}$$

e la sua intensità è Q.

Se $Q = 0$ le ~~quattro~~ forze restanti si riducono ad una coppia, poichè in tal caso $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$; Se $P = 0$ siamo nel caso precedente di $a_1 = a_2$.

Lezione 38ª

Che per l'equilibrio di più forze applicate ad un sistema rigido siano necessarie le condizioni $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$, $F=0$, $G=0$, $H=0$, si vede anche dacchè le tre prime assicurano l'equilibrio del sistema contro ogni rischio di moto progressivo, le seconde assicurano l'equilibrio del sistema contro ogni rischio di moto rotatorio, ora ogni moto o è progressivo, o è rotatorio, o è composto di progressivo e rotatorio.

Se le forze applicate ad un sistema rigido si fanno equilibrio, una qualunque delle forze deve essere eguale e direttamente opposta alla risultante di tutte le altre, questa verità non abbisogna di essere dimostrata, se dunque le condizioni d'equilibrio sovrascritte sono vere, ed esse deve risultare, che una delle forze per es. S è eguale e direttamente opposta alla risultante delle altre.

Chiamando $\Sigma X'$, $\Sigma Y'$, $\Sigma Z'$ le somme delle componenti parallele agli assi delle forze eccetto la S, ed F', G', H' le somme dei momenti delle stesse forze, le condizioni d'equilibrio si possono scrivere sotto la forma $\begin{cases} X+\Sigma X'=0 \\ Y+\Sigma Y'=0 \\ Z+\Sigma Z'=0 \end{cases}$, $\begin{cases} (Yz-Zy)+F'=0 \\ (Zx-Xz)+G'=0 \\ (Xy-Yx)+H'=0 \end{cases}$, così scritte le tre prime condizioni ci insegnano, che la risultante delle forze S_1 S_2 S_3 etc., della cui esistenza ci possiamo facilmente convincere portando in queste equazioni i termini $\{\Sigma X', \Sigma Y', \Sigma Z'$ nei secondi membri, moltiplicando quindi ciascuna delle tre prime per ciascuna delle F', G', H' tre ultime, e quindi sommandole, è eguale numericamente alla forza S_1 e volta in senso contrario, le altre tre equazioni dicono, che la direzione della risultante delle forze S_1 S_2 S_3 ---- coincide colla direzione della forza S_1; per convincercene basta scrivere le equazioni della direzione della risultante suddetta sostituendo in esse a $\Sigma X'$, $\Sigma Y'$, $\Sigma Z'$, F', G', H' i loro valori, che si hanno dalle 6 equazioni

precedenti, si trova, che esse sono identicamente le equazioni della direzione della forza **S**.

Resta dunque dimostrato in tre maniere diverse, che per l'equilibrio di un sistema rigido le condizioni sono necessarie e bastano $\begin{cases} \Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0 \\ F=0, G=0, H=0 \end{cases}$, quando il sistema è libero; supponiamo ora, che sia ritenuto da vincoli.

Supponiamo per esempio, che sia ritenuto da un punto fisso. Piantiamo l'origine nel punto fisso, la forza Ω essendo distrutta dalla resistenza di questo, le condizioni $\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0$ saranno superflue, e basteranno le condizioni $F=0, G=0, H=0$ per l'equilibrio; il significato geometrico di queste condizioni è che la risultante delle forze passa pel punto fisso.

Se nel sistema vi sono due punti fissi, allora basta che il momento di rotazione del sistema attorno all'asse, che unisce i punti fissi sia zero, perchè vi sia equilibrio. Prendiamo quest'asse fisso per asse delle Z, per l'equilibrio basterà la condizione $H=0$, le altre saranno superflue.

Se tre punti del sistema sono fissi l'equilibrio sussiste da se, ed ogni condizione d'equilibrio è inutile.

Se i tre punti non sono assolutamente fissi, se per es° debbano stare sopra lo stesso piano, allora tre condizioni d'equilibrio sono necessarie; se il piano delle xy sia il piano in cui si può muovere il sistema, le condizioni d'equilibrio sono $\Sigma X=0, \Sigma Y=0, H=0$, le due prime impediscono ogni moto progressivo sul piano fisso, la 3ª impedisce ogni moto rotatorio intorno ad ogni asse parallelo all'asse delle Z. Vediamo un'altro caso.

Abbiamo un sistema rigido, di cui due punti possono muoversi sopra un piano: le condizioni necessarie, perchè stiasi in equilibrio sono, se i due punti son sull'asse delle x, ed il piano è il piano delle xy, $\begin{cases} H=0, \Gamma=0 \\ \Sigma X=0, \Sigma Y=0 \end{cases}$

se il sistema rigido può toccare soltanto il piano delle xy, allora se il punto è all'origine le condizioni d'equilibrio sono $\begin{cases} \Sigma X=0, \Sigma Y=0 \\ \Gamma=0, \ G=0, H=0 \end{cases}$

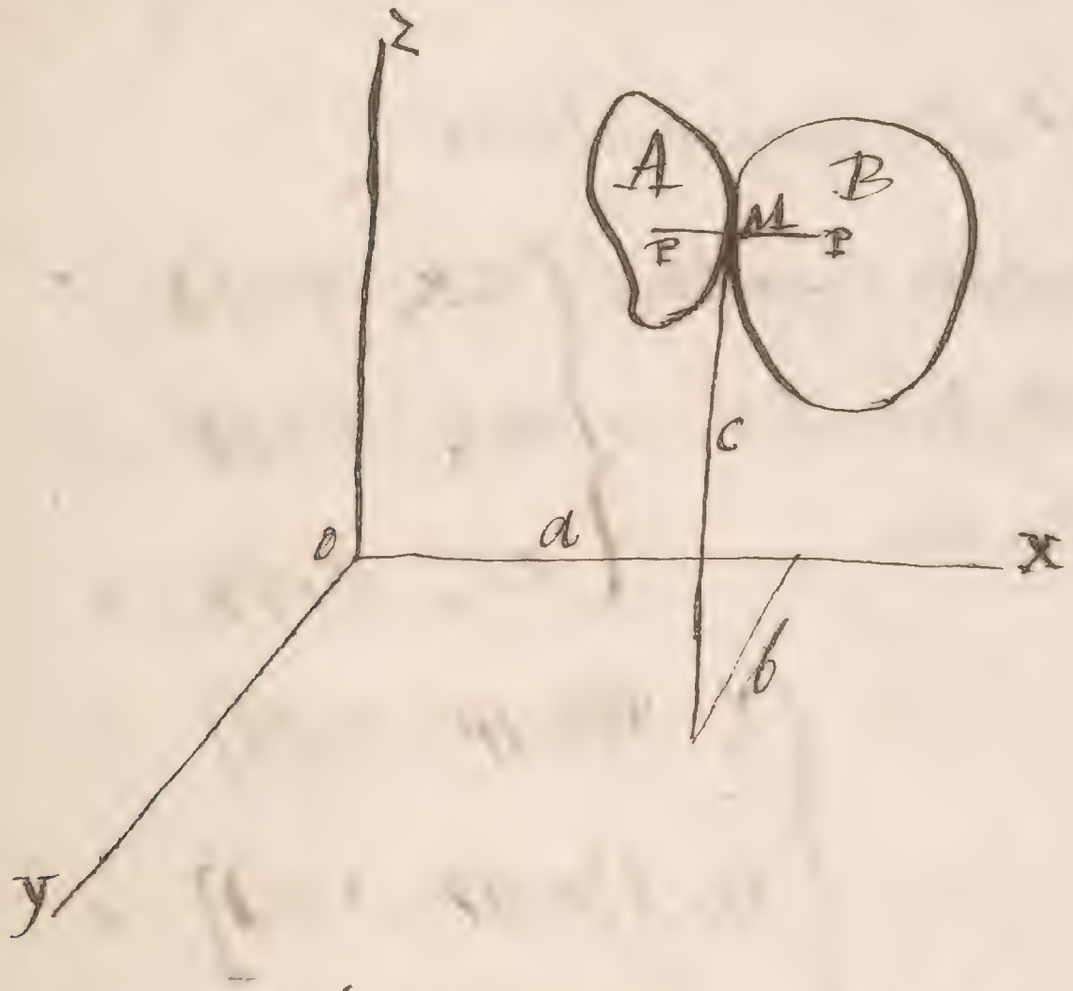
Facciamo un'altro caso. Il corpo è infilzato in un'asta; se prendiamo questa per asse delle z, le condizioni d'equilibrio sono $\Sigma Z=0$, $H=0$.

Se il corpo è infilzato in due aste parallele, e parallele all'asse delle z, una sola condizione d'equilibrio è necessaria, e è $\Sigma Z=0$. Se le aste non sono parallele, l'equilibrio subsiste dato, e ogni condizione è inutile.

Facciamo un'altra supposizione. Ho una superficie curva qualunque, il corpo è appoggiato contro di essa, perchè il corpo non si muova per l'azione delle forze, che lo sollecitano bisogna, che ~~la risultante~~ di queste abbiano una risultante unica che passi pel punto di contatto, e che sia normale alla superficie.

Se l'equazione della superficie sia $L\,dx+M\,dy+N\,dz=0$, ed il punto di contatto sia all'origine delle coordinate, siccome si sa, che fra le tre componenti di una forza diretta secondo la normale alla sup.e e parallele agli assi coordinati, si ha la relazione $X:Y:Z::L:M:N$, dove in L, M, N si mise per x, y, z i valori numerici delle coordinate del punto di contatto, così nel nostro caso indicando con L_0 M_0 N_0 i valori di L, M, N, quando si mette zero in vece di x, y, z, dovrà essere $\Sigma X:\Sigma Y:\Sigma Z::L_0:M_0:N_0$, essendo ΣX, ΣY, ΣZ le componenti della risultante di tutte le forze; perchè dunque ciò sia, bisogna inoltre, che sia $\Gamma=0$, $G=0$, $H=0$.

Siano due sistemi rigidi A B animati ciascuno da un sistema di forze, si domandano le relazioni, che devono esistere tra queste varie forze, perchè i due sistemi toccandosi in un certo punto si equilibrino mutuamente, cioè perchè formino un sistema unico in equilibrio.



Sarebbe difficile in questo caso l'andare per la stessa strada tenuta nei casi antecedenti alla ricerca delle condizioni d'equilibrio, però prendiamone una differente.

Se A e B ad onta dell'azione delle forze si fanno equilibrio è evidente che ciò succederà in virtù del ridursi, che faranno le forze dei due sistemi a due risultanti uniche eguali, direttamente opposte, e dirette secondo la normale comune alle due superficie nel punto di contatto, in modo, che allora al sistema A sarà applicato un sistema di forze tale, che se vi si aggiunge la forza da B esercitata contro A esso si troverà in equilibrio, e similmente se al sistema delle forze applicate a B si aggiunge la forza medesima esercitata da A contro B, questo nuovo sistema di forze sarà pure in equilibrio.

Per esprimere analiticamente queste idee, siano ΣX, ΣY, ΣZ, F, G, H le somme delle componenti parallele agli assi e dei momenti di rotazione rispetto a questi delle forze applicate al corpo A, siano ΣX_1, ΣY_1, ΣZ_1, F_1, G_1, H_1 le somme analoghe ~~del~~ relative alle forze applicate al corpo B, rappresentiamo con a, b, c le coordinate del punto di contatto M, e con

P, P le pressioni vicendevoli, che i corpi esercitano l'uno sull'altro, le quali sono normali alle superficie dei corpi, supponiamo sieno λ, μ, ν gli angoli, che le direzioni di queste ~~pressioni~~ normali fanno cogli assi; fra tutte le quantità, che abbiamo denominate ora d'incognito c'è P, singolarmola nota; perchè sussista l'equilibrio nel 1° corpo togliendo il 2°, bisogna, che sia

$$\begin{cases} \Sigma X + P\cos\lambda = 0 \\ \Sigma Y + P\cos\mu = 0 \\ \Sigma Z + P\cos\nu = 0 \end{cases}$$

, e perchè sussista l'equilibrio nel 2° corpo togliendo il 1° bisogna, che sia

$$\begin{cases} \Sigma X_1 - P\cos\lambda = 0 \\ \Sigma Y_1 - P\cos\mu = 0 \\ \Sigma Z_1 - P\cos\nu = 0 \end{cases}$$

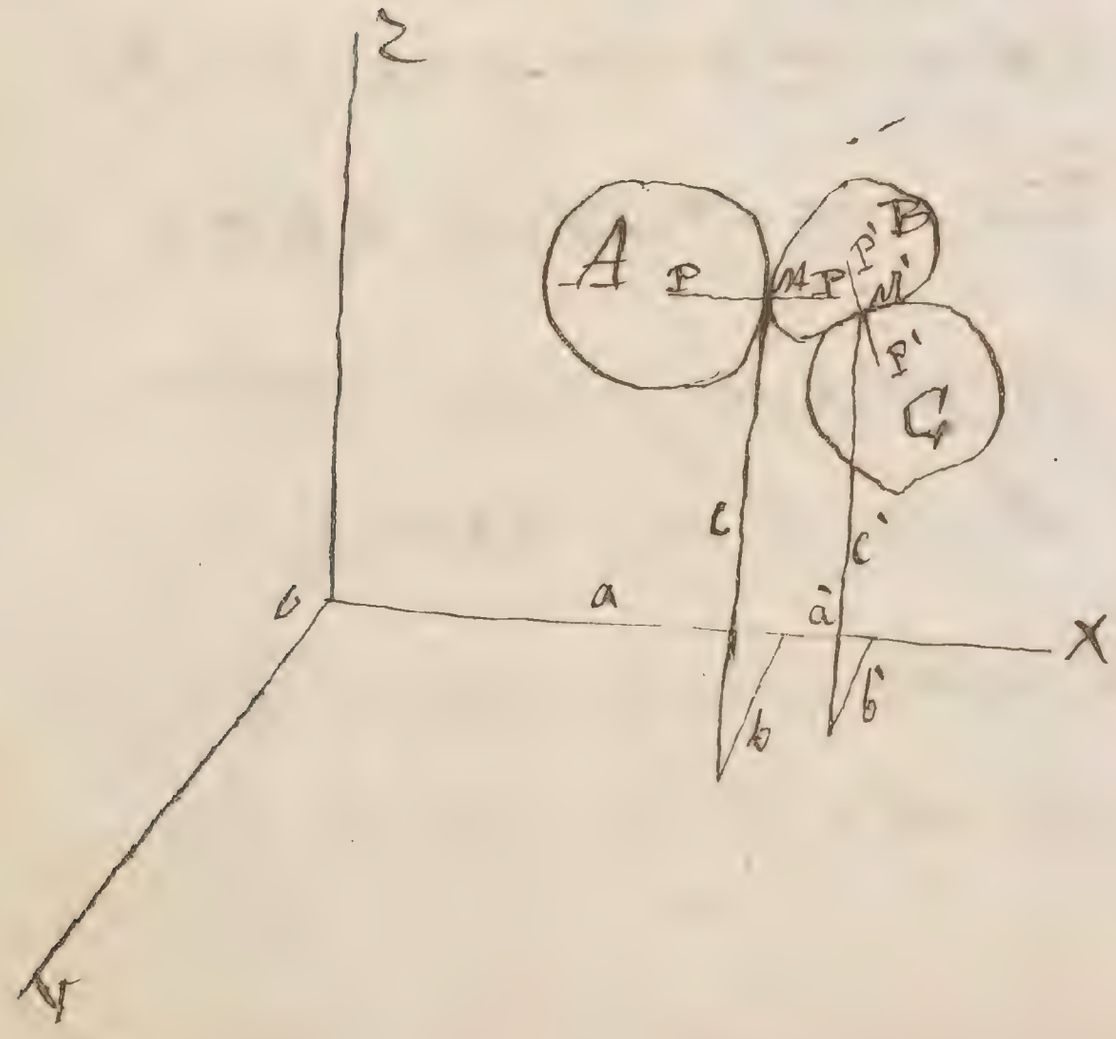
$$\begin{cases} F + P[c\cos\mu - b\cos\nu] = 0 \\ G + P[a\cos\nu - c\cos\lambda] = 0 \\ H + P[b\cos\lambda - a\cos\mu] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 - P[c\cos\mu - b\cos\nu] = 0 \\ G_1 - P[a\cos\nu - c\cos\lambda] = 0 \\ H_1 - P[b\cos\lambda - a\cos\mu] = 0 \end{cases}$$

,

tra queste 12 equazioni eliminando P, abbiamo undici condizioni di equilibrio pei corpi A e B, e sono

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma X + \Sigma X_1 = 0 & , \quad F + F_1 = 0 \\ \Sigma Y + \Sigma Y_1 = 0 & , \quad G + G_1 = 0 \\ \Sigma Z + \Sigma Z_1 = 0 & , \quad H + H_1 = 0 \end{array}\right\} \quad \Sigma X : \Sigma Y : \Sigma Z : F : G : H :: \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu : c\cos\mu - b\cos\nu : a\cos\nu - c\cos\lambda : b\cos\lambda - a\cos\mu .$$



Sieno tre corpi, che si toccano A, B, C, a cui sieno applicate più forze, sieno $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z, F, G, H$ le somme delle comp.ti parallele agli assi, e dei momenti delle forze applic. al 1° corpo, $\Sigma X_1, \Sigma Y_1, \Sigma Z_1, F_1, G_1, H_1$ le somme relative al 2° corpo, $\Sigma X_2, \Sigma Y_2, \Sigma Z_2, F_2, G_2, H_2$ le somme relative al 3° corpo, se i corpi si toccano in due soli punti

M, M' e sieno (a, b, c), (a', b', c') le loro coordinate, per avere le condizioni d'equilibrio di questi corpi, bisognerà introdurre le pressioni P, P' (le quali tuttenormali alle sup.ie dei corpi, sieno (λ, μ, ν), (λ', μ', ν')) gli angoli che queste fanno cogli assi che questi esercitano l'uno sull'altro, scrivere le condizioni d'equilibrio di ciascun corpo considerato come libero, ma considerando al corpo A applicata la forza P diretta da B verso A, al corpo B applicate le forze P, P' una diretta da A verso B, l'altra da C verso B, al corpo C applicata la forza P' diretta da B verso C. Dopo aver scritte queste equazioni di condizione, che saranno 18, sommiamo tra queste P, P' avremo le condizioni d'equilibrio dei tre corpi, che si toccano, le quali saranno

$$\begin{cases} \Sigma X + \Sigma X_1 + \Sigma X_2 = 0 \\ \Sigma Y + \Sigma Y_1 + \Sigma Y_2 = 0 \\ \Sigma Z + \Sigma Z_1 + \Sigma Z_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F + F_1 + F_2 = 0 \\ G + G_1 + G_2 = 0 \\ H + H_1 + H_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma X : \Sigma Y : \Sigma Z : F : G : H :: \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu : c\cos\mu - b\cos\nu : a\cos\nu - c\cos\lambda : b\cos\lambda - a\cos\mu,$$

$$\Sigma X_2 : \Sigma Y_2 : \Sigma Z_2 : F_2 : G_2 : H_2 :: \cos\lambda' : \cos\mu' : \cos\nu' : c'\cos\mu' - b'\cos\nu' : a'\cos\nu' - c'\cos\lambda' : b'\cos\lambda' - a'\cos\mu'.$$

Procedendo in modo analogo si possono scrivere le condizioni di equilibrio di un numero qualunque di corpi, i quali si tocchino a catena, o anche sieno appoggiati sopra superficie immobili resistenti.

Lezione 39.ª

Le più forze applicate ad un sistema rigido si fanno equilibrio, il loro effetto si risolve in una pressione o in una tensione; l'equilibrio può sussistere in due modi differenti, o sussiste da se in modo tale, che se il corpo avesse dei punti fissi, togliendoli l'equilibrio non si turberebbe, o sussiste perchè il corpo è ritenuto da punti fissi, o più generalmente da vincoli, e

ciò avviene il più sovente, in questo caso i punti fissi sostengono pressioni o tensi
l'oggetto della Lezione presente è di dar delle regole per calcolare le pressioni e
le tensioni, che sopportano i punti fissi, che tengono un corpo a luogo, opponendo
una resistenza bastante alle forze, che tendono a muoverlo.

Le condizioni di equilibrio di un corpo, di cui un punto è fisso, adottando i simboli
$\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z, F, G, H$ nel senso, in cui già le usammo, sono, se il punto fisso è all'origine de
coordinate, $F=0, G=0, H=0$; la forza, ~~la~~ la accelerazione viene distrutta dalla resistenza del punto
fisso è $\Omega=\sqrt{\Sigma X^2+\Sigma Y^2+\Sigma Z^2}$, la quale fa cogli assi gli angoli, i cui coseni sono

$\frac{\Sigma X}{\Omega}, \frac{\Sigma Y}{\Omega}, \frac{\Sigma Z}{\Omega}$, il punto fisso soffre dunque uno sforzo misurato da
questa forza, ora questa forza è la risultante di tutte le forze applicate al siste
se le intendiamo tutte trasportate parallelamente a se stesse d'applicate all'ori
quindi questo teorema—

Allor quando un sistema rigido è in equilibrio intorno ad un punto fisso sotto l'azione di un sistema di forze comunque applicate, questo punto fisso sostiene un medesimo sforzo, come quando tutte le forze sono ad esso immediatamente applicate.

È dunque facile di determinare graficamente ed in numeri l'intensità e la dire
-zione dello sforzo sostenuto dal punto fisso.

Vi ha un'altra maniera di determinare lo sforzo, che sopporta il punto fisso per l'azione de
forze; sia M la pressione esercitata dalle forze contro il punto fisso, e suppon
che L, S, J sieno gli angoli, che la direzione di questa pressione fa cogli assi,
avremo equilibrio applicando nell'origine ossia nel punto fisso una forza
eguale e direttamente opposta a questa pressione, ossia tre forze dirette seco

gli assi, ed eguali $\alpha - M\cos\alpha_1 - M\cos\beta_1 = M\cos\gamma$, dunque sarà

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X - M\cos\alpha &= 0 \\ \Sigma Y - M\cos\beta &= 0 \\ \Sigma Z - M\cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F &= 0 \\ G &= 0 \\ H &= 0 \end{aligned}\right\},$$

alle tre prime equazioni aggiungendo l'altra equazione

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

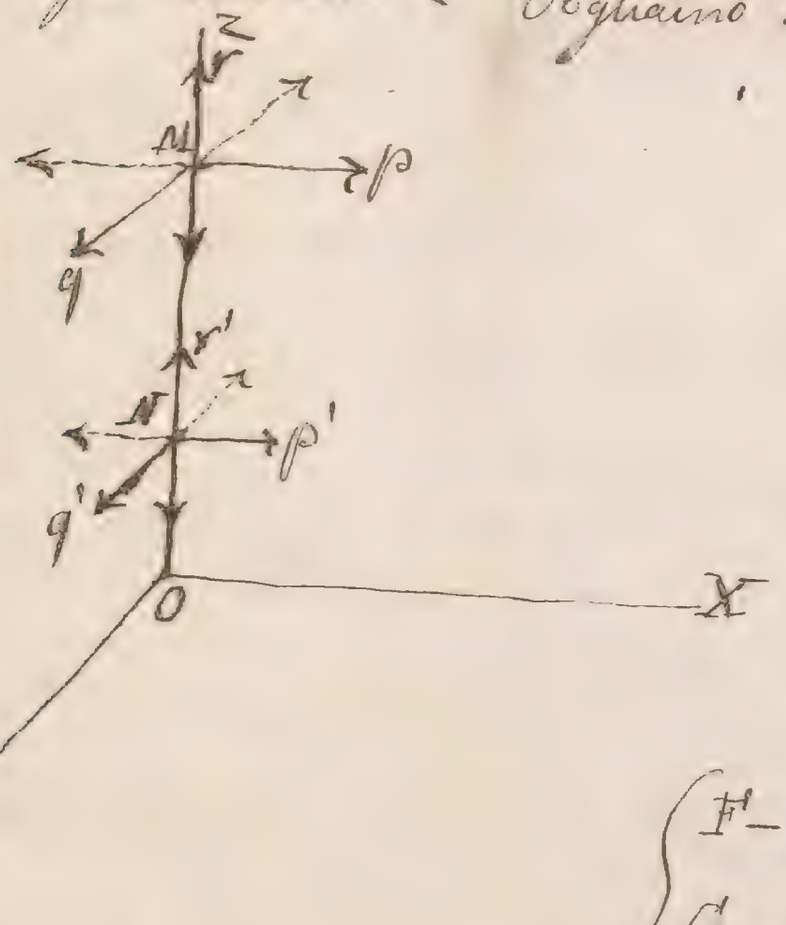
abbiamo quattro equazioni, le quali ci danno $M = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 + \Sigma Z^2}$

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma X}{M}, \quad \cos\beta = \frac{\Sigma Y}{M}, \quad \cos\gamma = \frac{\Sigma Z}{M};$$

Se del sistema rigido più punti sieno fissi, possiamo sempre determinare le pressioni da essi sostenute, osservando, che opponendo a queste delle forze eguali avrassi equilibrio; allora scrivendo le condizioni di equilibrio, da esse si ricavano i valori delle pressioni suddette.

Può avvenire, che le condizioni sieno in numero minore delle quantità, che per esse si devono determinare, allora per determinare le pressioni bisogna introdurre altre condizioni dipendenti dalla costituzione fisica dei corpi.

Consideriamo il caso di un sistema rigido volubile intorno ad un' asse immobile. Vogliamo determinare le pressioni sostenute dai cardini M, N.

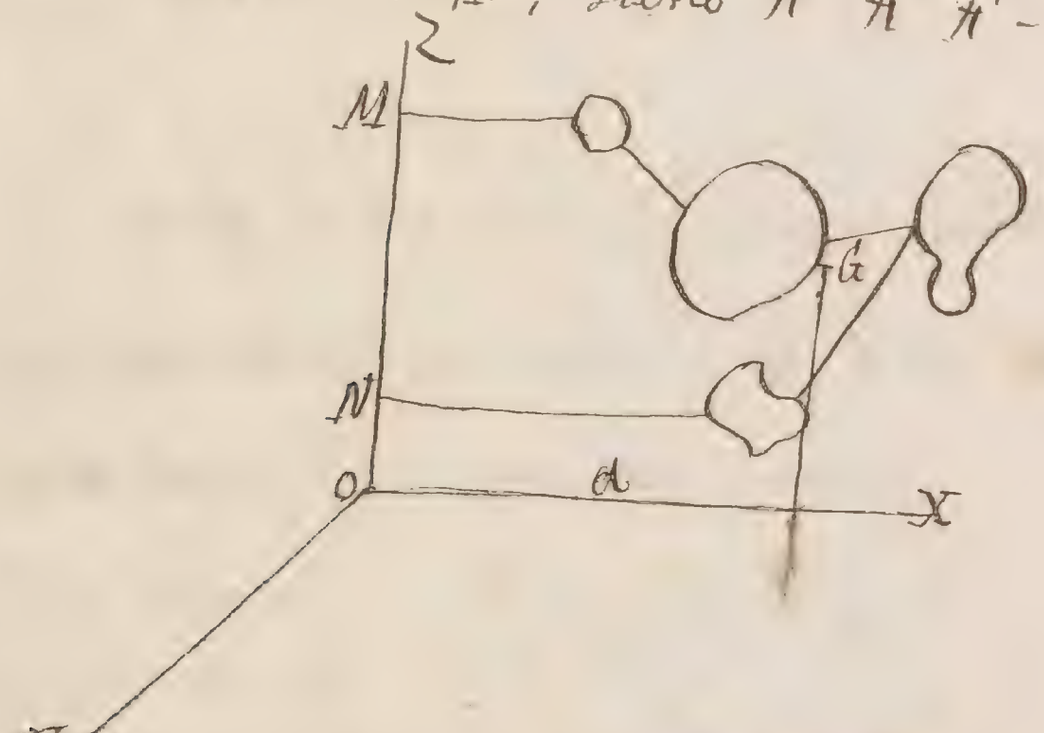


Supponiamole conosciute per le loro componenti $\begin{cases} p, q, r \\ p', q', r' \end{cases}$ parallele agli assi, sia $MO = \zeta$, $NO = \zeta'$ tra le forze eguali ed opposte a queste componenti ~~[illegible]~~ le forze $\{\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z, F, G, H\}$, stendovi equilibrio, dovranno esistere le relazioni

$$\begin{cases} F - q\zeta - q'\zeta' = 0 \\ G + p\zeta + p'\zeta' = 0 \\ H = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma X - p - p' = 0 \\ \Sigma Y - q - q' = 0 \\ \Sigma Z - r - r' = 0 \end{cases}$$

l'equazione $H=0$ è la sola condizione necessaria per l'equilibrio delle forze applicate al sistema, questa equazione non contenendo alcuna delle ~~quantità~~ p, q, r, p', q', r', abbiamo per determinarle soltanto cinque equazioni, alcune di esse dunque rimangono indeterminate; le quattro equazioni $\begin{cases} p+p'=\varepsilon X \\ p\zeta+p'\zeta'=-G \end{cases}$, $\begin{cases} q+q'=\varepsilon Y \\ q\zeta+q'\zeta'=F \end{cases}$ ci determinano p, p', q, q', e ci danno $\begin{cases} p=-\dfrac{\zeta'\varepsilon X+G}{\zeta-\zeta'} \\ p'=\dfrac{\zeta\varepsilon X+G}{\zeta-\zeta'} \end{cases}$, $\begin{cases} q=-\dfrac{\zeta'\varepsilon Y-F}{\zeta-\zeta'} \\ q'=\dfrac{\zeta\varepsilon Y-F}{\zeta-\zeta'} \end{cases}$, la indeterminazione cade dunque intieramente sopra r, r', tra le quali abbiamo la sola relazione $r+r'=\varepsilon z$. Fisicamente questa indeterminazione non c'è, e ciò avviene per la costituzione fisica dei corpi e nel nostro caso dell'asse MN.

Sia per un caso particolare un sistema di corpi pesanti invariabilmente connessi con cardini M, N, siano $\pi\ \pi'\ \pi''$--- i loro pesi, $x\ x'\ x''$---- le ascisse dei loro centri di gravità, sarà allora



$$\varepsilon X=0,\quad \varepsilon Y=0,\quad \varepsilon Z=(\pi+\pi'+\pi''+\cdots)=R$$

$$H=0,\quad F=0,\quad G=-\varepsilon\pi x=-aR,$$

Le supponiamo inoltre per semplicità, che tutti i corpi abbiano i loro centri di gravità sul piano delle xz, che R sia la somma di tutti i pesi, e che a sia l'ascissa del centro comune di gravità G.

Ciò posto $\begin{cases} p=\dfrac{Ra}{\zeta-\zeta'}, & q=0 \\ p'=\dfrac{-Ra}{\zeta-\zeta'}, & q'=0 \end{cases}$, queste equazioni ci insegnano, che i cardini sopportano pressioni nel senso delle y, e che le pressioni, che sopportano diretta nel senso

delle x sono eguali, = contrarie, = proporzionali direttamente al peso totale del sistema, ed alla distanza del centro di gravità del sistema dall'asse M N', ed inversamente proporzionali alla distanza dei cardini.

Lezione 40ª

Di tutte le forze la più continua, e che ci occorre più sovente, anzi sempre di considerare è la gravità, cioè tutte le forze, che operano sia di un'edificio, o di un'opera qualunque di costruzione derivano dal peso dei corpi componenti l'edificio, ossia dalla gravità.

Essendo scopo principale dei nostri studii la ricerca delle condizioni perchè un'opera di costruzione sia in equilibrio, applichiamo pertanto ora la teoria, che abbiamo esposta nelle Lezioni antecedenti alla ricerca delle condizioni d'equilibrio dei corpi pesanti.

Sia l'asse delle z verticale, per l'equilibrio di più corpi pesanti invincibilmente tra di loro connessi, essendo verticale la direzione della gravità, son necessarie le condizioni $\Sigma Z = 0$, $F = 0$, $G = 0$, ora ΣZ non è che la somma algebrica delle forze, o dei pesi del sistema, per l'equilibrio è dunque necessario, che la somma delle forze, che tirano all'ingiù sia eguale alla somma delle forze, che tirano pel verso contrario, questa condizione è espressa da $\Sigma Z = 0$, ora due forze eguali e contrarie non si fanno equilibrio, se non sono opposte, le condi $F = 0$, $G = 0$ debbono dunque esprimere, che le due risultanti delle forze, che tirano per un verso, e delle forze, che tirano in senso contrario sono applicate ad uno stesso punto.

Per dimostrar ciò suppongo, che sia ΣZ_1 la risultante delle forze, che tirano secondo le z positive, ΣZ_2 la risultante delle forze, che tirano in senso contrario, e che $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\}$ sieno le coordinate del punto in cui ΣZ_1 incontra il piano delle xy, e che $\left.\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right\}$ sia il punto ove ΣZ_2 incontra lo stesso piano, dico, che $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ se vi ha equilibrio, ossia se $F=0$, $G=0$; Infatti da queste denominazioni risulta

$F = y_1 \Sigma Z_1 - y_2 \Sigma Z_2$, epperchè $\Sigma Z_1 = \Sigma Z_2$, $\begin{cases} F = \Sigma Z_1 (y_1 - y_2) = 0 \\ G = \Sigma Z_1 (x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$, perchè queste eguaglianze sieno soddisfatte

$G = x_1 \Sigma Z_1 - x_2 \Sigma Z_2$

bisogna che sia $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Se per un sistema particolare di corpi pesanti, le forze ad essi applicate soddisfanno soltanto alle equazioni $F=0$, $G=0$, il sistema si muove con moto progressivo, se soddisfanno soltanto alla equazione $\Sigma Z = 0$, vi ha moto rotatorio.

Vediamo ora cosa avvenga se vi ha qualche punto fisso nel sistema.

Siavi nel sistema un punto fisso. Supponiamo tutte le forze dirette in un senso, il che accade il più sovente nei sistemi di corpi pesanti, in cui i pesi son tutti diretti verso il centro della terra, perchè vi sia equilibrio bisogna, che il centro di gravità del sistema si trovi sulla verticale, che passa pel punto fisso allora il punto fisso sostiene uno sforzo eguale alla somma dei pesi dei corpi componenti il sistema, ossia al peso totale del sistema.

Se il sistema pesante è applicato all'estremità di una verga rigida mobile intorno ad un punto fisso, o sulvero, il sistema ha due posizioni d'equilibrio; ~~in quali si hanno~~ in ambe le posizioni la spranga rigida deve essere verticale, applicando ad esso il sistema col suo peso diretto all'ingiù, o col suo peso diretto all'insù si ha sempre equilibrio.

Se il sistema è legato ad un'asse fisso, possono avvenire tre casi:

o l'asse è verticale, ed allora il sistema è perso in equilibrio, ed ogni condizione d'equilibrio è superflua; o l'asse è orizzontale, o inclinato, in ambi questi casi la condizione d'equilibrio è, che il centro di gravità del sistema sia nel piano verticale che passa per l'asse; il peso totale potendo essere diretto all'insù, od all'ingiù senza che però cessi lo stato d'equilibrio del sistema, ripetta, che vi han due posizioni d'equilibrio se un corpo tocca un piano, perchè desso sia in equilibrio sul piano, la 1ª condizione è, che il piano sia orizzontale; infatti se ciò non fosse, il peso del corpo si potrebbe sempre scomporre in due forze, una normale al piano, che verrebbe etisa, l'altra parallela al piano, questa non avendo alcuna forza, che la contrasti, produrrebbe moto. Se questa condizione è soddisfatta, per l'equilibrio del corpo è ancora necessario, e basta che la verticale eretta nel punto di contatto del corpo col piano passi pel centro di gravità del corpo.

così per l'equilibrio di una sfera eterogenea posta su di un piano orizzontale è necessario e basta, che il diametro, il quale passa pel centro di gravità sia verticale, e vi han due posizioni d'equilibrio.

Una sfera omogenea è sempre in equilibrio in tutte le sue posizioni su di un piano orizzontale.

Un ellissoide a tre assi omogeneo ha sei posizioni di equilibrio su di un piano orizzontale, e sono le sei posizioni, in cui uno dei tre assi è verticale. Se l'ellissoide è eterogeneo, il suo centro di gravità sarà in un punto di esso solido, e non sarà più al centro di figura; per conoscere tutte le posizioni d'equilibrio di questo solido su di un piano orizzontale, bisogna conoscere quale sia il numero delle normali, che da esso centro di gravità si possono condurre all'ellissoide; ciascuna di queste normali posta in direzione verticale fornisce due

posizioni d'equilibrio del corpo.

Se il corpo tocchi il piano orizzontale secondo una linea retta o curva, per l'equilibrio è necessario e basta, che la verticale, la quale passa pel centro di gravità del corpo ferisca il piano in un punto della linea ~~di~~ cui si appoggia.

Quindi un cilindro circolare ~~d'ebano~~ omogeneo ed appoggiato ad un piano orizzontale secondo una generatrice ha una infinità di posizioni d'equilibrio.

Un cilindro ellittico omogeneo ne ha soltanto quattro; un cilindro ellittico eterogeneo ha tante posizioni d'equilibrio, quante sono le normali, che dal suo centro di gravità si possono condurre alla sua superficie.

Un prisma, che ha per base un poligono di n lati ha 3n posizioni d'equilibrio fra gli spigoli.

Se il corpo si appoggi per più punti sopra un piano orizzontale, se per mezzo di rette condotte per i punti d'appoggio del corpo formiamo un poligono, per l'equilibrio è necessario e basta che la verticale, la quale passa pel centro di gravità del corpo, detta da alcuni linea di direzione passi pel suddetto poligono, che vien chiamato base del corpo sul piano orizzontale.

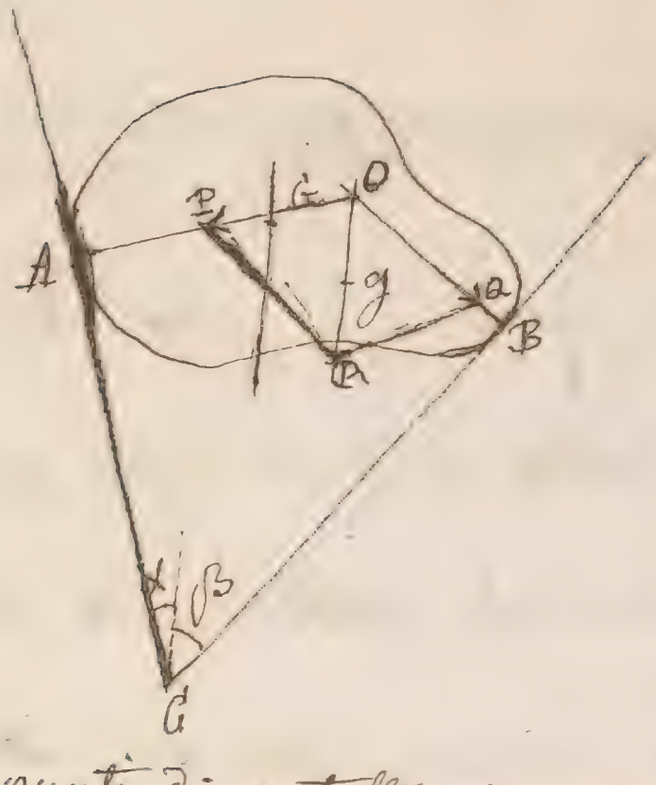
Infatti se la verticale indicata passa fuori della base, vi ha moto di rotazione; se passa dentro vi ha equilibrio, poichè il peso totale del corpo diretto secondo questa verticale si può scomporre in questo caso in forze verticali applicate ai punti di contatto, o vertici della base.

Tutto ciò, che abbiamo detto sta nell'ipotesi dei corpi incomprimibili, inalterabili.

Lezione 41ª

Se un corpo pesante è appoggiato sopra una superficie curva, perchè esso sia in equilibrio bisogna, che il piano tangente nel punto, in cui il corpo si appoggia sopra la superficie, sia orizzontale, ed inoltre, che la verticale eretta in questo punto passi pel centro di gravità del corpo.

Se il corpo si appoggia sopra più superficie curve, oppure, il che torna allo stesso, se è appoggiato per più punti ad una superficie curva, le condizioni d'equilibrio sono un po più difficili a rinvenirsi. Per arrivarvi, prendiamo ad esaminare in primo luogo i casi più ovvii, e verremo quindi senza accorgerci alle condizioni generali d'equilibrio.



Un corpo s'appoggia a due piani inclinati comunque, si domandano le condizioni d'equilibrio di un tal corpo.

La 1ª condizione è, che l'intersezione dei piani inclinati sia orizzontale; la 2ª è, che i punti di contatto sieno in un piano perpendicolare alla intersezione dei piani; la 3ª è che le normali ai piani inclinati erette nei punti di contatto si. taglino in qualche punto della verticale, che passa pel centro di gravità del corpo. Le tre condizioni sono necessarie e bastano per l'equilibrio; Bastano. Infatti essendo esse soddisfatte, il peso si può scomporre in due pressioni normali ai piani inclinati. Nella fig.ª queste condizioni non sono tutte soddisfatte, poichè il centro è in G, supponiamole soddisfatte, e che il centro sia in g, e che OR rappresenti il peso del corpo, scomponiamole in due forze normali OP, OQ; OP, OQ fanno colla verticale Og angoli complementi degli angoli α, β, che questa fa coi piani, l'angolo AOB è supplemento dell'angolo $ACB = \alpha+\beta$, ora la risultante di due forze, e le componenti sono proporzionali ciascuna al seno degli tra le altre due, dunque $R : P : Q :: \operatorname{sen}(\alpha+\beta) : \cos\beta : \cos\alpha$, e per conseguenza

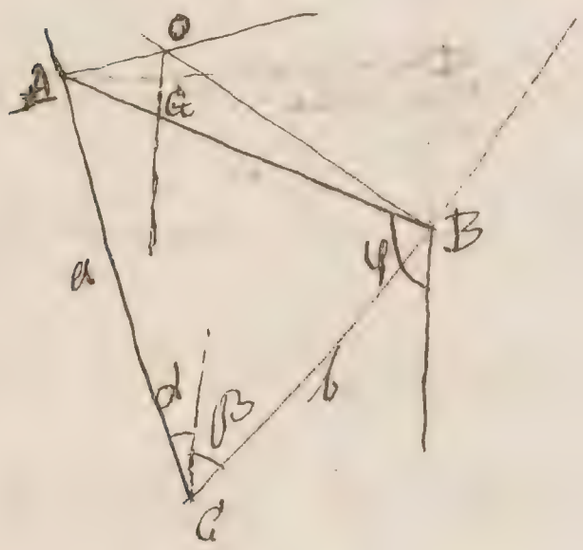
$$\begin{cases} P = R\,\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \\ Q = R\,\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

. Le tre condizioni suddette d'equilibrio sono necessarie. Infatti se la 3ª non è soddisfatta, il peso non si può scomporre in due forze, che agiscano secondo AO, BO; se la 2ª condizione non è soddisfatta, le due normali non essendo nello stesso piano, non ha una ragione di più, perchè non si possa operare la detta scomposizione;

finalmente se la 1ª cond.ne non è soddisfatta, la verticale direzione del peso non sarà in un piano perpendicolare alla intersezione dei piani, e si potrà il peso scomporre in due forze, una parallela alla detta intersezione, l'altra nel piano ad essa perpendicolare, la quale sarà elisa dalla resistenza dei piani, il corpo scorrerà parallelamente alla intersezione dei piani, se non sarà elisa, il corpo scorrendo prenderà anche un moto di rotazione, non sarà però mai equilibrio.

Ciò premesso siamo in istato di risolvere il seguente problema;

Dati due piani inclinati, la cui intersezione è orizzontale, ed in un piano perpendicolare alla intersezione una retta AB compresa fra i due piani, sospendere alla retta un peso in modo, che questo rimanga in equilibrio. Nei punti A, B si innalzino due normali ai piani inclinati, dal loro punto d'intersezione O si abbassi la perpendicolare verticale, essa determinerà intersecandosi con AB il punto G ove si deve sospendere il peso, perchè rimanga in equilibrio.



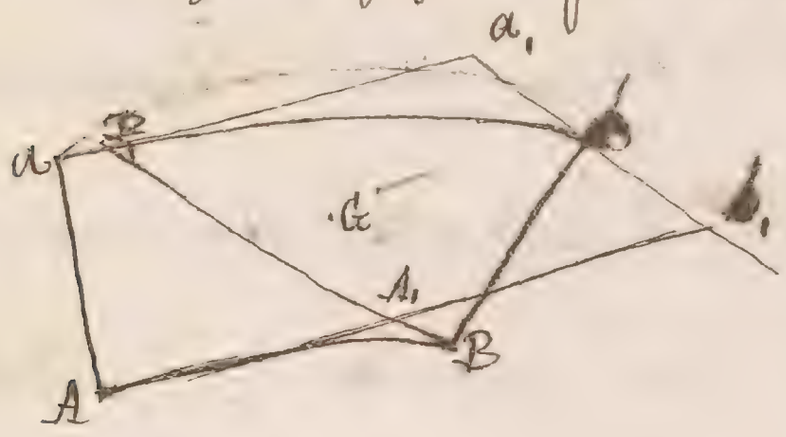
Dati gli angoli α, β che la verticale fa coi piani inclinati, e dati $AG = a$, $BG = b$, AB è determinata, (per abbreviazione chiamiamola c), la trigonometria ci dà i valori di AG, BG;

$$\begin{cases} AG = c \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \cdot \dfrac{b - a\cos(\alpha+\beta)}{a\operatorname{sen}\alpha + b\operatorname{sen}\beta} \\ BG = c \dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \cdot \dfrac{a - b\cos(\alpha+\beta)}{a\operatorname{sen}\alpha + b\operatorname{sen}\beta} \end{cases}$$

; Il problema inverso, Data la retta AB, ed un peso applicato in un punto determinato G di essa, collocarla fra i due piani in modo che regni l'equilibrio, non è più difficile a sciogliersi coll'ajuto della trigonometria. Il modo più comodo per risolver questo problema si è di prendere per incognita l'angolo φ, che AB fa colla verticale; e essendo dati gli AB, sia $AG = m$, ed $AB = l$, abbiamo $\dfrac{l^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} = \dfrac{m^2}{\cos^2\alpha} + \dfrac{(l-m)^2}{\cos^2\beta} - \dfrac{2m(l-m)\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, donde si ha $\operatorname{sen}\varphi$, e quindi φ.

~~[illegible]~~

Può darsi, che il corpo tocchi i piani inclinati secondo due superficie estese, come accade negli archi di muratura, per le volte, che s'appoggiano sopra due piani inclinati, detti pulvinari. Cominciamo a supporre un'arco, il quale si appoggi sui pulvinari secondo due rette contenute in un piano normale alla intersezione dei pulvinari, per l'equilibrio bisogna prima di tutto, che l'intersezione dei pulvinari sia orizzontale, e bisogna poi, e basta, che il peso si posta scomporre in due forze normali, le quali passino per le rette d'appoggio dell'arco; ora ciò è possibile,

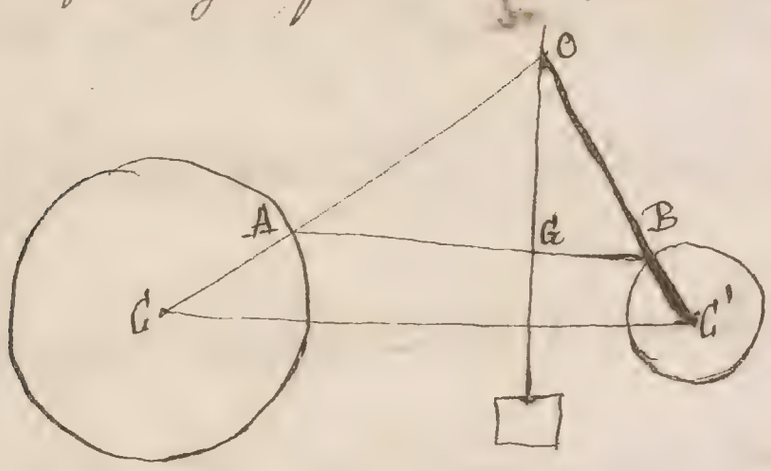


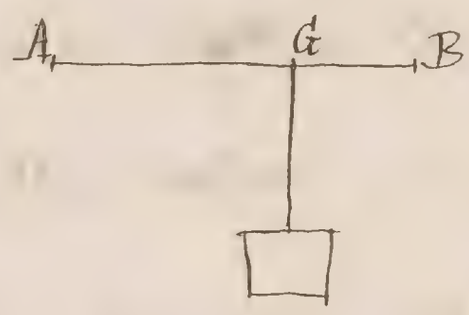
Le, essendo aA, bB le rette d'appoggio, innalzando ai pulvinari le normali a a, b b, B B, A A, il parallelogramma a, b, A, B, che queste vengono a formare è tagliato dalla verticale, che passa pel centro di gravità dell'arco.

Le ~~il corpo~~ l'arco taglia i pulvinari. Secondo aree comprese da linee curve, per l'equilibrio di esso arco è necessario e basta, che l'intersezione dei pulvinari sia orizzontale, e che i cilindri eretti normalmente ai pulvinari sulle basi dell'arco si incontrino, e che la verticale la quale passa pel centro di gravità passi per lo spazio compreso tra le due superficie cilindriche.

Se i pulvinari sono superficie curve, consideriamo come pulvinari i piani ~~di~~ tangenti nei punti di contatto, rispetto a questi pulvinari devono essere soddisfatte le stesse condizioni stabilite precedentemente, perchè vi sia equilibrio.

Siano per esempio due cilindri circolari di raggii diversi CA, C'B, ed una retta AB di una lunghezza data caricata in un punto G di un peso, la quale si voglia appoggiare sui cilin





in modo, che il peso ~~fosse~~ sia in equilibrio, ossia non faccia muovere la retta.

La prima condizione è che i cilindri sieno orizzontali, la 2ª è che la verticale, la quale posta per G. passi pel punto O d'intersezione delle normali erette alle superficie nei punti A, B. Per determinare la posizione di AB sui cilindri basta conoscere il punto, dove deve essere applicato uno degli estremi per es. A della retta, se riferiamo il punto A ad un sistema di assi ortogonali contenuti in un piano verticale e perpendicolare agli assi dei cilindri le incognite del problema saranno le coordinate del punto A. non è difficile il trovare perciò prefigliamo in modo, che quello delle ascisse sia orizzontale basta scrivere le equazioni di AB, OA, ed OB, trovare l'ascissa del punto O, e l'ascissa del punto G, ed eguagliarle, si avrà una equazione, alla quale aggiungendo le equazioni date e la relazione, che esprime ~~perciò si ha~~ essere AB di lunghezza data, si avrà un numero di equazioni bastante per determinare le coordinate non solo del punto A, ma anche del punto B. Avute le coordinate del punto A, per A conducendo una generatrice del cilindro, tutti i punti di questa soddisferanno come il punto A al problema.

Se il corpo si appoggia per più punti sopra più superficie, esso è in equilibrio quando il suo peso si può decomporre in più forze normali alle superficie nei punti di contatto.

Se si voglia per esempio collocare uno sgabello di tre piedi in equilibrio sopra una

Superficie bisogna collocarlo in modo, che il suo peso si possa decomporre in tre forze normali nei tre piedi dello sgabello; perciò è necessario e basta, che due normali si incontrino, che la terza incontri la verticale, la quale passa pel centro di gravità, e che la linea, la quale congiunge i due punti di intersezione sia nello stesso tempo nel piano delle due prime normali, e nel piano della 3ª normale e della verticale. Si arriva anche a queste condizioni supponendo tre forze dirette secondo le normali, scrivendo le condizioni d'equilibrio tra queste tre forze e il peso del ~~sistema~~ corpo, eliminando quindi i valori delle forze normali.

Quando si costruisce un edificio non basta costruirlo in modo, che tutte le parti si facciano equilibrio, importa ancora che l'equilibrio sia stabile, di modo che l'edificio resista senza cadere all'azione di quelle forze estranee ai corpi componenti l'edificio, le quali tendessero a scostarlo dalla sua posizione d'equilibrio; consideriamo ora pertanto l'equilibrio sotto quest'aspetto di essere più o meno stabile.

L'equilibrio di un corpo è stabile, quando allontanando il corpo infinitamente poco dalla posizione di equilibrio esso torna alla posizione primitiva; questo equilibrio dicesi anche permanente.

L'equilibrio dicesi instabile od istantaneo, quando rimuovendo il corpo dalla sua posizione d'equilibrio di una quantità infinitamente piccola, e dando ad esso un'impulso infinitamente piccolo, il corpo cade. Questo equilibrio è fisicamente impossibile, è però matematicamente concepibile; Bisogna adunque distinguere tra l'equilibrio instabile matematicamente, e l'equilibrio instabile fisicamente. L'equilibrio può inoltre essere più o meno stabile,

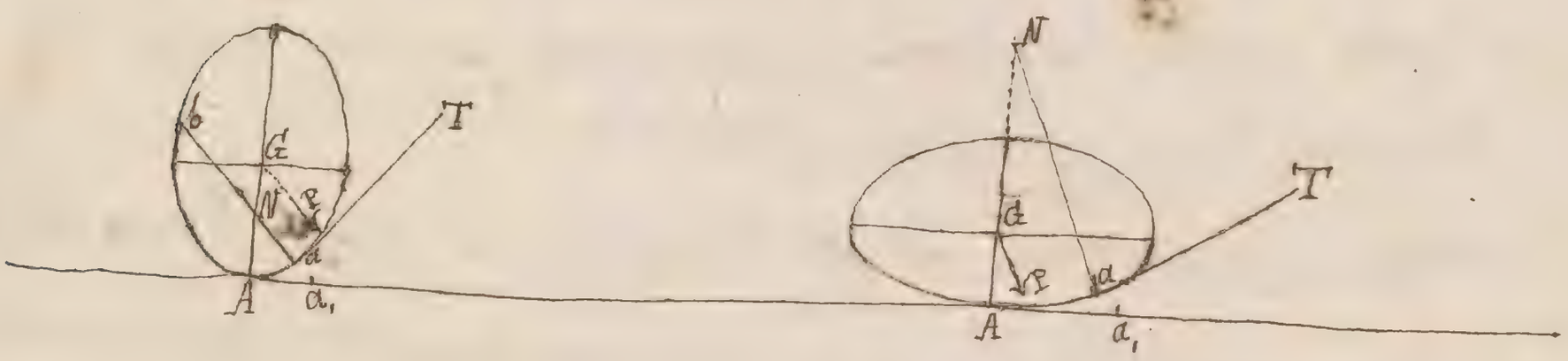
oppure tale, che quando si allontani il corpo infinitamente poco dalla sua posizione d'equilibrio, esso non ritorni alla posizione primitiva d'equilibrio, non cada, ma stia nella posizione sua novella in equilibrio; quest'ultimo equilibrio possiamo chiamarlo indifferente. Una sfera su d'un piano orizzontale ha questo equilibrio; ha pure questo equilibrio un cilindro circolare retto coricato sopra un piano orizzontale, purchè questo corpo nonti allontani dalla posizione d'equilibrio sollevandone l'asse.

Lezione 42.ª

Comunque sia un sistema rigido, e comunque sia sollecitato da forze, il suo equilibrio può esser stabile, instabile, più stabile, meno stabile, od indifferente, quel che diremo sarà di questi equilibrii assolutamente applicabile ad un sistema qualunque rigido. Cercheremo dei criterii per distinguere l'equilibrio stabile, od instabile, e dei metodi per misurare la maggiore o minore stabilità di un sistema che è in equilibrio.

Per render più chiaro quel che diremo, e per l'applicazione, che potremo fare alla costruzione degli edificii, consideriamo l'equilibrio di un sistema di corpi pesanti.

Un cilindro elittico omogeneo coricato sopra un piano orizzontale secondo una generatrice ha quattro posizioni d'equilibrio, due sono stabili, due instabili.



Per dimostrarlo facciamo una sezione perpendicolare all'asse del cilindro, come è rappresentata nella fig.ª, quando il cilindro è coricato sopra la sua generatrice, che passa pel vertice A dell'asse maggiore della ellisse, che si vede nella fig.ª l'equilibrio è instabile.

Infatti supponiamo, che incliniamo un poco il cilindro in modo, che esso venga a toccare il

piano orizzontale colla generatrice a, che sarà venuta in a', il piano tangente A T' sarà allora orizzontale, e la verticale che contiene il centro di gravità G sarà parallela alla normale NA, per non dipingere l'ellisse nella nuova posizione supponiamo, che A T sia orizzontale, N A sarà verticale, e G P sarà la verticale che passa pel centro di gravità, ossia la direzione del peso del cilindro; l'effetto di questo evidentemente è di far girare il cilindro da sinistra verso ~~destra~~ destra, ossia di scostarlo vieppiù dalla sua posizione primitiva d'equilibrio. ciò avviene per essere G P a destra di NA, ora G P è a destra di NA quando il punto N è al disotto del punto G sull'asse A G, l'equilibrio è dunque instabile quando il punto N è al disotto del punto G, ossia NA < AG;

Quando il cilindro è coricato sulla generatrice, che passa pel vertice dell'asse minore della ellisse ~~direttrice~~ del cilindro, l'equilibrio è stabile, poichè scostando il cilindro infinitamente poco dalla detta posizione d'equilibrio, la verticale GA diviene diretta rispetto all'ellisse secondo G P, la verticale eretta nel punto di contatto A ferisce l'asse A G in N, il qual punto è al disopra di G, e per conseguenza G P tende a far girare il cilindro da destra verso sinistra ossia tende a rimetterlo nella sua prima posizione d'equilibrio.

La osservazione, che abbiamo fatta, che l'equilibrio del cilindro è instabile, quando la normale eretta in un punto infinitamente vicino al punto di contatto A incontra la verticale A G eretta in questo punto in un punto, che è al disotto di G, ed è stabile, quando il punto d'incontro suddetto è al disopra del punto G, vale per ogni corpo collocato sopra un piano orizzontale, cioè se NA < AG l'equilibrio è instabile, se NA > AG l'equilibrio è stabile;

Bisogna però avvertire, che in una superficie qualunque non vi hanno che due direzioni secondo cui le normali alla superficie si incontrano, queste direzioni

sono normali una all'altra, e per esse i raggi di curvatura sono per una il massimo, per l'altra il minimo dei raggi di curvatura di tutte le altre direzioni, per riconoscere dunque se l'equilibrio è stabile od instabile bisogna inclinare il corpo secondo una delle linee sulle che si chiamano linee di curvatura, allora, osservando, che NA non è che il raggio di curvatura si vedrà se i raggi di curvatura di queste linee saranno minori della distanza AG del punto di contatto al centro di gravità, e si dirà che l'equilibrio è instabile, ovvero se i raggi di curvatura sono maggiori di AG, e si affermerà che l'equilibrio è stabile, poichè in ogni due casi secondo qualunque altra linea intermedia fra quelle di curvatura si inclini il corpo, esso non ritornerà nel 1° caso, ritornerà nel 2° alla sua posizione primitiva di equilibrio. Se le normali in A da Li incontrassero nel centro di gravità G si direbbe, che l'equilibrio è indifferente. Se il raggio di curvatura massimo è maggiore della distanza del punto A al centro di gravità, ed il raggio di curvatura minimo è minore di questa stessa distanza, concludiamo, che l'equilibrio è stabile pel verso della prima linea di curvatura, instabile pel verso della seconda linea di curvatura.

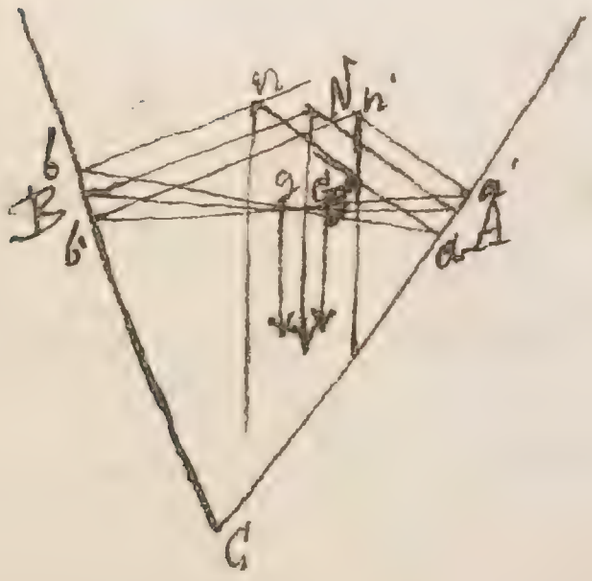
Il raggio di curvatura di una ellisse avente per semiassi a, b, è nel vertice dell'asse maggiore eguale [redacted] $\frac{b^2}{a}$, nel vertice dell'asse minore eguale [redacted] $\frac{a^2}{b}$, ora se a è l'asse maggiore, [redacted] $\frac{b^2}{a} < a$, $\frac{a^2}{b} > b$, dunque l'ellisse ha un'equilibrio instabile, quando si appoggia sul vertice dell'asse maggiore, ed un'equilibrio stabile, quando si appoggia sul vertice dell'asse minore.

Un'ellisoide a tre assi eguali ad a, b, c ha sei posizioni d'equilibrio, se si colloca sopra un piano orizzontale, e sono le sei posizioni sui sei vertici degli assi.

Le due posizioni sui due estremi dell'asse massimo a sono posizioni d'equilibrio instabile,

poichè in tali vertici le linee di curvatura sono le sezioni principali, ossia le ellissi, i cui semiassi sono a, b ed a, c, ed i raggii di curvatura sono $\frac{b^2}{a} < a$, $\frac{c^2}{a} < a$; nelle due posizioni sulle estremità dell'asse minimo c, le linee di curvatura sono le ellissi aventi per semiassi b, c, ed a, c, i raggii di curvatura sono $\frac{b^2}{c} > c$, $\frac{a^2}{c} > c$, l'equilibrio è dunque stabile; e nelle due posizioni d'equilibrio sui vertici dell'asse b, l'equilibrio è stabile in un senso, instabile nell'altro, stabile nel senso della ellisse, i cui semiassi sono b, a, instabile nel senso della ellisse, i cui semiassi sono b, c.

Generalmente parlando è impossibile di trovare una sfera osculatrice ad una superficie, è però sempre possibile di trovare un'ellissoide osculatrice, anzi è sempre possibile di determinarla in modo, che il punto di contatto sia un vertice dell'ellissoide, invece dunque della superficie, o porzione piccolissima di superficie, per cui il corpo tocca il piano orizzontale, posso sostituire la superficie della ellissoide osculatrice; onde quando ci proporremo di determinare se l'equilibrio di un corpo è stabile od instabile, bisognerà, che troviamo le due linee di curvatura della ellissoide osculatrice, e osserviamo se i loro raggi di curvatura sono maggiori o minori della distanza dal punto di contatto al centro di gravità del corpo.



Quando il corpo è appoggiato a due piani inclinati AC, BC, come quando si ha, come è dipinto nella figura, un peso attaccato ad una verga

rigida AB in un punto G, l'equilibrio è stabile, se rimossa comunque poco dalla sua posizione d'equilibrio la verga, il punto G si alza portandosi in g, l'equilibrio al contrario è instabile, se il punto G per un tal movimento cala.

Questo criterio è generale, e diciamo che ogni volta che si ha un sistema qualunque in equilibrio, e si vuole scostandolo infinitamente poco dalla sua posizione d'equilibrio, riconoscere se l'equilibrio sia stabile od instabile, basta vedere se nel moto che subisce il centro di gravità del sistema si abbassa o si innalza relativamente all'orizzonte, finite è il contrario. Se abbiamo degli esempi evidenti in un cilindro ellittico coricato secondo la generatrice, in una ellissoide a tre assi. In ogni posizione d'equilibrio instabile l'altezza del centro di gravità è massima, in ogni posizione d'equilibrio stabile è minima. Nel caso della retta, che si appoggia sopra due piani inclinati, il centro G descrive una ellisse; possono avvenire due casi, od il centro G è nel punto più basso della ellisse ed allora l'equilibrio è stabile, od è nel punto più alto, ed allora l'equilibrio è instabile. Nel caso del cilindro ellittico se esso si fa rotolare sul piano, su cui si appoggia, il centro di gravità descrive una curva, tutti i massimi di essa sono le posizioni d'equilibrio instabili, e tutti i minimi sono le posizioni stabili.

Vi son altri casi di altri corpi. La curva descritta dal centro di gravità può avere dei massimi gli uni più grandi degli altri, questi massimi danno luogo a posizioni tanto più instabili delle altre, parimente la curva può avere dei minimi più ~~alti~~ bassi e più alti, allora avremo le posizioni d'equilibrio più o meno stabili.

Tutto ciò è vero semprechè il corpo è terminato da una superficie curva e continua, ma se il corpo è terminato da superficie piane, come sarebbe un prisma, allora la curva descritta dal centro di gravità è formata da tanti archi di circolo, i cui centri sono nelle successive posizioni dei vertici del poligono sezione retta del prisma, tutti i massimi dei varii archi sono posizioni instabili d'equilibrio del prisma, il che si vede facilmente perchè allora il prisma poggia sul piano orizzontale secondo uno spigolo, tutti i punti d'intersezione degli archi adiacenti sono le posizioni stabili d'equilibrio, ciò si vede facilmente perchè il prisma si appoggia con una delle sue facce del piano orizzontale.

Non è però men vero il criterio generale dato per riconoscere la stabilità di un corpo, poichè i punti d'intersezione degli archi sono i minimi.

Lezione 43.ª

Nella lezione antecedente noi abbiamo detto, che quando si aveva un sistema in equilibrio per riconoscere se quest'equilibrio era stabile od instabile bisognava muoverlo dandogli un impulso piccolissimo, allora si osservava se il centro di gravità riprendeva la sua posizione primitiva per l'azione del peso, e si diceva, che l'equilibrio era stabile, ovvero se se ne allontanava e dicevamo l'equilibrio essere instabile.

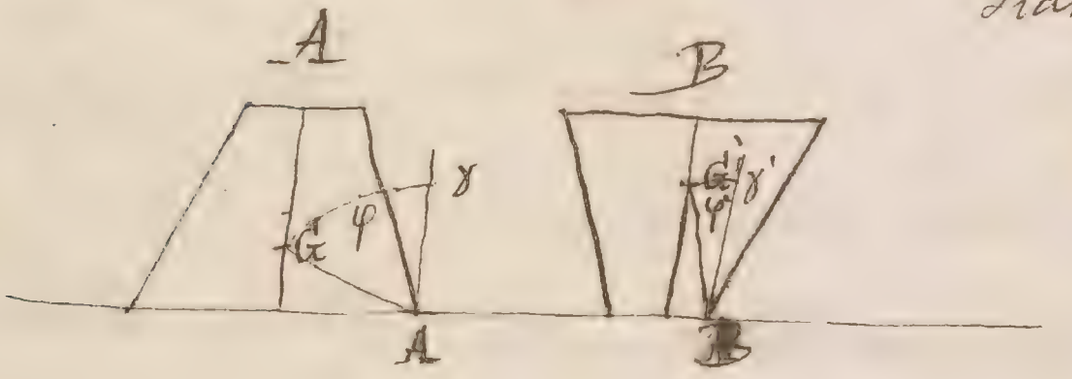
nel caso dell'equilibrio stabile, il corpo per rimettersi nella posizione d'equilibrio, dassi si era scostato, acquista una certa velocità, la quale per legge d'inerzia non perde, quando arriva in detta posizione, ma la

conserva, di modo che non si ferma in essa posizione, ma la oltrepassa per ritornarvi di nuovo, poichè il peso stesso del corpo glielo toglie dopo un certo tempo, allora sarà in una certa posizione, donde si muoverà per l'azione del peso verso la posizione d'equilibrio giunto di nuovo in questa, il corpo per legge d'inerzia di nuovo si muove da tal posizione per ritornarvi per la stessa ragione ma ci era ritornato dall'altra parte, e così dondola eternamente; Se in natura non accadono simili perpetue dondolazioni, ciò avviene per la resistenza dell'aria, e per gli attriti, le quali cause consumano poco a poco la velocità del corpo, finchè esso si ferma.

Nel caso dell'equilibrio instabile, allora il centro di gravità allontanandosi dalla posizione che aveva, si muoverà finchè passi per una posizione di equilibrio stabile ma siccome ancor qui arriva con una certa velocità non vi si fermerà, ma la oltrepasserà, e dondolerà come nel caso precedente attorno a questa posizione, di modo che le l'attrito e la resistenza dell'aria giungono a fermare il corpo dopo un certo tempo, ~~la fermer~~ esso si fermerà in una posizione d'equilibrio stabile.

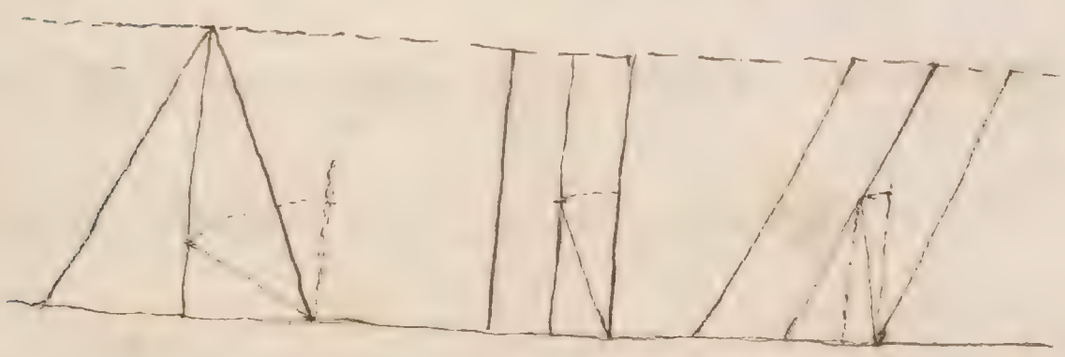
Finora ci siamo trattenuti a distinguere ~~le~~ l'equilibrio stabile dall'instabile - ma abbiamo promesso di dar delle regole per misurare la maggiore o minore stabilità dei corpi, pertanto occupiamoci ora alcun poco adesso.

Siano per primo esempio due coni tronchi A, B,



di cui uno poggi sulla sua base maggiore l'altro sulla base minore, se si fa la prova a rovesciare B con uno sforzo nè più nè meno capace di produrre tale rovesciamento, e quindi col medesimo sforzo si tenta di rovesciare A si vedrà, che non vi si riesce, di modo che si è indotto a dire, che per cangiare A, B dalle loro posizioni d'equilibrio si richiede per il primo una forza maggiore, che per il secondo, l'equilibrio del primo è dunque più stabile dell'equilibrio del secondo.

Quando un corpo si rovescia dalla sua posizione stabile ~~ecc~~ il centro di gravità del corpo descrive un'arco di circolo, così nel nostro caso il centro G descrive un'arco di circolo Gf col raggio AG, oppure un'arco di circolo G'f' col raggio BG', ed il corpo cade ~~dove che~~ [illegible] ha descritti gli archi Gf, G'f', [illegible] [illegible], gli archi Gf, poichè allora la linea di direzione cade fuori della base del corpo; ora nel caso del cono A l'arco Gf è maggiore dell'arco G'f' descritto dal centro di gravità del cono B, dipende dunque dalla maggiore o minore lunghezza degli archi Gf, G'f' la maggiore o minore stabilità del corpo, potremmo dunque prendere per misura della stabilità di un corpo la lunghezza dell'arco ~~stabilità~~ Gf, per non avere a misurare un'arco, possiamo prendere, e si prende realmente da tutti per misura della stabilità di un corpo la distanza If ossia il seno verso dell'arco Gf descritto dal centro A con raggio AG, e ~~sottendente~~ misurante l'angolo φ di AG colla verticale eretta in A, poichè le lunghezze degli archi crescono col crescere dei ~~loro proporzionali ai~~ loro seni versi, ora il seno verso If è maggiore del seno verso I'f' per due motivi, 1° perchè l'angolo φ è maggiore dell'angolo φ', 2° perchè il raggio AG è maggiore del raggio BG', si direbbe dunque male dicendo, che la maggiore o minore stabilità dipende assolutamente dalla maggiore o minore grandezza dell'angolo φ. Quindi ripetiamo che gli edifici



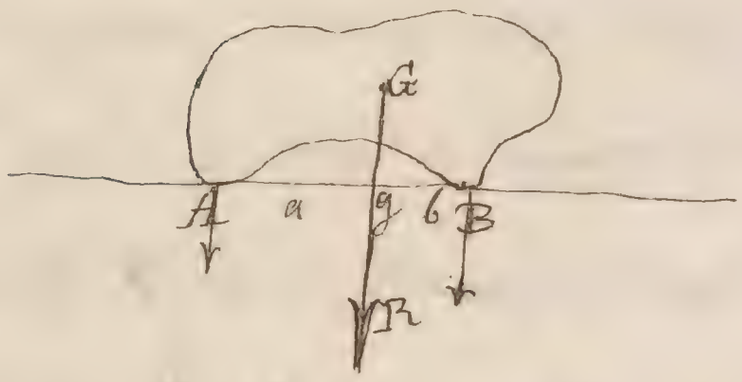
piramidali, o conici sono molto più stabili degli edifici prismatici o cilindrici della stessa solidità, e della stessa altezza, che un cilindro obliquo è meno stabile di un cilindro retto di egual base ed altezza, etc.

Resta ancora una cosa molto importante da trattarsi, abbiamo dati dei metodi generali per determinare le pressioni apportate dai punti fissi di un sistema rigido, restano da applicarsi questi metodi al caso dei sistemi pesanti, affinchè possiamo proporzionare

la resistenza di questi agli sforzi, che devono sostenere.

Se un sistema è sospeso ad un punto fisso, questo sostiene uno sforzo, che è il peso del sistema.

Se il sistema è appoggiato a due punti fissi A, B, per determinare le pressioni sviluppate da questi punti, immaginiamo il peso del sistema applicato in g sulla direzione della verticale GR, che passa pel centro di gravità G, scomponiamolo quindi in due forze parallele applicate una in A, l'altra in B, chiamando

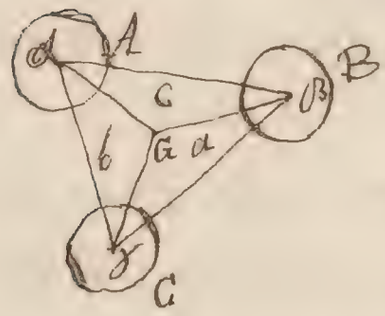


a, b le distanze Ag, Bg, e con le lettere A, B le intensità delle componenti del peso R. avremo

$$\begin{cases} A = R\,\dfrac{b}{AB} \\ B = R\,\dfrac{a}{AB} \end{cases}$$

, or queste non sono che le pressioni sopportate dai punti A, B.

Se il sistema pesante è sostenuto da tre punti fissi, o per fissar meglio le idee, da tre colonne

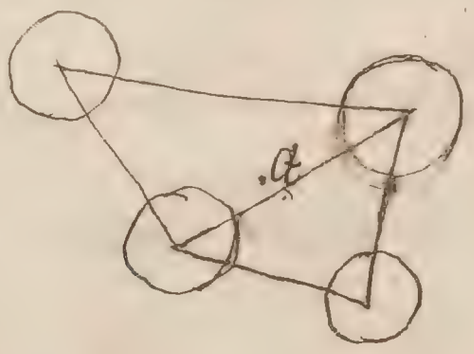


projettate orizzontalmente in A, B, C, per determinare quanto peso sostenga ciascuna colonna, cerco il centro di gravità del peso totale sostenuto dalle tre colonne, suppongo questo peso applicato al punto d'incontro della verticale, che passa pel centro, scompongo quindi il peso, che chiamerò R in tre forze A, B, C applicate nei centri delle basi A, B, C delle colonne; chiamando a, b, c le aree $\mathcal{A}GB'$, $\mathcal{A}GC'$, $\mathcal{A}GB'$, avrò

$$\begin{cases} A = R\,\dfrac{a}{a+b+c} \\ B = R\,\dfrac{b}{a+b+c} \\ C = R\,\dfrac{c}{a+b+c} \end{cases}$$

: Se si volessero avere le pressioni sul suolo, bisognerebbe aggiungere il peso delle colonne al peso del sistema, e trovare il comun centro di gravità di questi pesi.

Se le colonne fossero in linea retta, o fossero in numero maggiore di tre, non potrei invocare corredo di cognizioni, che finora abbiamo acquistato, determinare le pressioni sostenute da ciascuna colonna. Se le colonne sono tutte eguali, e si voglia che esse portino tutte lo stesso peso



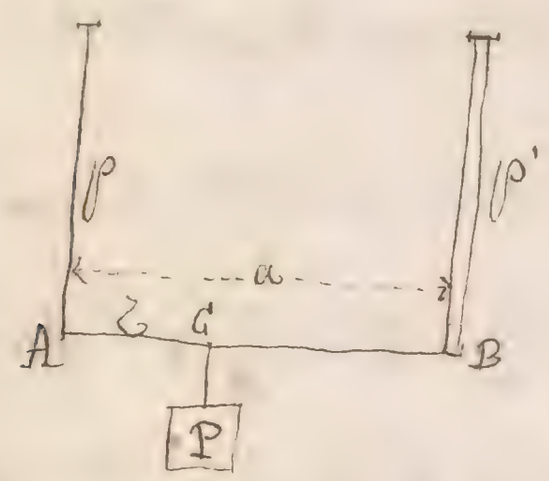
bisognerà collocarle in modo, che considerando come applicati nei centri delle loro basi tanti pesi eguali, il centro

di gravità di questi sia sulla verticale del centro di gravità del sistema.

Così quando si fa una palizzata per sostenere un'edificio, quando il terreno non è abbastanza resistente, bisogna avvertire, che il centro comune di gravità dei pali sia sulla verticale del centro di gravità dell'edificio.

Lezione 44ª

Molti problemi si possono sciogliere con le considerazioni della lezione antecedente, sciogliamone alcuni. Siano due cordoni p, p' verticali, ai quali è appesa una spranga inflessibile, senza peso ed orizzontale, sia P il peso massimo, che il primo cordone può sopportare senza lacerarsi, p' il peso che può sopportare il secondo, se si vuole applicare un peso P in un punto della spranga rigida bisognerà evidentemente, che P sia $< p+p'$, o tutt'

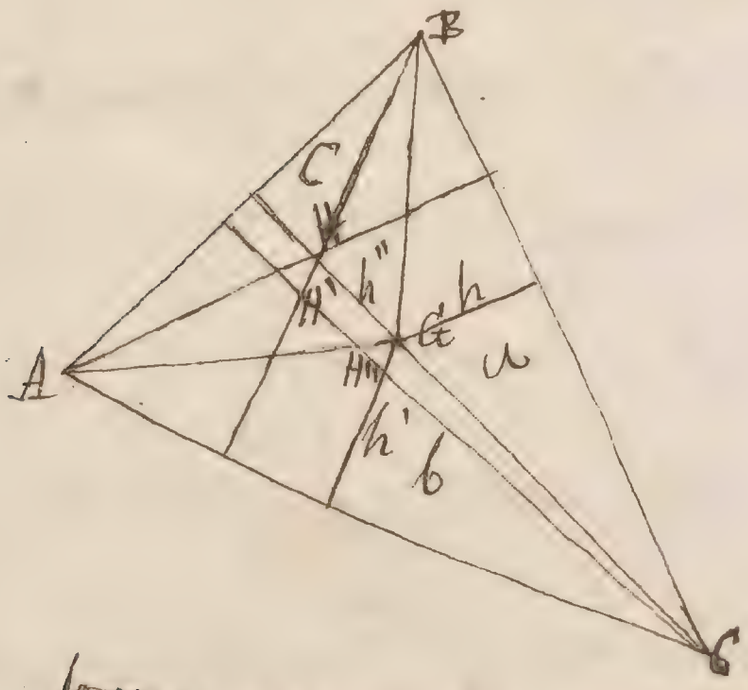


al più $= p+p'$. Supponiamo primieramente, che sia $P = p+p'$, allora si può ravvisare questo peso come risultante da due pesi applicati nei punti A, B, i quali perciò saranno inversamente proporzionali alle loro distanze dal punto d'applicazione d'del peso P, di modochè per trovare questo punto è bisogna dividere AB in parti inversamente proporzionali a p, p'. Si vede, che il punto è unico, a cui si possa applicare il peso P. Supponiamo adesso, che P sia $< p+p'$, allora si possono presentare tre casi distinti, o il peso P è minore di ciascheduno dei pesi p, p', o è minore dell'uno e maggiore dell'altro, o è maggiore di ciaduno in particolare.

Nel 1° caso è evidente, che in qualunque punto della verga AB tra A e B si applichi P, vi sarà sempre equilibrio. Nel 2° caso quando $P < p$, $P > p'$, il peso P non si può più applicare in un punto qualunque di AB, ma vi sarà un limite verso B, oltre il quale non sarà permesso di sospendere il peso P senza lacerare il cordone p'

Per determinare questo limite, chiamiamo con una lettera la distanza AG, sia z, sia a la lunghezza della sbarra AB, avremo le pressioni sopportate dai cordoni, che saranno rappresentate da $\frac{a-z}{a}P$, $\frac{z}{a}P$, quanto alla prima, essendo essa sempre minore di P, potrà sempre essere sopportata dal cordone p, dovunque sia G, purchè tra A e B, la seconda sarà sopportata dal cordone p' se essa non sarà $> p'$, si ha dunque il limite tra cui può variare la posizione del punto G ponendo $\frac{z}{a}P = p'$; da questa equazione ricaviamo $z = \frac{ap'}{P}$; il peso P si può dunque applicare in qualunque posizione tra il punto A, ed il punto G determinato dalla sua distanza dal punto A $AG = \frac{ap'}{P} = a\frac{p'}{P}$. Finalmente quando $P > p > p'$, se si applica P in un punto G si avrà ancora per i valori delle due pressioni sostenute dai cordoni p, p', $\frac{a-z}{a}P$, e $\frac{z}{a}P$; queste dovendo sempre essere rispettivamente minori di p, p' si avranno le relazioni $\frac{a-z}{a}P < p$, $\frac{z}{a}P < p'$, donde $z > a\frac{P-p}{P}$, $z < a\frac{p'}{P}$, queste disuguaglianze ci dicono, che $z = a\frac{P-p}{P}$, $z = a\frac{p'}{P}$ sono i limiti dei valori di AG, questi limiti ci danno due punti, fra i quali dovremo sempre applicare il peso P, se non vorremo lacerare i cordoni.

Sia ABC un triangolo senza peso e inflessibile, appeso orizzontalmente a tre cordoni verticali annodati nei suoi vertici A, B, C; sieno p, p', p'' i massimi pesi, che possono sopportare i cordoni, si vuole su questo triangolo mettere un peso $P = p + p' + p''$, il quale stia in equilibrio.



Se P non fosse minore, ma $= p + p' + p''$, il punto G d'applicazione di questo peso si ha per le relazioni

$$\begin{cases} p = P\frac{a}{a+b+c} \\ p' = P\frac{b}{a+b+c} \\ p'' = P\frac{c}{a+b+c} \end{cases}$$

in cui le incognite sono le aree $GBC = a$, $AGC = b$, $AGB = c$, ora essendo H, H', H'' le altezze del triangolo ABC, e h, h', h'' le altezze dei triangoli BGC, AGC, AGB, i rapporti $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$ sono rispettivamente eguali ai rapporti $\frac{h}{H}$, $\frac{h'}{H}$, $\frac{h''}{H''}$,

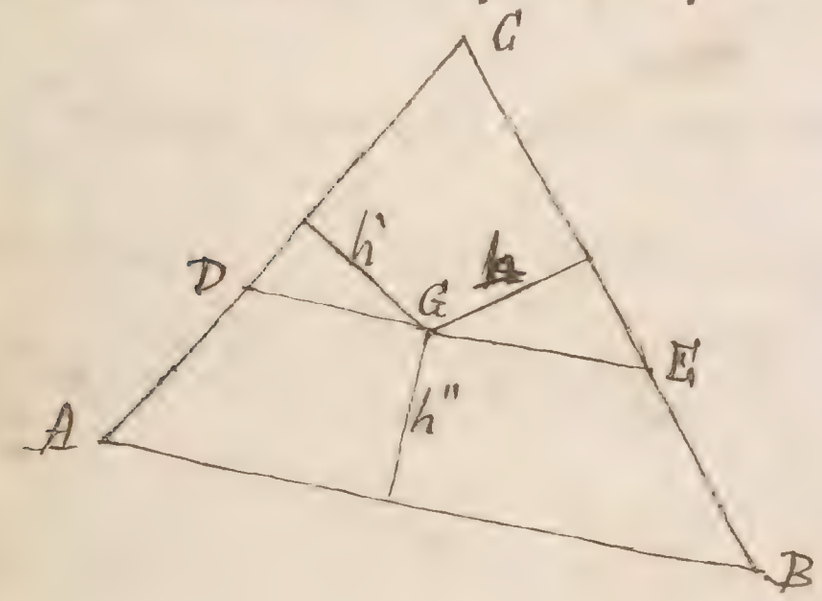
Sostituendo questi nelle relazioni trovate, abbiamo da esse

$h = H\frac{p}{P}$, $h' = H'\frac{p'}{P}$, $h'' = H''\frac{p''}{P}$, ed il punto G è determinato, poichè basterà alle distanze h, h', h'' dai lati BC, AC, AB tirare delle parallele a questi lati, la loro intersezione sarà il punto G.

Quando $P < p+p'+p''$ possono avvenire quattro casi distinti, o P sarà minore di ciascuno dei pesi p, p', p'', ovvero minore di ~~uno~~ maggiore del ~~uno~~, terzo ovvero minore di ~~due~~ e maggiore del ~~due~~, o finalmente sarà maggiore di ciascuno.

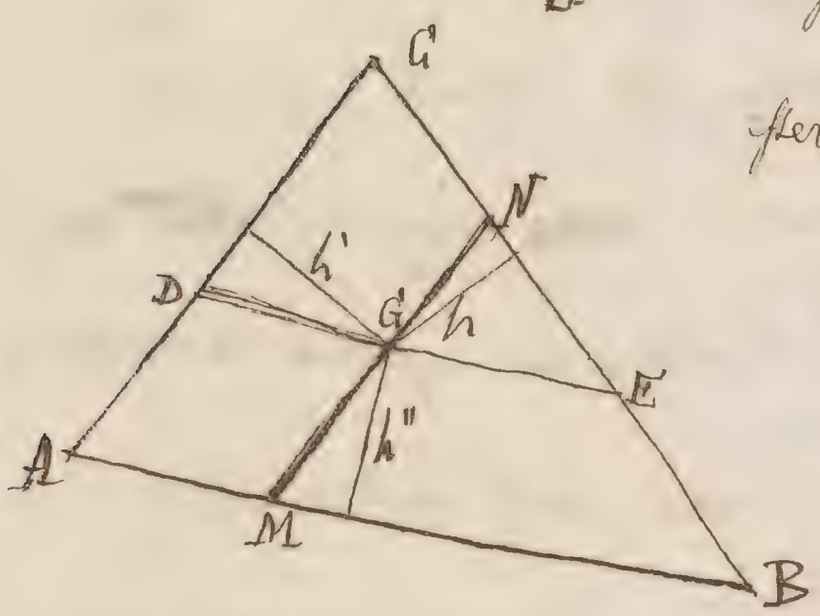
1.° Caso. $P < p < p' < p''$. È evidente, che in qualunque punto del triangolo ABC si applichi P vi sarà sempre equilibrio, perchè la posizione più sfavorevole sarebbe quando si applicasse il peso P in un vertice, ora in questa posizione vi sarà equilibrio, poichè P eserciterà una pressione minore di quella, che è capace di sostenere il cordone corrispondente. Il peso P potendosi applicare in qualunque punto del triangolo ABC, e non in altri punti, è evidente, che i limiti, i quali comprendono tutte le posizioni del punto d'applicazione di P sono quelli stessi del triangolo

2.° Caso. $P < p < p' > p''$. Sieno X, Y, Z le tensioni esercitate dal peso P sui cordoni p, p', p''; abbiamo $\left.\begin{array}{l} X = P\frac{h}{H} \\ Y = P\frac{h'}{H'} \\ Z = P\frac{h''}{H''} \end{array}\right\}$,



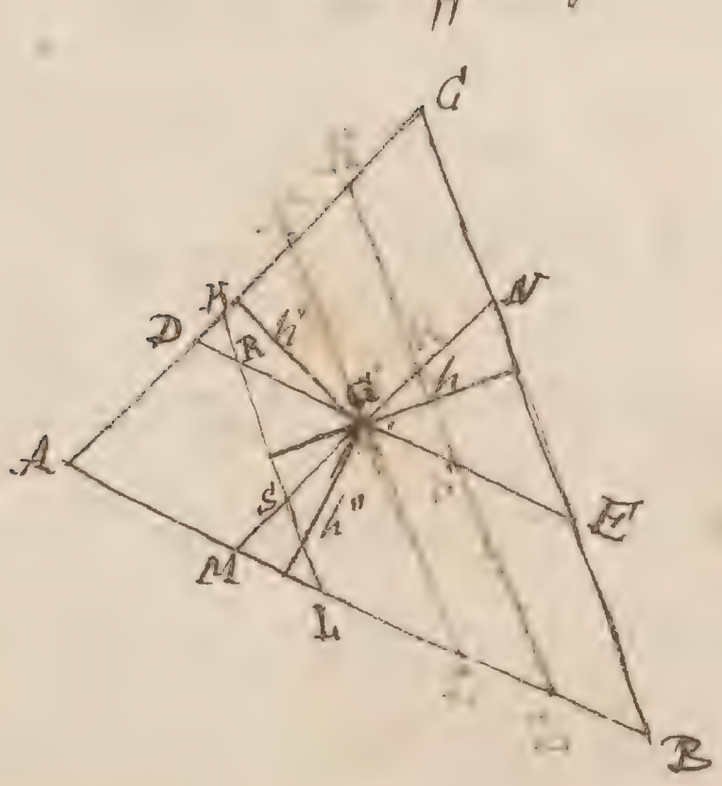
nella 1.ª equazione X dipende solo da h, il massimo suo valore è $h = H$, allora $X = P$, ma $P < p$, dunque questa equazione è sempre soddisfatta, perchè h non diventi maggiore di H, il medesimo è della seconda, quanto alla terza equazione Z non potendo oltrepassare p'', dovrà essere $P\frac{h''}{H''} < p''$, ossia $h'' < H''\frac{p''}{P}$, il limite dunque di h'' è $h = H''\frac{p''}{P}$, ossia se tiriamo alla distanza $h'' = H''\frac{p''}{P}$ dal lato AB tiriamo una parallela a questo lato, il punto G non potrà oltrepassare questa parallela verso il punto C, esso dunque dovrà sempre essere dentro il perimetro del trapezio D, perchè il peso P, che gli è applicato stia in equilibrio, ossia perchè i cordoni non si rilascino

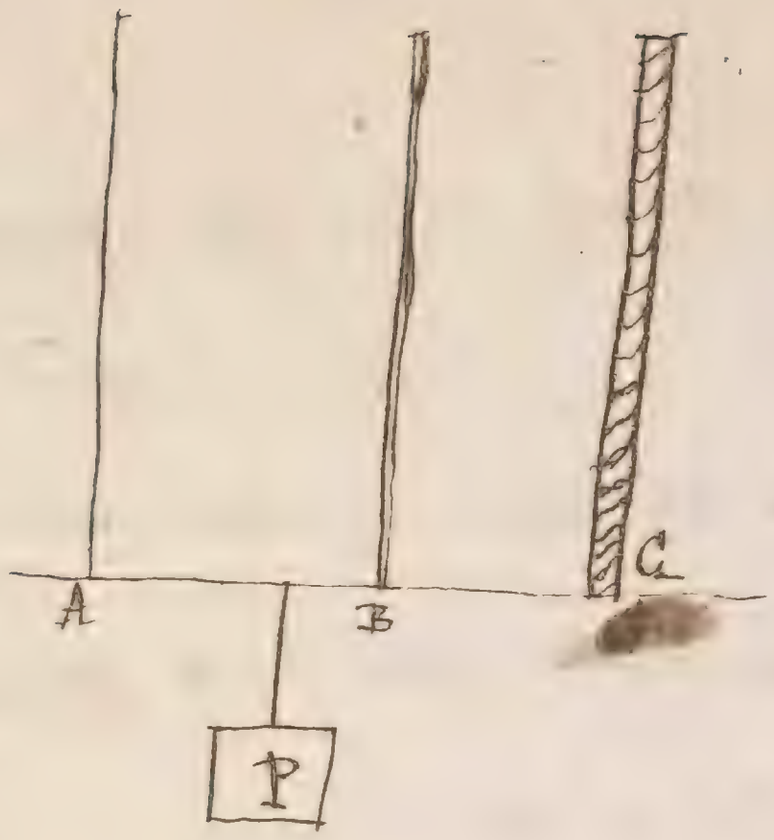
3.° Caso. $P<p>p'>p''$. Essendo $P<p$ nell'equazione $X=P\frac{h}{H}$ si può lasciar crescere X, purchè non diventi $>P$, perchè non può mai oltrepassare p. Restano le altre due equazioni $\begin{cases} Y=P\frac{h'}{H'} \\ Z=P\frac{h''}{H''} \end{cases}$ nelle quali Y e Z, quanto ad h' e h'' possono crescere fino ad essere $=P$, ma noi non possiamo lasciarli crescere, ma solo fino ad essere eguali a p', p'' di modochè i limiti da porsi ad h', h'' sono quelli, che si hanno ponendo $\begin{cases} P\frac{h'}{H'}=p' \\ P\frac{h''}{H''}=p'' \end{cases}$, quindi si ha $\begin{cases} h'=H'\frac{p'}{P} \\ h''=H''\frac{p''}{P} \end{cases}$,



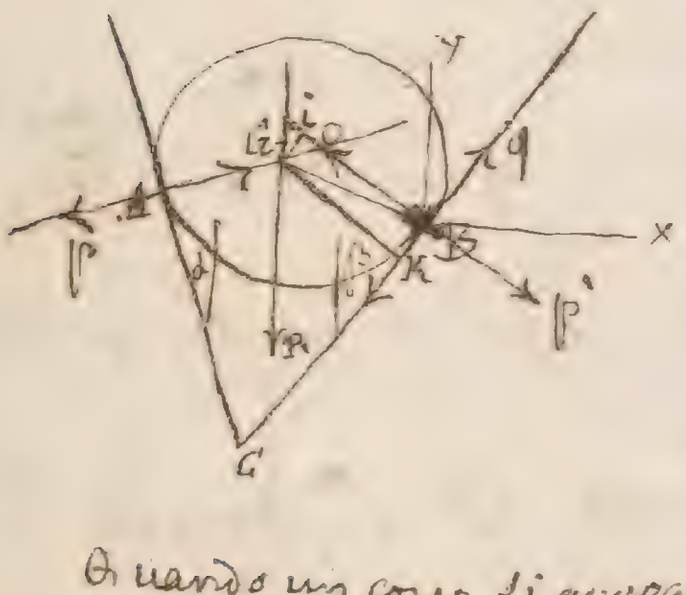
di queste due condizioni la 1ª esprime, che il punto G non può oltrepassare la ~~retta~~ parallela MN al lato AC condotta alla distanza $h'=H'\frac{p'}{P}$ dal lato B, la seconda esprime, che il punto G ~~non può~~ uscire dal perimetro del trapezio ABED determinato dalla retta DE condotta parallelamente ad AB alla distanza $h''=H''\frac{p''}{P}$; il punto G è dunque obbligato per mantenere l'equilibrio a stare dentro il perimetro del parallelogrammo AMGD.

4.° Caso. $P>p>p'>p''$. In questo caso finalmente X, Y, Z non possono essere maggiori di p, p', p'', e i massimi valori, che possano acquistare saranno p, p', p''; ponendo le equazioni $\begin{cases} P\frac{h}{H}=p \\ P\frac{h'}{H'}=p' \\ P\frac{h''}{H''}=p'' \end{cases}$ abbiamo da esse i limiti di h, h', h'', i quali sono dunque $h=H\frac{p}{P}$, $h'=H'\frac{p'}{P}$, $h''=H''\frac{p''}{P}$. alle distanze $H\frac{p}{P}$, $H'\frac{p'}{P}$, $H''\frac{p''}{P}$ dai lati BC, AC, AB conducendo tre parallele a questi lati, il punto G deve dunque costretto per l'equilibrio a stare nel triangolo GBS.





Se i cordoni sono tesi in linea retta, non sappiamo determinare le pressioni sostenute da essi; quando in un punto della spranga rigida ABC si applica un peso P, possiamo però trovare dei limiti, tra i quali debba applicarsi il peso P, perché i cordoni non si lacerino. Per trovar questi limiti sieno a, b, c i massimi pesi, che possono sostenere i tre cordoni, il peso P dovendo sempre per l'equilibrio essere applicato tra A e C, potremo togliere il cordone B e cercare i limiti del punto d'applicazione del peso P tra A e C, questi limiti non cangieranno, quando si metta il cordone B, poichè desso ajuta a sostenere il peso P; se il peso P s'applichiamo tra A e B, bisognerà perchè vi sia equilibrio, che vi sia il cordone A, potremo però togliere il cordone B, togliendolo avremo i limiti già accennati, ma possiamo anche togliere il cordone C, cercando i limiti in questo caso tra A e B, avremo due certi limiti a', b', se i primi limiti sieno a', c', e se $a'' > a'$ i limiti ricercati saranno a'', c'. Potremo cercare dei limiti ancor più estesi, togliendo il cordone A, e supponendo il peso applicato tra B e C, avremo allora certi limiti b'', c'' tra B e C, se sarà $c''' > c''$, diremo, che i limiti, tra cui si può applicare il peso P sono a'', c''.



Quando un corpo si appoggia a due piani inclinati, e la verticale, che passa pel suo centro di gravità G cade tra i punti d'appoggio A e B, ma non passa per O, il corpo sta in equilibrio, se esso è ritenuto per es° da un chiodo in uno dei suoi punti d'appoggio, per es° in B.

Infatti la verticale GR, a cui intendiamo applicato il peso R del corpo, possiamo

scomporla in due forze GA, GB una normale in A, l'altra che passa pel punto fisso B, che vengono distrutte dalla resistenza del piano AC, e del punto fisso B.

Il piano AC, ed il punto B distruggendo tali forze sopportano degli sforzi, vediamo di determinarli. Perciò immaginiamo che si tolgano i punti A e B, e vediamo che forze debbansi applicare in A ed in B perchè il corpo non si muova.

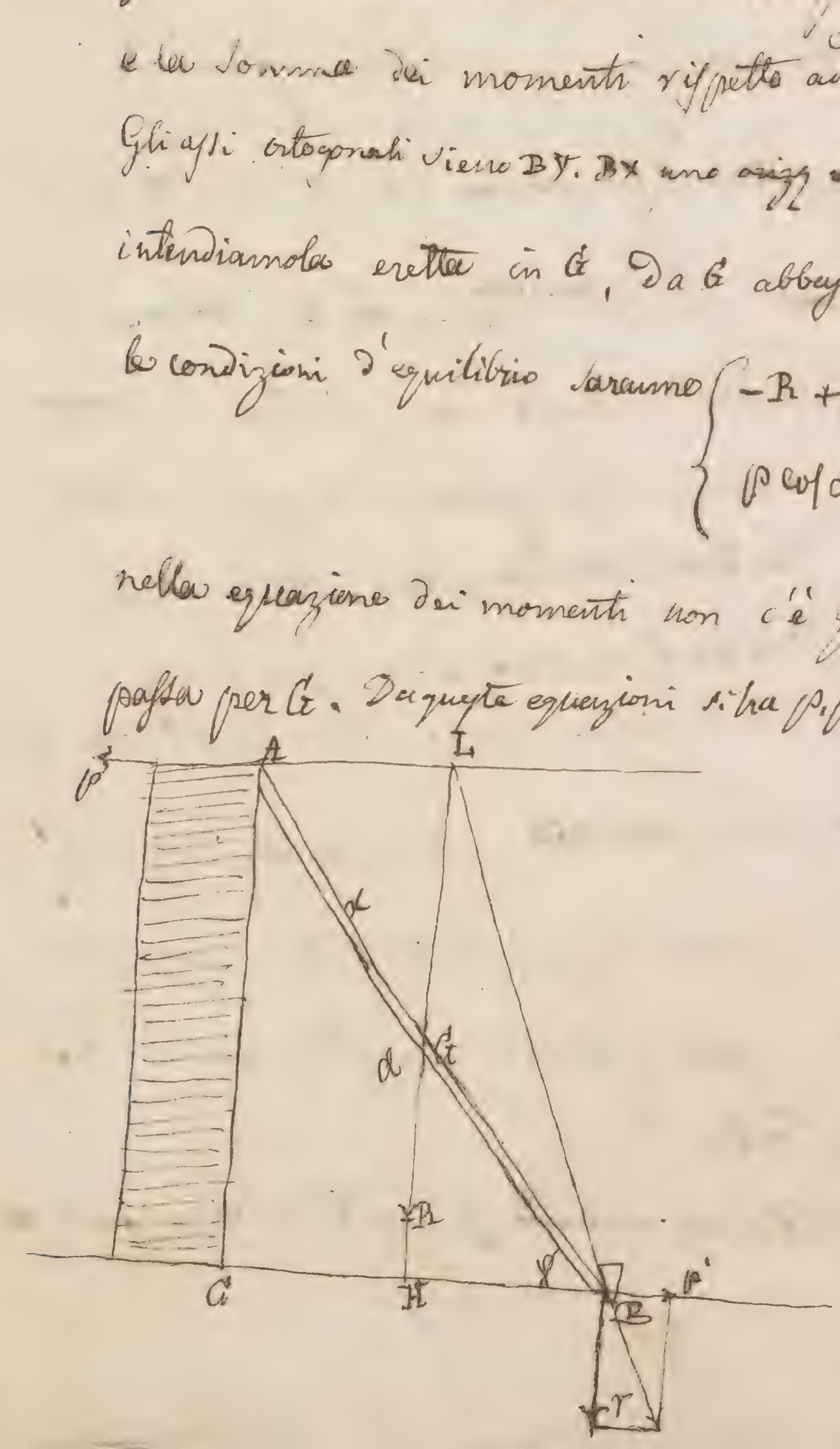
In A si eserciti una ~~forza~~ pressione P normale al piano AC, in B si eserciti una pressione normale P', ed una pressione q nella direzione del piano BC, poichè GB si può scomporre in due forze così dirette, trasportando il suo punto d'applicazione in B, bisogna dunque sostituire ai punti A e B tre forze opposte alle pressioni P. P'. q. vi sarà equilibrio se queste tre forze, ed il peso R si fanno equilibrio.

Nel nostro caso queste quattro forze essendo tutte in un piano ci vogliono tre condizioni d'equilibrio, che le somme delle Componenti di queste forze parallele a due assi ortogonali e la somma dei momenti rispetto ad una normale al loro piano sieno zero.

Gli assi ortogonali sieno BY. BX uno verticale, l'altro orizzontale, la normale all'piano intendiamola eretta in G, Da G abbassiamo le perpendicolari i. K su di OB. BC, le condizioni d'equilibrio saranno

$$\begin{cases} -R + p\operatorname{sen}\alpha + p'\operatorname{sen}\beta - q\cos\beta = 0 \\ p\cos\alpha - p'\cos\beta - q\operatorname{sen}\beta = 0 \\ ip' - Kq = 0 \end{cases}$$

nella equazione dei momenti non c'è quello della forza P, poichè nel nostro caso essa passa per G. Da queste equazioni si ha P. P'. q.



Una scala AB è appoggiata ad un muro AC, e sul suolo in B, se questo è perfettamente liscio, e non oppone, come nemmeno il muro, alcuna resistenza allo sdrucciolamento della scala è certo, che sdrucciolerà per il suo proprio peso, e se la supponiamo senza peso, ma vi applichiamo un peso P in un punto G, esso sdrucciolerà pa-

-rimenti. Impediamo però questo sdrucciolamento mettendo un ostacolo in B, ossia fissando il punto B, allora si eserciteranno tre pressioni una p nel punto A, ~~l'altra~~ due p', r nel punto B, che potremmo calcolare colle formole trovate antecedentemente. In questo caso è però inutile di ricorrere a principii generali, poichè se il peso R lo intendo applicato in L, posto risolverlo in due forze una p diretta secondo LA, l'altra diretta secondo LB, questa intendendola applicata in B possiamo risolverla in due una p' diretta secondo BC, l'altra r normale, ossia verticale; immaginiamo queste tre forze p. p'. r ~~diretta~~ in senso contrario, ~~ed~~ la forza R dovrà far loro equilibrio, dovrà dunque essere $R-r=0$, $p+p'=0$, $R.BH-p.AG=0$; quindi si ricava $R=r$; $p=R\frac{BH}{AG}$, $p'=-R\frac{BH}{AG}$.

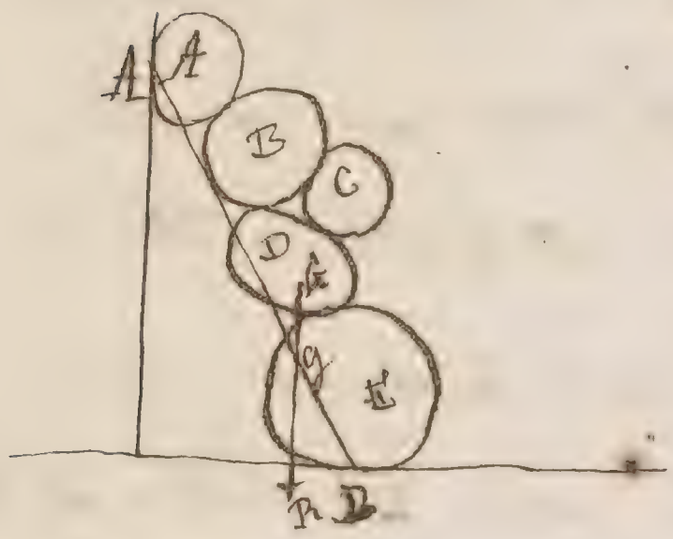
Sia ora data la lunghezza della scala $AB=a$, $AG=x$, e l'angolo della scala col suolo $ABC=\varphi$, avremo $BH=(a-x)\cos\varphi$, $AG=a\,\mathrm{sen}\,\varphi$, e quindi

$$p=R\,\frac{a-x}{a}\cot.\varphi.$$

È il valore della spinta orizzontale della scala, dalla formola trovata si vede, che questa spinta cresce col diminuire di φ, e che quando φ sarà zero, $p=\infty$, questo risultato ci insegna, che è impossibile collocare la scala in modo, che l'angolo di essa col suolo sia zero, ed infatti noi non abbiamo supposto un suolo resistente capace di sostenere un peso; se φ non è zero, ma sottanto piccolissimo; allora la spinta orizzontale è grandissima, fisicamente dunque è impossibile di mettere la scala piccolissimo inclinata, poichè essa si romperebbe per le pressioni del muro ~~dell~~ dell'ostacolo B da dispor, che devono essere grandissime per impedirla di sdrucciolare.

Se restando costante l'angolo φ facciamo variare x, p evidentemente cresce col diminuire di x, di modo che dovremo porre l'ostacolo in B tanto più forte, quanto più alto vorremo appendere alla scala il peso R

La stessa formola $p = R \cdot \frac{a-x}{a} \cdot \text{cot.} \varphi$ ci da la spinta orizzontale di più corpi A, B, D, etc appoggiati tra di loro ed in A e B a due piani uno verticale, l'altro orizzontale.



In questo caso R è il peso totale del sistema, a è la distanza fra i punti A, e B, φ è l'angolo di questa col piano orizzontale, x è la distanza A g dal punto d'incontro g della verticale, che passa pel centro di gravità del sistema, e di AB dal punto A.

Lezione 45.ª

Passiamo adesso a considerare sistemi flessibili. La flessibilità ~~dei~~ è una proprietà dei corpi relativa alle forze, che li sollecitano, p.e una spranga di ferro per es.o è inflessibile per un peso di pochi Chilogrammi, che le si applichi, diventa flessibile, anzi si incurva e si rompe se vi applichiamo un peso grandissimo: così un filo di seta è inflessibile per un peso di pochi centigrammi, diventa flessibile se vi applica per es.o un Chilogrammo.

Tutte le condizioni necessarie per l'equilibrio di un sistema rigido, sono ancor necessarie quando esso diventa flessibile.

Infatti la rigidezza è la facoltà dei corpi di ritenere la medesima figura, distruggendo l'azione delle forze, che tenderebbero a cangiarla, e la resistenza, ma incapace di produrre movimento, se dunque un sistema flessibile in equilibrio diventa rigido non si altera l'equilibrio, ma non saranno più necessarie tutte le condizioni, che prima erano necessarie. Le condizioni dunque necessarie per l'equilibrio di un sistema rigido non sono bastanti per l'equilibrio di un sistema flessibile. Nel nostro luogo sarà ora di determinare le condizioni da aggiungersi per l'equilibrio di un sistema flessibile dipendenti dalla flessibilità di esso.

Ci limiteremo a considerare due specie di sistemi flessibili; i fili, e le verghe elastiche

Ricaveremo da queste considerazioni delle norme per regolarsi negli altri casi

di sistemi flessibili, che potranno presentarsi..

Cominciamo dai fili perfettamente flessibili. Se ai punti A e B di filo rigido

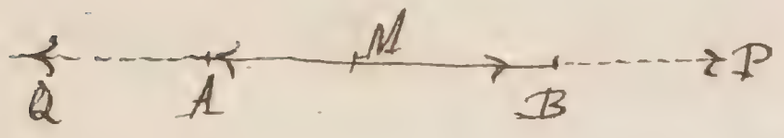
nei suoi estremi A e B sono applicate più forze P, Q, R, P,, Q,, R,, che si faranno equilibrio se le due risultanti saranno dirette secondo AB, eguali e volte in senso contrario. Si tratta adempiere a quest'ultima condizione in due maniere, o tirando le due risultanti all'indentro, o tirando le due risultanti all'infuori. Se il filo è flessibile, bisogna, che le forze tendano il filo, e non lo premano, ossia che le risultanti siano rivolte all'infuori, eguali e dirette secondo AB.

Supponiamo adesso, che abbiamo tre fili rigidi

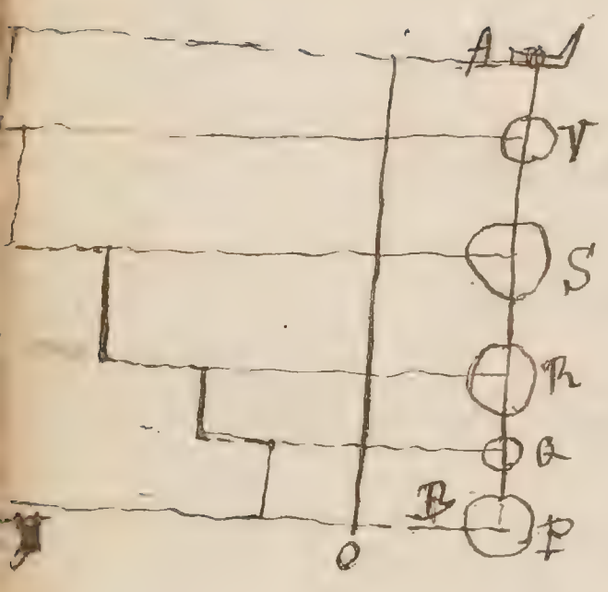
AB, AC, AD connessi come si vede nella figura, e che alle estremità B, C, D di questi fili siano applicate delle forze evidentemente per l'equilibrio bisognerà che le tre risultanti dei tre sistemi di forze siano dirette secondo AB, AC, AD, e di più tali che trasportate in A una qualunque di esse sia eguale e direttamente opposta alla risultante delle altre due; se i fili sono flessibili bisogna inoltre, che le risultanti P, Q, R siano dirette secondo i prolungamenti dei fili, se inoltre i fili possono lacerarsi, allora non bastano ancora queste condizioni, ma è necessario, che ciascun filo possa sostenere l'azione della forza, che gli è applicata, la quale si risolve in una tensione. In questo caso le tensioni dei fili

sono evidenti, se il filo è pesante, e di densità variabile, ossia eterogeneo, oppure pesante e di forma ~~~~ cilindrica, o di forma qualunque non è più così facile il determinare la tensione sopportata dal filo in ogni momento, quando adesso viene applicata ~~un peso~~ forza, o un peso qualunque. Importa però lo studio dell'equilibrio dei sistemi flessibili, che diamo dei metodi per misurar la tensione di un filo in ogni momento, però sarà questo il soggetto della presente Lezione.

Nel 1° caso, che abbiam considerato del filo AB teso dalle due forze eguali P, Q, se tagliamo il filo in un punto M, distruggiamo l'equilibrio, per rimetterlo bisognerà, che applichiamo in M due forze eguali e direttamente opposte alle forze P, Q; che equivarranno alla tenacità del filo, la quale prima, che fosse distrutta per il taglio teneva le due porzioni AM, MB aderenti, le forze applicate in M ci danno dunque la misura della forza che pativa il filo nel punto M, ossia della tensione del filo.



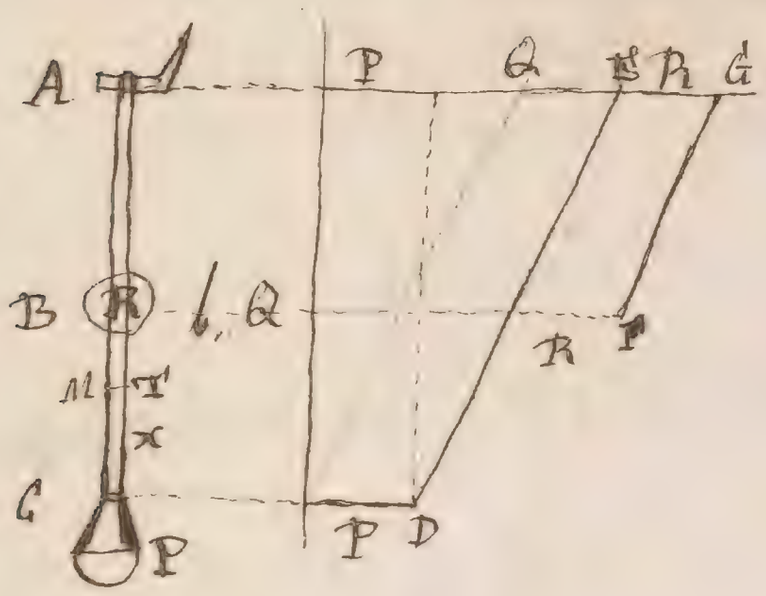
In questo caso la tensione è la medesima in tutti i punti del filo, e dappertutto equivale ad una delle forze tendenti. Vi hanno dei casi in cui la tensione non è costante.



Se per es° al filo AB applichiamo in diversi dei suoi punti dei pesi P, Q, R, S, V la tensione del 1° tratto a partire dal basso sarà $T' = P$, quella del 2° sarà $T'' = P+Q$, quella del 3° $T''' = P+Q+R$, quella del 4° $T^{IV} = P+Q+R+S$, e finalmente quella dell'ultimo $T^{V} = P+Q+R+S+V$.

Se si volesse costruire una curva, le cui ordinate rappresentassero le tensioni del filo, e le cui ascisse fossero i tratti di filo corrispondenti, si avrebbe in questo caso per tal curva un sistema di rette parallele come si vede nella figura. Tal genere di curve si chiamano scale delle tensioni.

Prendo adesso un filo cilindrico omogeneo pesante sospeso ad un chiodo in A,



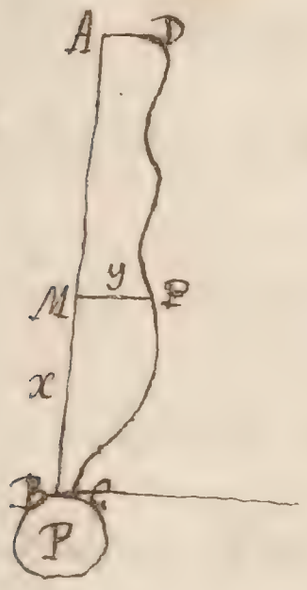
il peso di ciascun tratto di filo sarà proporzionale alla lunghezza del tratto, se però chiamo l la lunghezza totale del filo AG, Q il suo peso, il peso di una porzione MG di filo lunga x sarà $= x\frac{Q}{l}$, e la tensione del filo in M sarà $T = P + x\frac{Q}{l}$; la scala delle tensioni è in questo caso una retta DE costruita come si vede nella figura.

Se in un punto B tale, che $BG = b$ applico un peso R, la scala delle tensioni varierà, per il tratto BG essa sarà la retta $T = P + x\frac{Q}{l}$, per il tratto AB sarà la retta FG parallela a DE, e rappresentata dall'equazione $T = P + R + x\frac{Q}{l}$.

In quest'ultimo caso al punto B corrispondono due ordinate nella scala delle tensioni, ossia due tensioni, ma esse appartengono evidentemente a due punti infinitamente vicini appartenenti l'uno al tratto inferiore, l'altro al tratto superiore del filo.

In quest'esempio si suppose che il filo fosse omogeneo; quando fosse eterogeneo sarebbe necessaria una modificazione nella formola $T = P + x\frac{Q}{l}$.

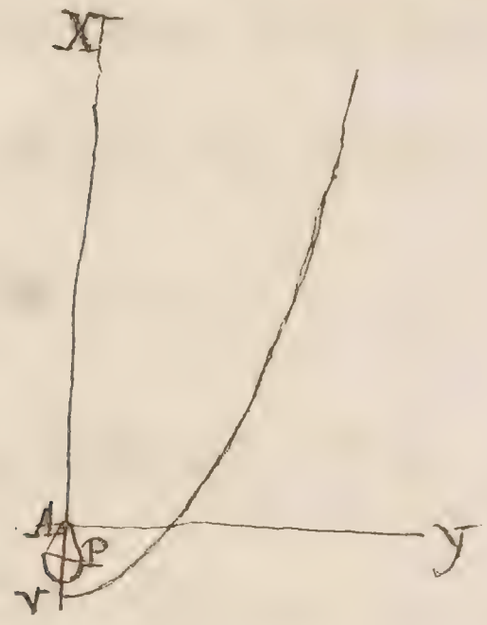
Supponiamolo dunque eterogeneo, e per generalizzare maggiormente la cosa supponiamolo non più cilindrico, ma generato dalla rotazione della curva CD attorno all'asse AB,



Metto l'origine in B, prendo un punto $M\begin{cases} MP = y \\ BM = x \end{cases}$, e la sua ascissa la rappresento con δ, il peso del filo da B fino in M, sarà espresso da $g\int_0^x \pi y^2 \delta \cdot dx$; se in B è applicato un peso P, la tensione in M del filo sarà $T = P + g\int_0^x y^2 \delta \cdot dx$. Essendo data la curva generatrice del filo, y è dato in funzione di x, così pure essendo data la legge secondo cui variano le densità δ è dato in funzione di x; eseguendo però la integrazione avrò $T = P + \varphi(x)$, questa sarà l'equazione della curva, che abbiamo chiamata scala delle tensioni; $\int y^2 \delta \cdot dx$ contenendo una costante arbitraria, alcuni scrivono il valore di T sotto quest'altra forma $T = g\int y^2 \delta \cdot dx$, inchiudendo P nella costante.

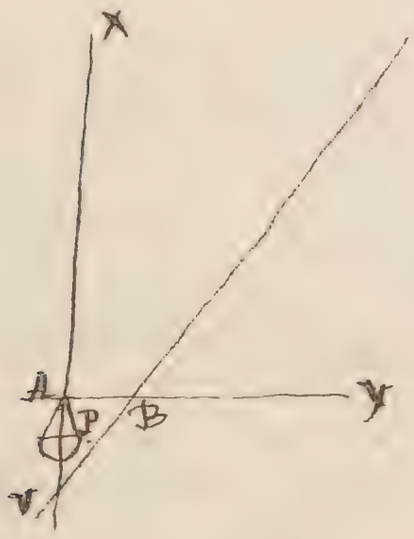
Applichiamo la formola generale alla ricerca della tensione di un filo, la cui sezione meridiana è una parabola col vertice al disotto di A, ed omogeneo; l'equazione della parabola sarà della forma $y^2 = px + q$, sia sempre applicato in A un peso P, sarà $T = P + \pi\delta g \int_0^x y^2 dx = P + \pi\delta g \int_0^x (px+q)dx$

$T = P + \pi\delta g \left[\frac{px^2}{2} + qx\right]$; se la densità del filo sia δ, questa sarà l'equazione della curva detta scala delle tensioni del filo di forma paraboloidica, la qual curva è anche una parabola.



Ho detto preso la parabola col vertice al disotto di A, poichè il peso P non si può applicare al vertice V dove il solido non ha più sostanza.

Sia la curva meridiana una retta, ossia sia il filo di forma conica, sia $y = ax + b$ l'equazione della retta generatrice, sia δ la densità, che supponga costante in tutti i punti del filo, sia sempre in A applicato un peso P, sarà

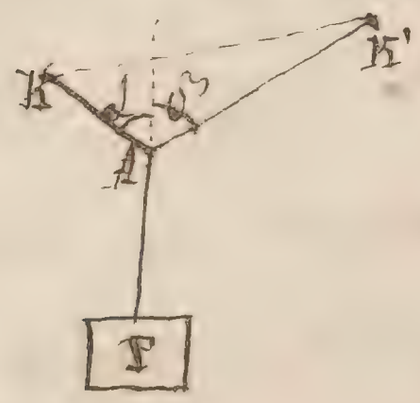


$T = P + \pi\delta g \int_0^x (ax+b)^2 dx = P + \frac{\pi\delta g}{a}\left[\frac{(ax+b)^3 - b^3}{3}\right]$

$T = P + \frac{\pi\delta g}{3a}\left[a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x\right]$, ovvero cangiando l'origine, in modo che la nuova ascissa x' sia $= ax + b$,

$T' = \frac{\pi\delta g}{3a}x'^3 + P - \frac{\pi b^3 \delta g}{3a}$, equazione della parabola cubica.

Se del cayo dei tre fili ai cui sono applicate le tre forze P, Q, R, le sono dati gli angoli α, β che AD fa con gli altri due fili, e la forza P, le forze Q, R vengono perciò determinate, e sono $\begin{cases} Q = P\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \\ R = P\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \end{cases}$, cioè la tensione del tratto AB è P, quella del tratto AC è Q, quella del tratto AD è R; dunque se a due chiodi K, K' attacchiamo gli estremi di un filo più lungo, che la distanza dei chiodi, ed in un punto A applichiamo un peso P a questo filo, avremo le tensioni T, T' sopportate dai chiodi, che saranno $T = P\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$, $T' = P\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$. α e β son dati dall'angolo KK'A.



Lezione 46ª

Riprendiamo l'esempio dei tre fili, che avevamo preso a considerare.

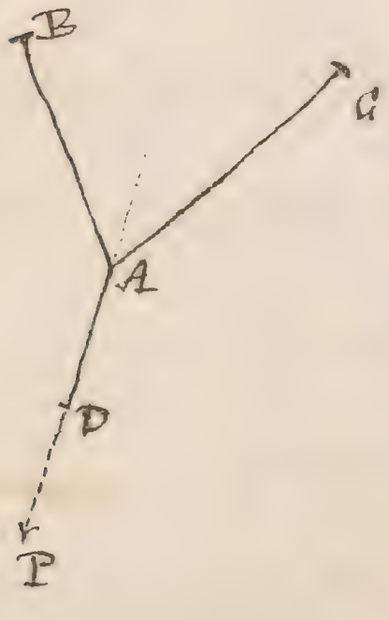
Abbiamo detto, che per l'equilibrio delle tre forze P, Q, R, deve essere

$$\begin{cases} Q = P\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \\ R = P\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \end{cases} ; \qquad (1)$$

queste formole sussistono comunque siano le lunghezze dei fili AB, AC, AD, sussistono dunque ancora quando AB, AC, AD sono nulle.

Da quest'osservazione risulta, che quando sono date le direzioni AD, AB, AC, e le intensità P, Q, R di tre forze da applicarsi nelle direzioni AD, AB, AC, nei punti D, B, C dati per le loro distanze d, b, c dal punto di concorso A, e si vogliono applicare in modo, che si facciano equilibrio, basta per vedere se il problema sia possibile verificare prima le equazioni (1), oppure applicare le forze tutte tre in A nelle direzioni AD, AB, AC, e verificare colla riga e col compasso se si fanno equilibrio. Se si trova, che l'equilibrio sussiste, la costruzione del problema è evidente.

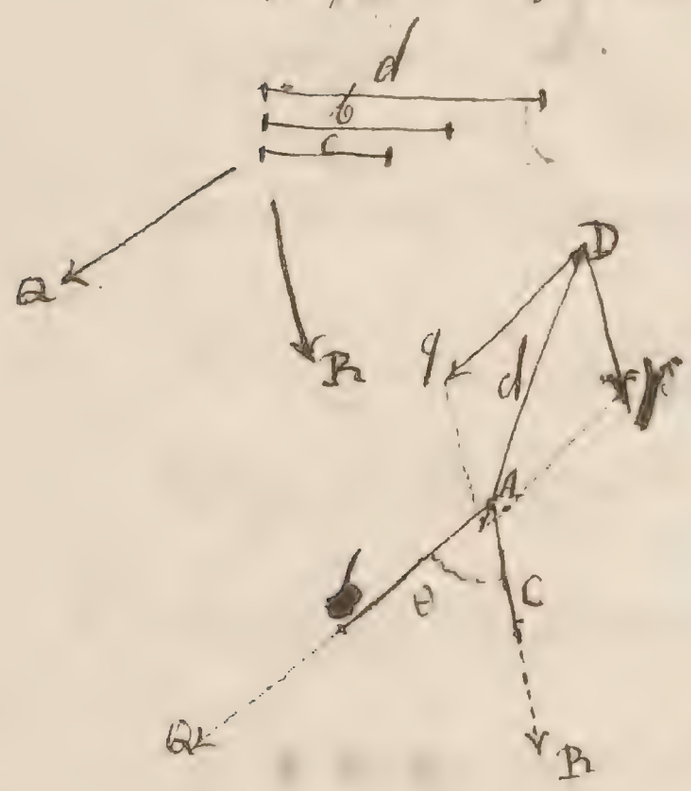
Poniamo proporci un 2° problema. Altre tratti AD, AB, AC, non sono liberi, ma due sono fermati a due punti fissi B, C, son date le lunghezze dei fili d, b, c,



è data la direzione e l'intensità di una forza P, si vuol applicare questa in modo, che vi sia equilibrio.

Essendo date b, c la posizione del punto A è determinata, e il problema è possibile qualunque sia la direzione AD presa nell'angolo BAC, perchè la questa condizione non sono soddisfatta, la componente di P invece di tendere il filo lo comprimerebbe, e non vi sarebbe più equilibrio per la flessibilità, che supponiamo nei fili. La discussione del problema è evidente.

Finalmente se un solo tratto è fisso, dagli altri due sono applicate forze date in grandezza e direzione, l'equilibrio esiste qualunque siano le direzioni e le grandezze delle forze date. Se P, Q rappresentino in grandezza ed in direzione le due forze date, e d, b, c le lunghezze dei fili AD, AB, AC la costruzione è facilissima.

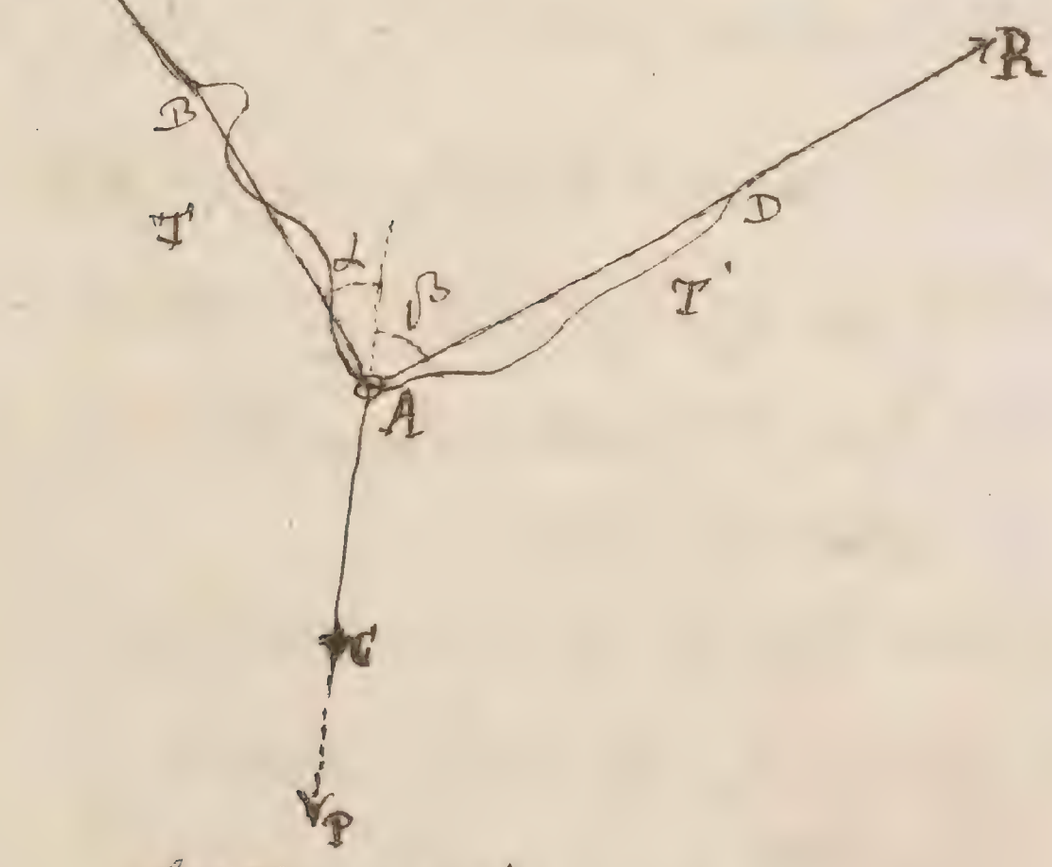


Nel punto fisso D si costruisca il parallelogrammo delle forze P, Q, sulla direzione della risultante. Da D verso A si porti DA = d, per A si tirino AQ, AP parallele alle direzioni delle forze date, si portino da A verso Q ed P le lunghezze b, c, si applichino agli estremi di queste lunghezze le forze Q, P, e la costruzione è compiuta.

Se θ sia l'angolo delle direzioni delle forze date, la tensione del tratto AD sarà $= \sqrt{Q^2 + P^2 + 2QP\cos\theta}$.

Nei problemi antecedenti li abbiamo supposti ammodati in A, vediamo adesso come vadano modificate le nostre conseguenze se il nodo A è libero.

Sia in primo luogo il nodo A capace di scorrere in qualunque modo lungo il filo BAD,



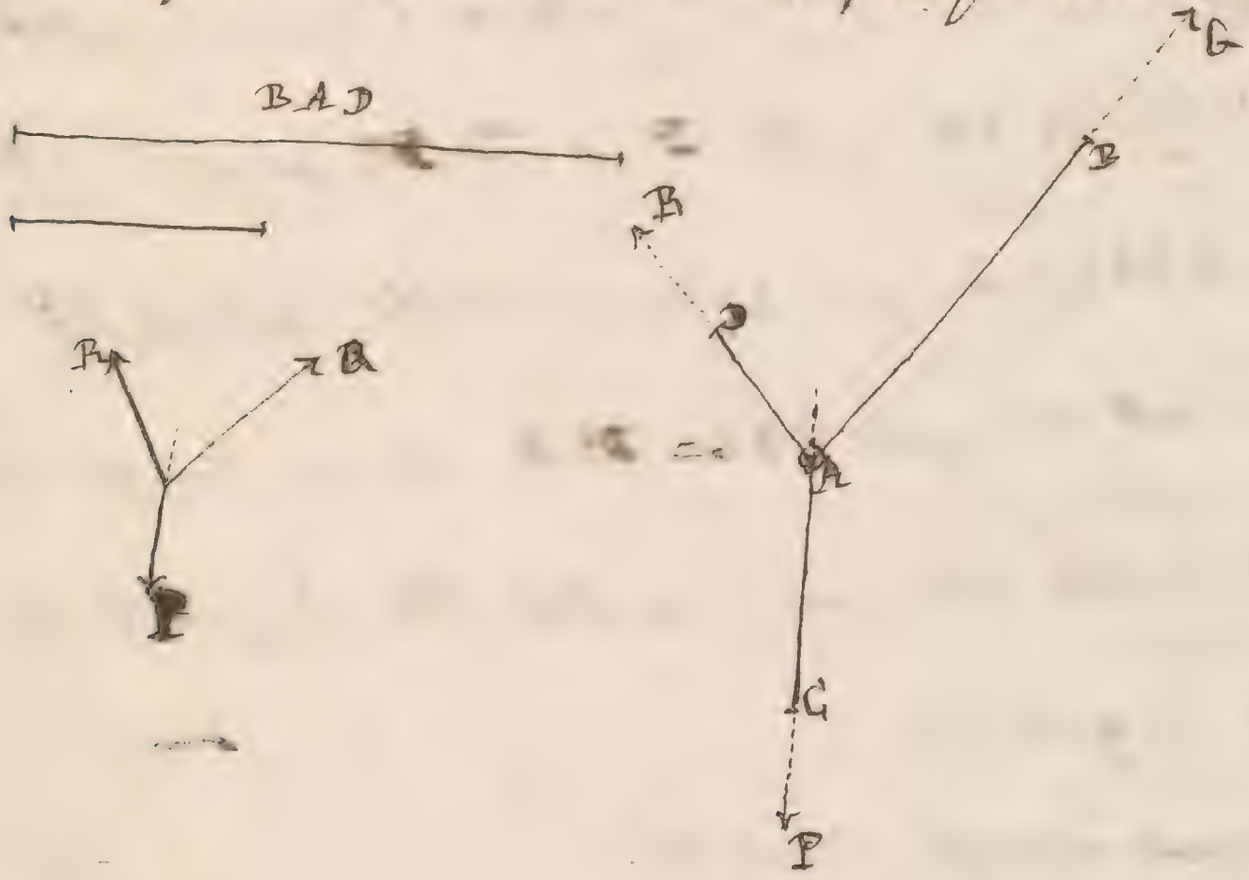
se a questo filo applichiamo negli estremi due forze Q, P, esse tenderanno il filo, e di faranno equilibrio se il nodo o l'anello A sarà in tal posizione, che sia α = β, ossia se la direzione della terza forza P divida per metà l'angolo degli altri due tratti del filo BAD.

Infatti perchè l'anello non scorra è evidente, che deve essere T = T', ossia che le due tensioni del filo BAD devono essere uguali, ora $\begin{cases} T = P\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \\ T' = P\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \end{cases}$, dunque $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$, ed $\alpha = \beta$.

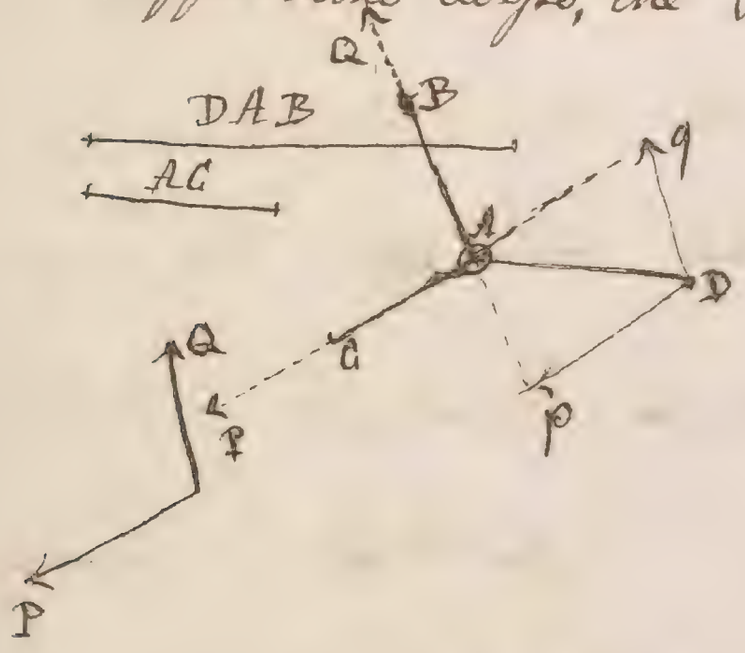
Si vede anche dover essere $\alpha = \beta$ in quest'altro modo. L'anello A potendo scorrere lungo il filo BAD si può considerare ritenuto sopra una ellisse resistente, la quale ha i fochi in B, D, ed il cui grand'asse è = BAD, per l'equilibrio bisogna dunque, che la forza P applicata al punto A sia normale a questa ellisse, ossia che AC divida per metà l'angolo BAD.

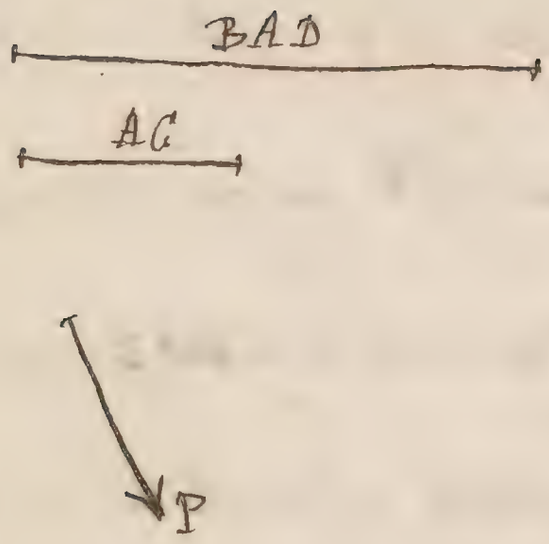
Essendo $\alpha = \beta$, $T = T' = P \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)} = \frac{P}{2\cos\alpha}$.

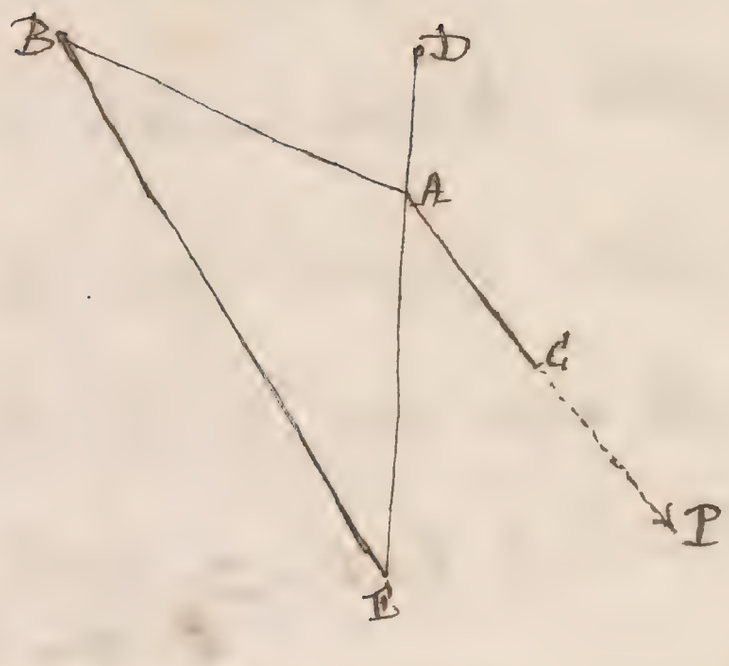
Supponiamo data la lunghezza del filo BAD, la lunghezza a del filo AC, le forze P, Q, R in grandezza e direzione, e che i punti D, B, C sieno liberi, l'equilibrio sarà possibile, se la direzione della forza P dividerà per mezzo l'angolo di Q con R, se Q = R, e se P è eguale alla risultante di Q, R;



le queste condizioni sono tutte soddisfatte, posso fare coi dati del problema una infinità di posizioni d'equilibrio, prendendomi ad arbitrio AD, AB, purchè sia AD + AB = BAD. Supponiamo adesso, che un punto, per es. D, sia fisso; sia data la lunghezza del filo BAD, quella del filo AC, e le forze P, Q in grandezza e direzione, l'equilibrio può è sempre possibile, e in infinite guise. Infatti per costruire la figura basta, che in D costruisca il parallelogramma delle forze P, Q, che sulla direzione della risultante prenda un punto qualunque A, che per questo punto tiri AB, AC parallelamente alle direzioni delle forze date, e che prenda sulla prima AB = DAB − AD, sulla 2ª AC = AC, avrò così i punti B, C, ai quali dovrò applicare le forze P, Q.



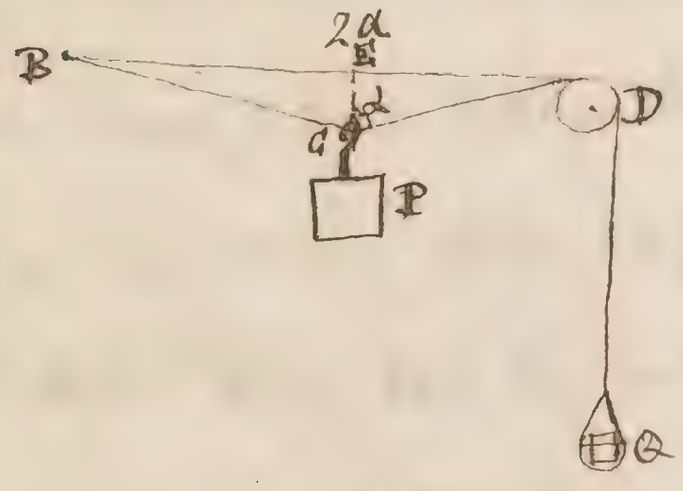




Finalmente se i due punti B, D sono fissi, ed è data in grandezza, e direzione la forza P, e sono date le lunghezze dei fili BAD, AG, il problema è sempre possibile.

Per costrur la figura, tiriamo dal punto B la retta BE parallela alla direzione di P, centro in D con raggio BAD descriviamo un'arco di circolo, che tagli BE in E, ~~facciam~~ tiriamo DE, facciamo in B un'angolo ABE = DEB, A sarà la posizione d'equilibrio dell'anello, dal punto A tiriamo AG parallela a BE, prendiamo AG = AG, al punto G applichiamo la forza P, l'anello A sarà in equilibrio.

Facciamo una applicazione di questi principii.



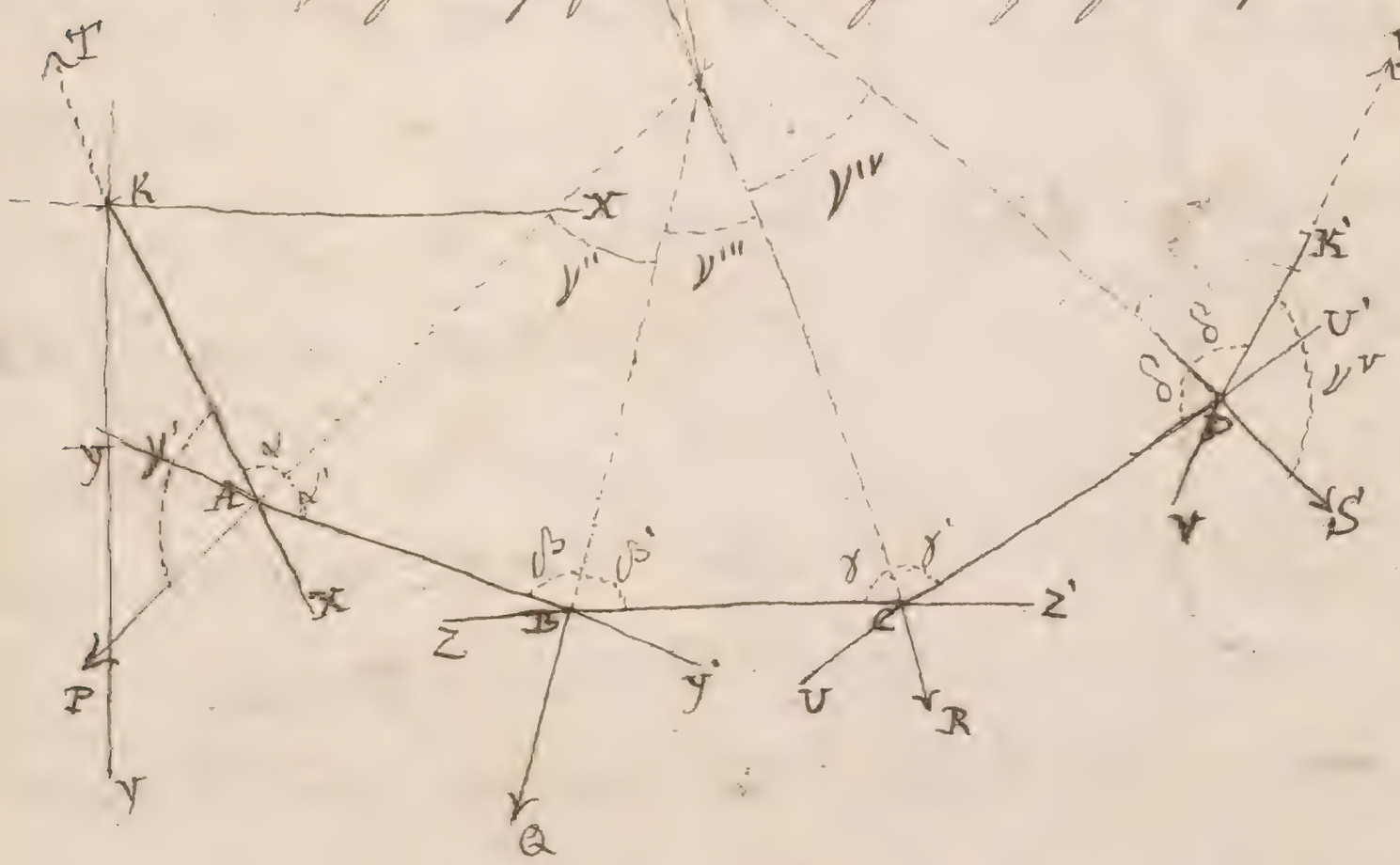
Sia un filo fisso per una estremità in B, e dopo passi sopra una girella D perfettamente mobile, all'altra estremità del filo sia in un piatto di bilancia posto un peso Q, ~~sulla~~ sull'altro in oggetto di BD pongo un peso P, esso farà piegare il filo secondo BGD, in modo, che CD farà colla verticale un certo angolo L, si domanda qual debba essere il valore di Q, perchè P, che supponiamo cognito, faccia sì, che ~~l'asse~~ CD si metta colla verticale ad angolo L dato, oppure perchè la retta CE abbia un valore dato.

La formola, che ci dà Q l'abbiamo già, ed è $Q = \frac{P}{2\cos L}$. Da questa formola si vede, che

quanto più α è grande, tanto più deve esser grande Q; inoltre ad $\alpha = 90°$ corrispondendo $Q = \infty$ ne deduciamo, che un filo, od una fune qualunque, a cui sia applicato un peso, non si può tendere esattamente in linea retta, poichè non si hanno forze infinite da mettere invece di Q nel piatto di bilancia. Abbiam supposta la fune senza peso, ma in realtà non essendo alcuna fune senza peso, questo peso stesso farà sempre le veci di P, quando essa si voglia distendere in linea retta per mezzo di un peso Q.

Lezione 47ª

L'analisi minuta, che abbiamo fatta del problema di ricercare le condizioni d'equilibrio di tre tratti di fune flessibili connessi insieme con un'anello, o un nodo A, ci agevolerà la soluzione di un problema più generale e più complicato; Determinare le condizioni d'equilibrio di un poligono formato da più tratti di fune, comunque grande sia il numero dei tratti, e per conseguenza il numero dei lati del poligono, quando ai vertici del poligono sono applicate delle forze comunque dirette. Un poligono così formato dicesi un poligono funicolare.



Sieno KA, AB, BC, CD, DK' i tratti di fune, o lati del poligono funicolare, P, Q, R, S, T, T' le forze applicate ne' vertici di questo poligono, per l'equilibrio di ciascun lato, e quindi

Di tutto il poligono è necessario, che ciascun tratto sia teso egualmente alle sue due estremità. Questa condizione non può essere adempiuta, senzache le forze T' applicate agli estremi K, K' del poligono sieno dirette secondo i prolungamenti dei lati estremi KA, KD, e che, scomposte le forze applicate ai vertici intermedii in due dirette secondo i prolungamenti dei lati adjacenti, sia $X=T$, $Y=Y'$, $Z=Z'$, $U=U'$, $V=T'$.

Facciamo per ora astrazione dalla estensibilità dei fili.

Gli estremi K, K' del poligono o sono fissi, o sono fissi; se sono fissi, le equazioni $X=T$, $V=T'$ non sono più condizioni d'equilibrio, ma ci danno le tensioni esercitate dai punti fissi.

Se le direzioni delle forze P, Q, R, S sieno date per gli angoli (α,α'), (β,β'), (γ,γ'), (δ,δ') che esse fanno coi lati del poligono, ottenemo per questi dati di rimpiazzare X, Y, Y', Z, Z', U, V. allora le equazioni antecedenti diventano;

$$\left.\begin{aligned} T=X&=\frac{P.\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}\\ T'=V&=\frac{S.\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\delta+\delta')}\end{aligned}\right\}\quad(A)$$

$$\left.\begin{aligned} Y=\frac{P.\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}&=\frac{Q.\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}(\beta+\beta')}\\ \frac{Q.\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\beta')}&=\frac{R\operatorname{sen}\gamma'}{\operatorname{sen}(\gamma+\gamma')}\\ \frac{R.\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\gamma+\gamma')}&=\frac{S.\operatorname{sen}\delta'}{\operatorname{sen}(\delta+\delta')}\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

Se il numero dei lati sia m, le equazioni (A) saranno sempre in numero di due, le equazioni (B) saranno in numero di $m-2$. Le equazioni (A) ci assicurano l'equilibrio dei lati estremi AK, DK', le equazioni (B) ci assicurano l'equilibrio dei lati intermedii. Le equazioni (A) e (B) ci danno anche nello stesso tempo le tensioni dei lati KA, KB, e dei lati intermedii; queste tensioni non sono altro, che i valori di X, Y, Z, U, V. Da questa osservazione risulta un primo teorema;

La tensione in un poligono funicolare equilibrato la tensione di un lato è eguale alla risultante di tutte le forze applicate da uno dei termini del poligono fino al principio del lato, che si considera. A questo teorema non abbisogna di dimostrazione, come neppure il seguente;

Se intendiamo trasportate tutte le forze applicate ai vertici di un poligono funicolare equilibrato, comprese le forze T, T' applicate agli estremi del poligono, parallelamente a se stesse in ~~uno solo punto~~ modo che le loro direzioni passino tutte per uno stesso punto, esse si fanno equilibrio.

Questa verità, riferendo le forze T, P, Q, R, S, T' a due assi ortogonali KX, KY, e chiamando $(\lambda, \mu), (\lambda', \mu'), (\lambda'', \mu''), \ldots (\lambda^{(m)}, \mu^{(m)})$ gli angoli, che le loro direzioni fanno con questi assi, questa verità, cioè, è espressa dalle equazioni,

$$\begin{cases} T\cos\lambda + P\cos\lambda' + Q\cos\lambda'' + \ldots + T'\cos\lambda^{(m)} = 0 \\ T\cos\mu + P\cos\mu' + Q\cos\mu'' + \ldots + T'\cos\mu^{(m)} = 0 \end{cases} \quad (\alpha)$$

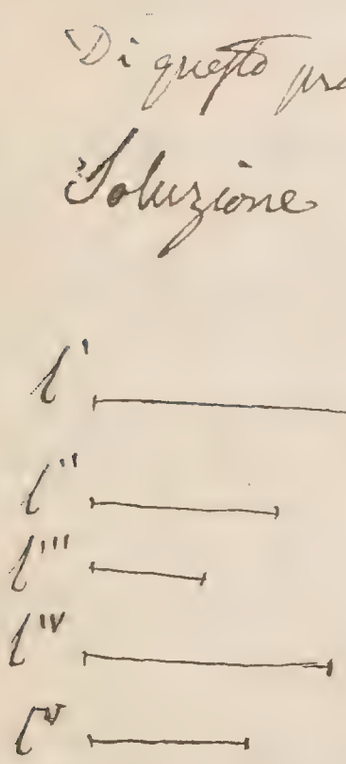
le quali sono implicitamente comprese nelle equazioni (A), (B).

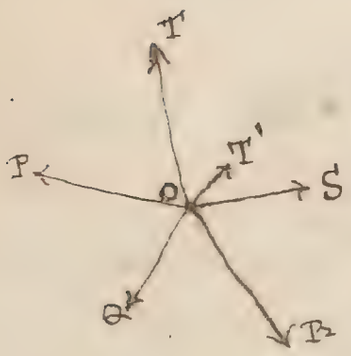
Ora che abbiam posti i principii generali, veniamo alle applicazioni.

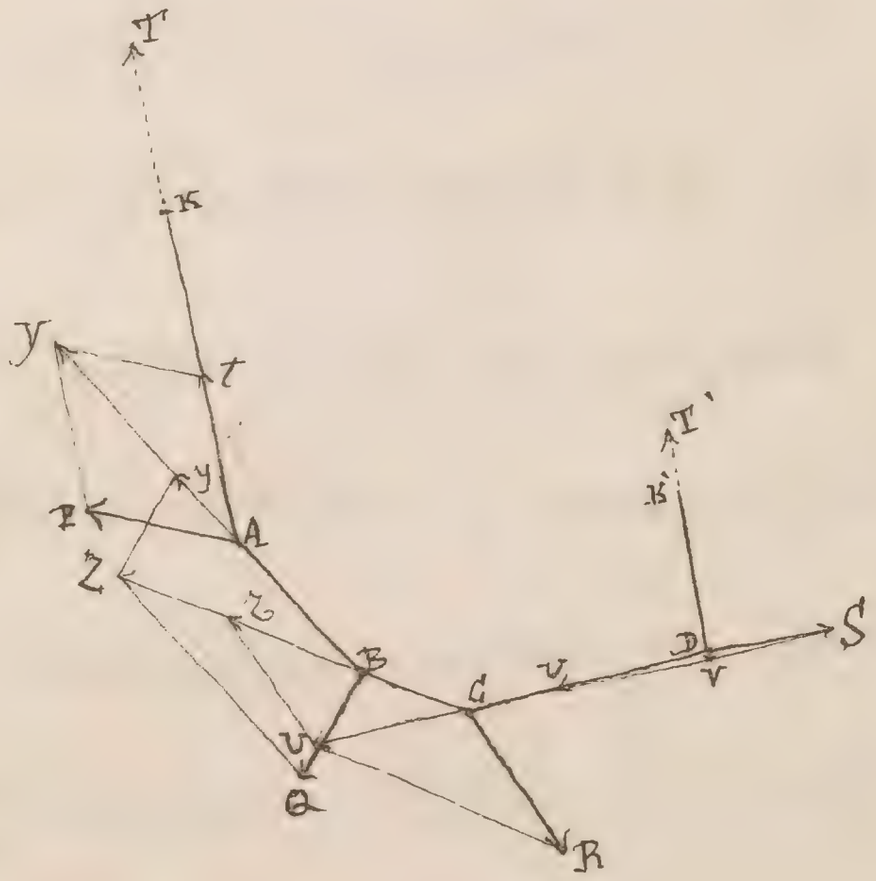
In primo luogo supponiamo i termini liberi, supponiamo inoltre che sieno date le lunghezze dei lati $l', l'', l''', l^{IV}, l^{V}$, e che sieno date in grandezza e direzione le forze T, P, Q, R, S, T' da applicarsi ai vertici del poligono, e si domandi la costruzione del poligono in modo che esso sia in equilibrio.

Di questo problema vi son due soluzioni, una grafica, l'altra analitica.

Soluzione grafica.







Bisogna prima di tutto verificare se le forze si fanno equilibrio intorno ad uno stesso punto O. Supponiamo adempiuta questa condizione.
Un estremo K del poligono posto prendere ovunque, sia dato sulla fig.a in K, per K tirando una parallela alla direzione della forza T, su questa portando KA = l' avremo il 1° lato KA del poligono. Da A si tiri AP parallela eguale alla ~~direzione~~ forza T, si porti da A verso K, At= si costruisca il parallelogramma APyt con AP, At, sarà Ay la rappresentante della tensione del 2° lato, perciò se la prolunghiamo e prendiamo AB = l'' avremo il 2° lato del poligono.
Da B si tiri BQ parallela eguale alla forza data Q, da B verso A si porti By = y, si componga Q con y, la risultante Z rappresenterà in intensità e direzione la tensione del 3° lato, poichè, Y essendo risultante delle forze P,T, Z è la risultante delle forze T,P,Q, se dunque prolunghiamo BZ, e prendiamo BC = l''', BC sarà il terzo lato del poligono.
Procedendo nello stesso modo nella ricerca degli altri lati, si finirà di costruire il poligono.
Da questa costruzione si apprende che il problema è sempre possibile, perchè sia adempiuta la condizione, che le forze T,P,Q,R,S,T' si facciano equilibrio intorno ad uno stesso punto.
Soluzione analitica.
Supponiamo ancora qui adempiuta la condizione, che le forze si facciano equilibrio intorno al punto O; sieno le direzioni delle forze determinate per gli angoli V', V'', V''', ---- $V^{(m)}$, che se siano due a due tra di loro, cioè sia V' l'angolo di T con P, V'' l'angolo di P con Q, V''' l'angolo di Q con R, ---- $V^{(m)}$ l'angolo di S con T', sieno l', l'', l''', ---- $l^{(m)}$ le lunghezze dei lati del poligono, sieno date le intensità T, P, Q, R, ---- T' delle forze; Essendo adempiuta la condizione, che abbiamo detta, le equazioni (a) saranno perciò soddisfatte, ma queste sono comprese nelle equazioni (A) e (B), dunque le equazioni (A) e (B), che sono in numero di m si riducono ad essere soltanto m-2 equazioni distinte, che postiamo supporre essere le equazioni (B).

α' e incognite del problema, e perciò delle equazioni (B) sono $\begin{cases} \alpha, \alpha' \\ \beta, \beta' \\ \gamma, \gamma' \\ \vdots \end{cases}$, le quali sono in numero di $2m-2$, non bastano dunque per determinarle le equazioni (B); ma le dì osservi, che prolungando nelle fig.e del poligono, le direzioni delle forze P, Q, R, ---

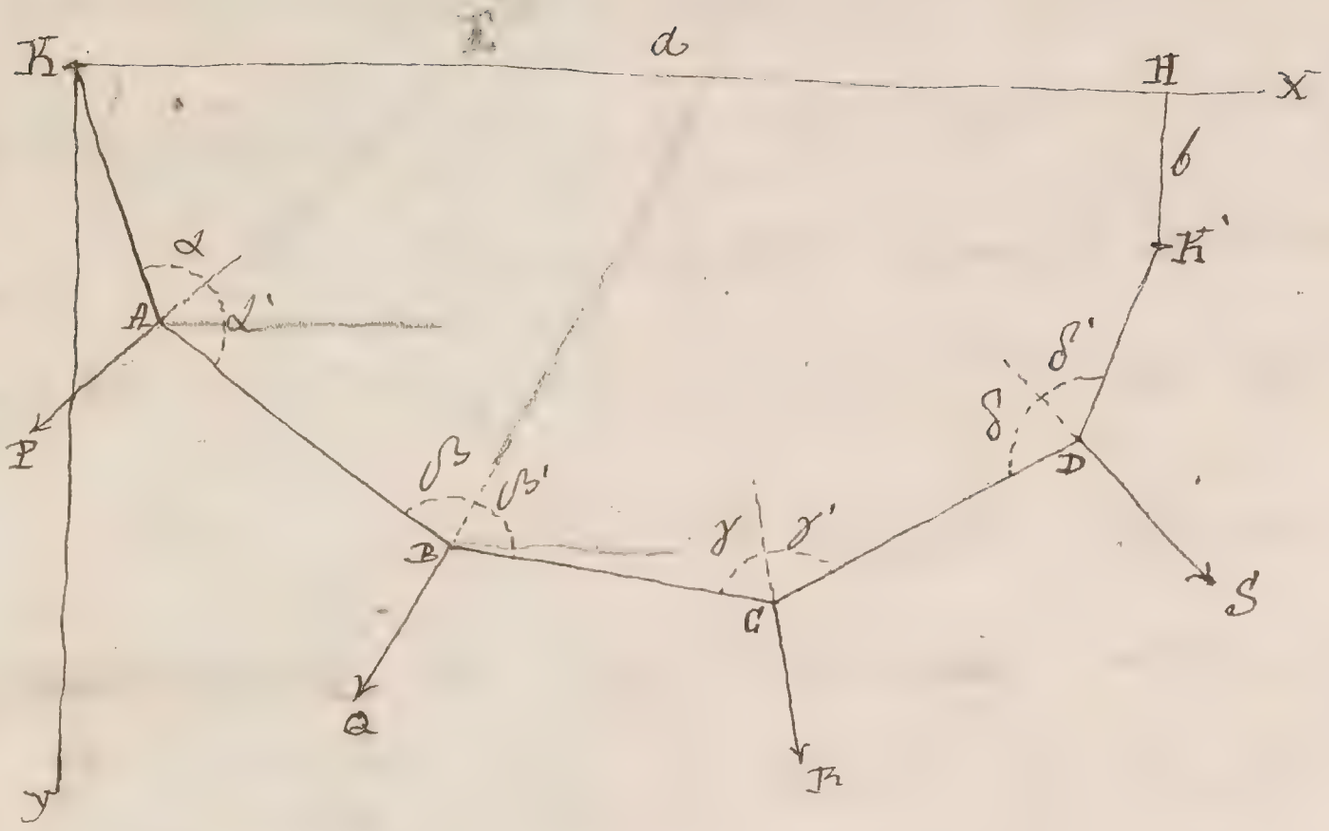
sino ad incontrarsi, abbiamo dei triangoli, le cui proprietà fondamentale ci somministra le equazioni; e che inoltre $\begin{cases} \gamma' + \alpha = 180^\circ \\ \gamma^{(m)} + \beta' = 180^\circ \end{cases}$, si vede,

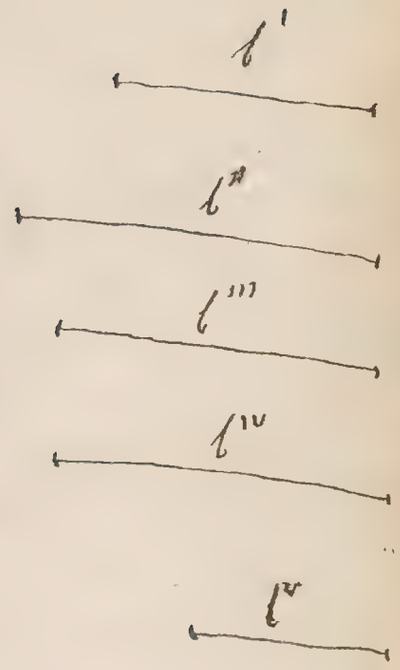
$$\left.\begin{aligned} \alpha' + \beta + \gamma'' &= 180^\circ \\ \beta' + \delta + \gamma''' &= 180^\circ \\ \gamma' + \delta + \gamma^{IV} &= 180^\circ \\ - \quad - \quad - \quad - \end{aligned}\right\} (C)$$

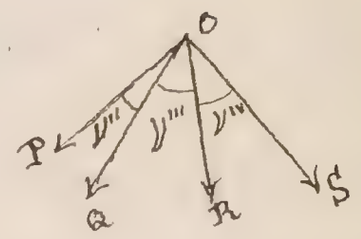
che abbiamo tante equazioni quante sono necessarie per la determinazione delle incognite; queste equazioni sono tutte distinte tra di loro, e sono $\begin{cases} (m-2) \text{ equazioni } (B) \\ (m-2) \text{ equazioni } (C), \text{ e le equazioni } (b) \begin{cases} \gamma' + \alpha = 180^\circ \\ \gamma^{(m)} + \beta' = 180^\circ \end{cases} \end{cases}$

Lezione 48.ª

Supponiamo adesso dati i termini K, K' fissi. Le forze T, T', e gli angoli $\gamma', \gamma^{(m)}$ saranno quattro nuove incognite, poiché in questo caso le forze T, T' non sono più rappresentando le tensioni sostenute dai punti fissi non si ha più in questi direzioni fisse di osservazione, nè quanto sia la loro intensità; sono quindi necessarie quattro equazioni di più, che nel caso in cui i termini K, K' sono liberi. Due le abbiamo nelle equazioni (A), le quali non sono più soddisfatte identicamente, e ci danno T, e T'; non sono queste equazioni identicamente soddisfatte, poiché le equazioni (a) non sono più identicamente soddisfatte, non essendo in questo caso necessaria la condizione che le forze T, T', P, Q, R, S, ... si facciano equilibrio intorno ad uno stesso punto, per essere T, T' indeterminate. Due altre equazioni le abbiamo, dacchè è data la posizione relativa dei punti K, K'.







L'angolo A del poligono P può essere tanto ottuso quanto acuto

Chiamando $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots, \theta', \theta'', \theta''' \ldots$ gli angoli, che i lati fanno coll'orizzonte e colla verticale, e denominando colle lettere a, b le coordinate KH, HK' del punto K' riferito alla orizzontale KX, ed alla verticale KY come sopra, e osservando, (Lez.ª 32ª), che a è la somma algebrica delle proiezioni dei lati del poligono sopra l'orizzontale KX, b la somma algebrica delle proiezioni degli stessi lati sopra la verticale KY siamo condotti alle seguenti due relazioni:

$$\left.\begin{aligned} l'\cos\varepsilon' + l''\cos\varepsilon'' + l'''\cos\varepsilon''' + \ldots + l^{(m)}\cos\varepsilon^{(m)} &= a \\ l'\cos\theta' + l''\cos\theta'' + l'''\cos\theta''' + \ldots + l^{(m)}\cos\theta^{(m)} &= b \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

$\varepsilon', \varepsilon'', \ldots, \theta', \theta'' \ldots$ si possono esprimere per mezzo degli angoli dati $\nu'', \nu''', \ldots$ e degli incogniti $\nu', \nu^{(m)}, \alpha, \beta, \ldots$

Dunque queste due relazioni aggiunte alle equazioni (A), (B), (C), dalle due $\begin{cases} \nu' + \alpha = 180° \\ \nu^{(m)} + \beta' = 180° \end{cases}$, ci danno i valori delle incognite $\nu', \nu^{(m)}, T, T', \alpha, \alpha', \beta, \beta', \ldots$

Concludiamo quindi, che l'equilibrio del poligono funicolare è sempre possibile, quando i suoi termini sono liberi, purchè tutte le forze applicate ai suoi vertici si facciano equilibrio intorno ad uno stesso punto, e che è sempre possibile indipendentemente da ogni condizione, quando i termini sono fissi.

Finora abbiam sempre supposto, che i nodi A, B, C, D delle funi fossero fissi, vediamo ora cosa accada, e come vadano modificate le conseguenze, che abbiamo or ora dedotte, quando alcuno dei nodi sia libero.

- e un nodo A è libero, ossia se la forza P è applicata ad un'anello A scorrevole lungo una fune KAB, allora, chiamando h la lunghezza della fune KAB, avremo $l'+l''=h$, ed uno dei lati l', l'' sarà incognito, avremo però una condizione di più $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$ (pag.a 236).

Se due nodi sono liberi A e B, allora conosceremo soltanto la lunghezza h' della fune KABC, ossia avremo $l'+l''+l'''=h'$, e saremo perciò incogniti due lati, avremo però due condizioni di più $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$.

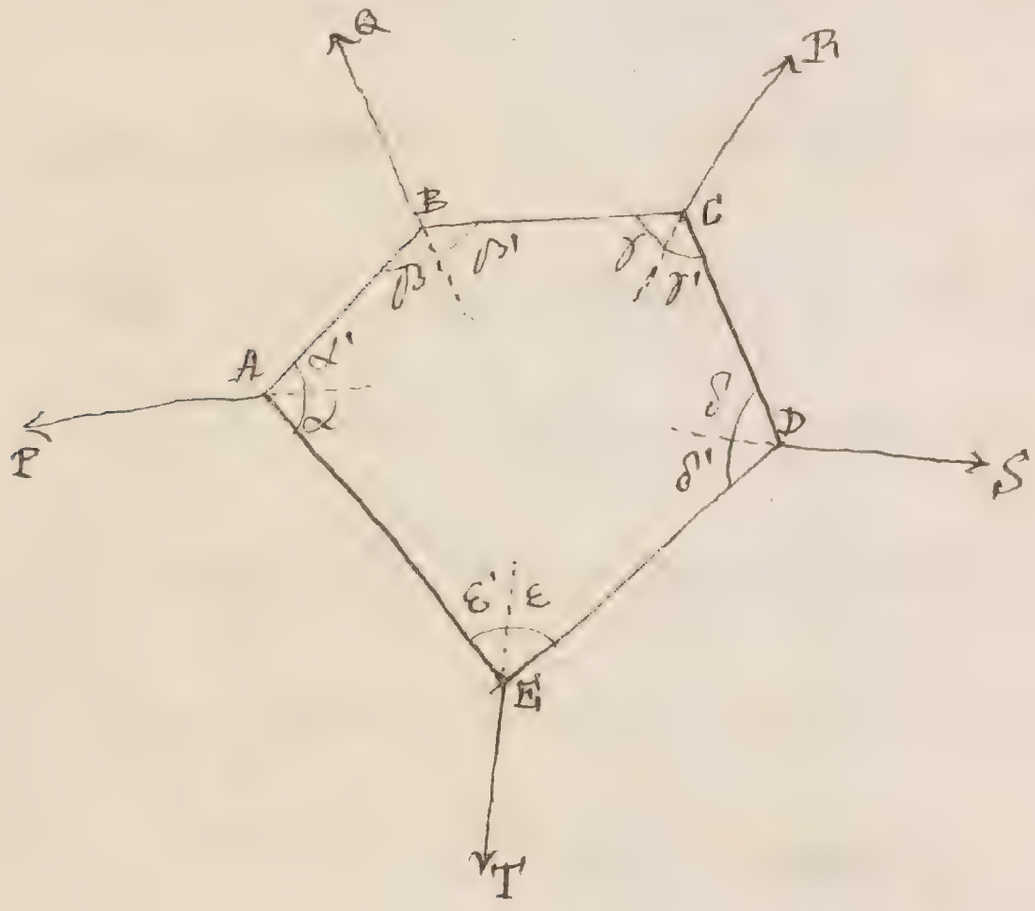
Sia nella 1.a nella prima ipotesi che nella 2.a le nuove condizioni, che abbiamo sempre relazioni tra i soli angoli non servono alla determinazione dei lati incogniti. Nel caso dei termini K, K' fissi il problema è determinato nelle due ipotesi, poichè abbiamo le due equazioni (D) in cui entrano i lati, ma non sarebbe più determinato se i nodi liberi fossero tre, o più di tre, anzi in tali ipotesi potrebbe darsi che l'equilibrio fosse impossibile, poichè abbiamo tra gli angoli incogniti più relazioni, che angoli incogniti.

Quando i termini sono liberi non abbiamo alcune equazioni per determinare i lati incogniti, allora qualunque sia il numero dei nodi scorrevoli il problema è sempre indeterminato, e può inoltre essere impossibile, anzi nel maggior numero dei casi esso è impossibile rispetto agli angoli $\delta, \delta', \beta, \beta'$ ---

Per distinguere i casi, in cui effettivamente vi ha impossibilità d'equilibrio dai casi in cui ~~il problema~~ esso è possibile, bisogna eliminare gli angoli $\delta, \delta', \beta, \beta'$ --- tra le equazioni (B), (C), (b), e le equazioni (E) $\begin{cases} \alpha=\alpha' \\ \beta=\beta' \\ \gamma=\gamma' \\ \vdots \end{cases}$ nel caso dei termini liberi; fare la stessa eliminazione tra le equazioni (B), (C), (b), (E), eliminando anche tra queste $\gamma', \gamma^{(m)}$, quando i termini sono fissi; eliminare quindi le equazioni restanti tra i dati del problema sono soddisfatte per identità.

abbiamo supposto in tutto ciò, che precede, che le forze, ~~di~~ e le funi fossero tutte in un piano, sarebbe un problema molto più complicato, ma niente più difficile quello di stabilire le condizioni d'equilibrio di un poligono funicolare sghembo. Bisognerebbe perciò procedere nella stessa maniera, come siamo arrivati alle condizioni d'equilibrio di poligono piano.

Del poligono funicolare piano v'ha un caso che sfugge ai due casi, che abbiamo considerati ~~dei~~ termini fissi e dei termini liberi, ed è quello dove i termini K, K' si riuniscono in un solo punto, ossia quando il poligono è chiuso.



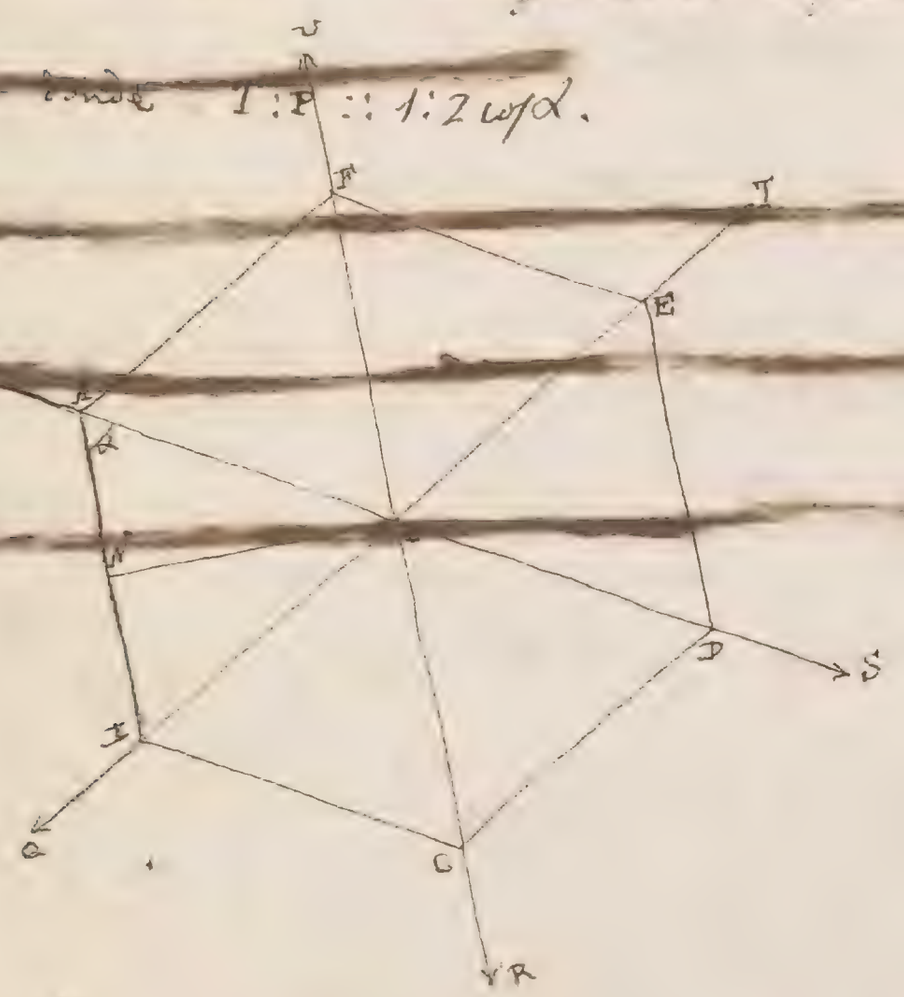
~~Sia~~, Deve essere soddisfatta a priori la condizione che le forze si facciano equilibrio applicate ad uno stesso punto, inoltre i lati dovendo essere egualmente tirati ai loro estremi, avremo, se m sia il numero dei lati del poligono, m condizioni della forma delle equazioni (B), le quali assicureranno l'equilibrio del poligono.

Se siano dati i lati $l, l', l'', \ldots l^{(m)}$, e le forze T, Q, R, ... in grandezza e direzione potremo prendere per incognite gli angoli $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \ldots$, che sono in numero di 2m, chiamando $\gamma, \gamma', \gamma'' \ldots \gamma^{(2m)}$ gli angoli, che fanno due a due tra di loro le direzioni delle forze date, avremo tra questi angoli e gli angoli incogniti m equazioni della forma delle equazioni (C), a queste equazioni se aggiungiamo le m condizioni d'equilibrio date, abbiamo 2m equazioni per determinare le 2m incognite, potremo perciò costruire la figura d'equilibrio del poligono, poichè così resterà determinato. Le prime m equazioni danno inoltre le tensioni di tutti i lati del poligono.

Se per un caso particolare le forze fossero eguali, e facessero angoli eguali due a due, allora sarebbe necessario e basterebbe, che gli angoli del poligono fossero eguali, e che fossero divisi in parti eguali dalle direzioni delle forze.

Infatti se ~~siffatte~~ queste condizioni fossero adempiute sarebbero soddisfatte le m equazioni (B), inoltre bisogna, che sia $\beta = \alpha'$, $\beta' = \gamma$ ----, perchè altrimenti le equazioni (B) non sarebbero soddisfatte, e che sia ~~$\beta' = \beta$~~ $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ --- $\alpha = \alpha'$, poichè essendo $\nu' = \nu'' = \nu''' = \text{---} = \nu^{(m)}$ le equazioni (C) ci danno $\alpha' + \beta = \beta' + \gamma = \gamma + \delta = \text{---} = \varepsilon' + \alpha$, donde poichè $\alpha' = \beta$, $\beta' = \gamma$ ---- $\varepsilon' = \alpha$, abbiamo $\beta = \beta' = \gamma = \gamma' = \text{---} = \alpha$. I lati però rimangono indeterminati, dunque in questo caso l'equilibrio è possibile in infinite guise.

Le equazioni (B) ci danno $\frac{P \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{P}{2\omega\alpha} = \frac{Q}{2\omega\beta} = \frac{R}{2\omega\gamma} = \text{---}$, ora $\frac{P}{2\omega\alpha}$, $\frac{Q}{2\omega\beta}$ --- sono le tensioni dei lati del poligono, dunque le tensioni dei lati sono eguali ed eguali a $\frac{P}{2\omega\alpha}$, essendo P l'intensità di ciascuna forza, 2α l'angolo, che essa fa col lato del poligono, a cui è applicata, e chiamando T la tensione di ciascun lato abbiamo $\frac{T}{P} = \frac{1}{2\omega\alpha}$, donde $T : P :: 1 : 2\omega\alpha$.

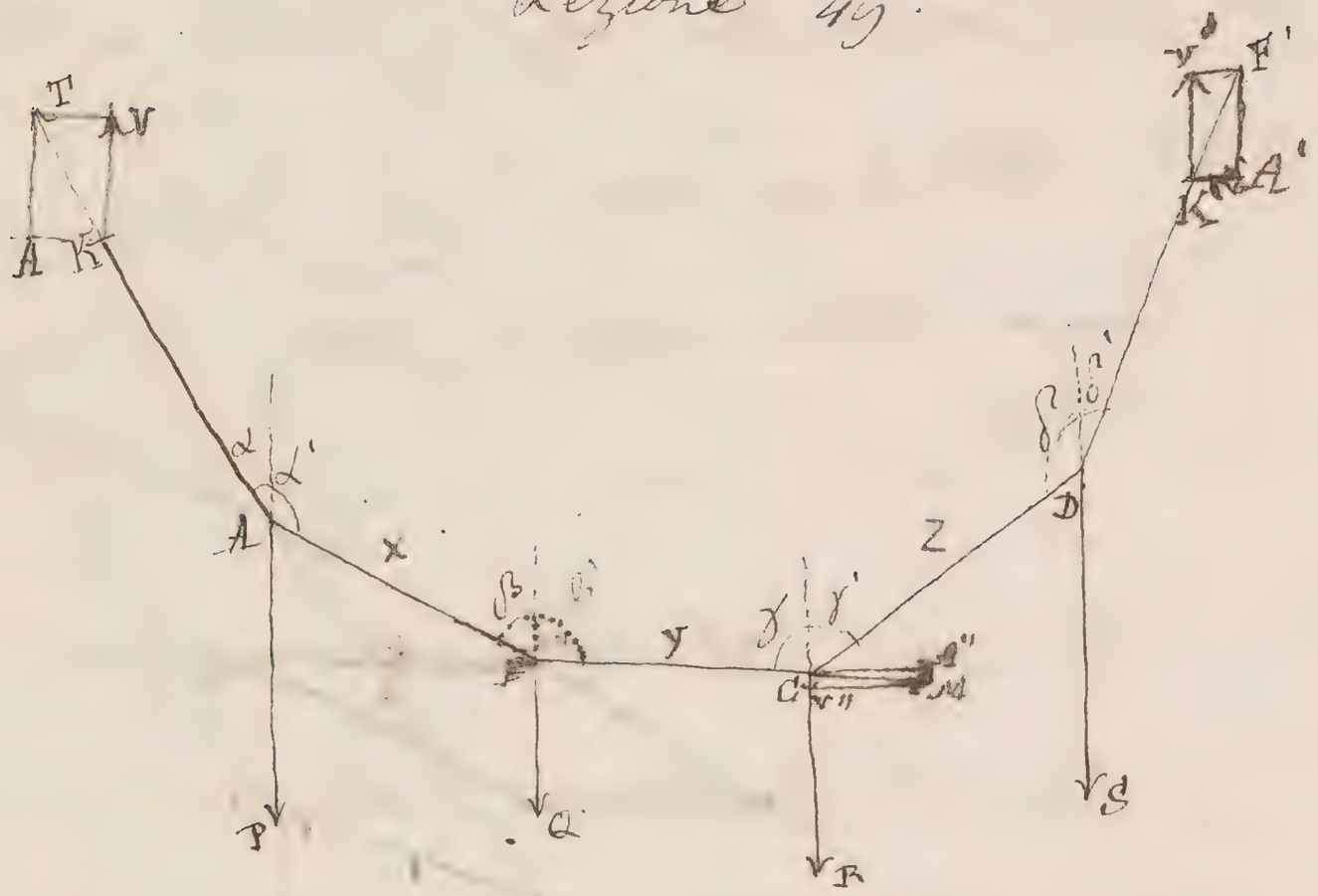


Se il poligono è regolare, allora OA è il raggio del circolo circoscritto, ~~tutti~~ in questo caso la proporzione $T : P :: 1 : 2\omega\alpha$ possiamo scriverla sotto quest'altra forma $T : P :: OA : 2OA\omega\alpha$, e poichè $AB = 2AN = 2 \cdot OA\omega\alpha$, essa diventa

$T : P :: OA : AB$, quindi il seguente teorema;

In un poligono funicolare, regolare, chiuso, ed equilibrato le tensioni sono tutte eguali e la tensione di un lato sta alla forza applicata ad una sua estremità come il raggio del circolo circoscritto sta al lato del poligono.

Lezione 49.ª



Nelle lezioni antecedenti abbiamo stabilite le condizioni di equilibrio di più forze applicate comunque ai vertici di un poligono funicolare, supponiamo adesso che le forze sieno tutte parallele tra di loro, come accade quando queste forze sono tutti pesi, le cui direzioni però sono verticali.

T, T' non possono essere parallele alle altre, poichè esse devono essere dirette secondo i prolungamenti dei lati estremi AK, DK'. [illegible]

Essendo AP, BQ, CR, DS parallele, ne risulta $\text{sen}\,\alpha' = \text{sen}\,\beta$ $\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\}$, ora le condizioni d'equilibrio del poligono sono, le equazioni (A), cioè equazioni $\text{sen}\,\beta' = \text{sen}\,\gamma$ $\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\}$

$\text{sen}\,\gamma' = \text{sen}\,\delta$ $\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\}$

$$(B)\begin{cases} \dfrac{P\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}(\alpha+\alpha')} = \dfrac{Q\,\text{sen}\,\beta'}{\text{sen}(\beta+\beta')} \\ \dfrac{Q\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}(\beta+\beta')} = \dfrac{P\,\text{sen}\,\gamma'}{\text{sen}(\gamma+\gamma')} \\ \dfrac{R\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}(\gamma+\gamma')} = \dfrac{S\,\text{sen}\,\delta'}{\text{sen}(\delta+\delta')} \\ \text{- - - - - - - - - - - - - -} \end{cases}$$

moltiplichiamo i primi membri di queste equazioni (B) per $\text{sen}\,\alpha', \text{sen}\,\beta', \text{sen}\,\gamma', \ldots$ ed i secondi membri per $\text{sen}\,\beta, \text{sen}\,\gamma, \text{sen}\,\delta, \ldots$, avremo

tante equazioni, che si vogliono scrivere, ho comprendere tutte in una equazione continua

$$\frac{P \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')} = \frac{Q \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}(\beta+\beta')} = \frac{R \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\gamma'}{\operatorname{sen}(\gamma+\gamma')} = \text{---}.$$ eguale

sviluppando i denominatori, e riducendo

$$\frac{P}{\cot.\alpha+\cot.\alpha'} = \frac{Q}{\cot.\beta+\cot.\beta'} = \frac{R}{\cot.\gamma+\cot.\gamma'} = \text{------}.$$

Questa equazione continua si può tradurre nel seguente teorema—

Su un poligono funicolare carico di pesi ed equilibrato, ciascun peso è proporzionale alla somma delle cotangenti degli angoli contigui:

Consideriamo ora il significato meccanico della stessa equazione;

$\frac{P \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}$, $\frac{P \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}$, $\frac{Q \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\beta')}$, ---- sono altro, che le tensioni dei lati KA, AB, BC, ---

del poligono, scomponendo ciascuna di queste tensioni in due forze una verticale, l'altra orizzontale, le componenti orizzontali saranno moltiplicando le tensioni per $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha'$, $\operatorname{sen}\beta'$, ----, ora questi prodotti li abbiamo già fatti, e li abbiamo già ridotti alla forma

$\frac{P F}{\cot\alpha+\cot\alpha'}$, $\frac{Q}{\cot\beta+\cot\beta'}$, ---, inoltre abbiamo trovato essere

tutti eguali; Dunque la componente orizzontale della tensione di ciascun lato di un poligono funicolare carico di pesi è la medesima per tutti i lati del poligono equilibrato, o più compiutamente

Su ciascun poligono funicolare carico di pesi equilibrato, la tensione orizzontale è costante per tutti i lati.

Possiamo dare a questo teorema un'espressione più generale dicendo, che

In un poligono funicolare equilibrato, tirato da forze parallele ne suoi vertici la tensione perpendicolarmente alla direzione delle forze è costante per tutti i lati. Inoltre la tensione di un lato qualunque essendo eguale e direttamente opposta alla risultante delle forze applicate da uno degli estremi del poligono fino all' estremità del lato che si considera, se M la scomponiamo in due forze una orizzontale A'', l'altra verticale V'', e se scompongo - no pure T in due una orizzontale A, l'altra verticale V; A. V. P, Q, A'', V'' dovendosi fare equilibrio, bisognerà, che sia $P+Q+V''=V$, $A=A''$, Dunque nel poligono funicolare carico di pesi la tensione orizzontale di un lato è costante, e la sua tensione verticale è eguale alla differenza tra la somma delle forze, o pesi applicati da uno degli estremi del poligono sino all'estremità del lato, e la tensione verticale dell'estremo, da cui si parte.

Tutte le forze applicate al poligono, comprese T e T' dovendosi fare equilibrio intorno ad uno stesso punto, bisognerà che sia $P+Q+R+\text{---}=V+V'$

$A=A'$, chiamiamo

T, X, Y, Z. ---T' le tensioni dei lati, abbiamo dimostrato, che le loro componenti orizzontali sono eguali, ossia che $X\operatorname{sen}\alpha'=Y\operatorname{sen}\beta'=Z\operatorname{sen}\gamma'=\text{--}=T\operatorname{sen}\alpha=T'\operatorname{sen}\delta'$, ma $T'\operatorname{sen}\alpha=A$, dunque $X\operatorname{sen}\alpha'=Y\operatorname{sen}\beta'=Z\operatorname{sen}\gamma'=\text{---}=T\operatorname{sen}\alpha=T'\operatorname{sen}\delta'=A$, Da questa equazione ricavansi le seguenti, che danno luogo al seguente teorema.

$$\begin{cases} X=\dfrac{A}{\operatorname{sen}\alpha'},\ Y=\dfrac{A}{\operatorname{sen}\beta'},\ Z=\dfrac{A}{\operatorname{sen}\gamma'} \\ \text{-------}\quad T=\dfrac{A}{\operatorname{sen}\alpha},\ T'=\dfrac{A}{\operatorname{sen}\delta'} \end{cases}$$

Nel poligono funicolare carico di pesi equilibrato la tensione di un lato qualun - que è inversamente proporzionale al seno della sua declinazione dalla verticale.

L'equazione $P+Q+R+\text{---}=V+V'$ da luogo a quest' altro teorema.

Nel poligono funicolare carico di pesi, equilibrato la somma dei pesi è eguale

alla somma delle tensioni verticali dei lati estremi.

Il poligono che consideriamo gode ancora di quest'altra proprietà che i suoi lati estremi prolungati si incontrano in un punto della verticale, che passa pel centro di gravità dei pesi.

Infatti ai pesi possiamo sostituirne uno solo applicato nel centro di gravità comune, purchè questo si intenda invariabilmente connesso col poligono, allora le forze sollecitanti il poligono si riducono a tre, di cui due dirette secondo i lati estremi del poligono, e la terza diretta secondo la verticale, che passa pel centro di gravità; ora tre queste forze non possono farsi equilibrio senza che le loro direzioni si incontrino in un sol punto.

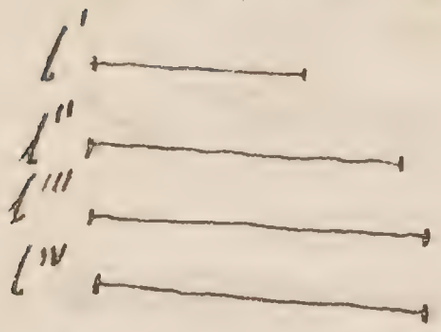
Un poligono funicolare carico di pesi, ed equilibrato è tutto in un piano verticale.

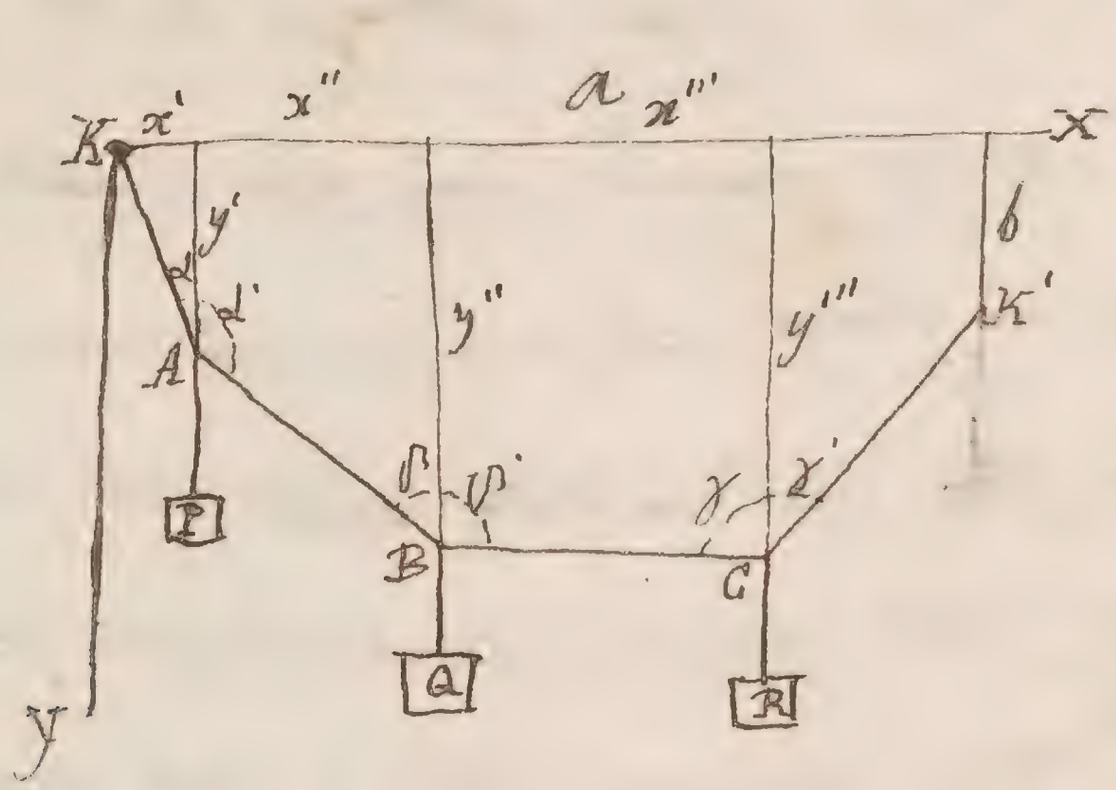
Infatti T, X, P dovendosi fare equilibrio, KA, AP, AB devono essere in uno stesso piano parimenti dovendosi fare equilibrio T, P, Q, Y, le direzioni BQ, BG devono essere nel piano di KA, AP, per la stessa ragione nello stesso piano devono essere GR, GD, DS, SK', il poligono intero è dunque ~~intero~~ nel piano di KA ed AP, il qual piano è per conseguenza verticale, giacchè AP è verticale.

Dati i pesi, Dati i lati, e dati i termini K, K', se sono fissi, oppure date le forze T, T', se i termini sono liberi, si può costruire la figura d'equilibrio.

Quando i termini sono liberi, si procede nello stesso modo, che nel caso, in cui le forze erano dirette comunque.

Nel caso dei termini fissi la soluzione si può semplificare, prendendo per incognite le coordinate dei vertici A, B, C, D - - - riferiti agli assi XX orizzontale, e XY verticale





Siano dati i lati l', l'', l''', l'''', ed i pesi P, Q, R, chiamiamo x', x'', x''' le coordinate y', y'', y''' dei vertici A, B, C, sieno a, b le coordinate cognite del termine K', avremo fra tutte queste quantità le relazioni $\begin{cases} x'^2 + y'^2 = l'^2, \quad (x''-x')^2 + (y''-y')^2 = l''^2 \\ (x'''-x'')^2 + (y'''-y'')^2 = l'''^2, \quad (a-x''')^2 + (y'''-b)^2 = l''''^2 \end{cases}$, a queste equazioni aggiungendo le altre due $\frac{P}{\cot\alpha + \cot\alpha'} = \frac{Q}{\cot\beta + \cot\beta'} = \frac{R}{\cot\gamma + \cot\gamma'}$

in cui $\begin{cases} \cot\alpha = \dfrac{y'}{x'} \\ \cot\alpha' = \dfrac{y'-y''}{x''-x'} \end{cases}$, $\cot\beta = \dfrac{y''-y'}{x''-x'}$, $\cot\beta' = \dfrac{y''-y'''}{x'''-x''}$, $\cot\gamma = \dfrac{y'''-y''}{x'''-x''}$, $\cot\gamma' = \dfrac{y'''-b}{a-x'''}$, abbiamo sei equazioni per determinare le sei incognite $x', y', x'', y'', x''', y'''$.

Qualunque sia il numero dei lati, se sia pres. m avremo sempre $2m-2$ equazioni per determinare le $2m-2$ incognite $\begin{cases} x' & x'' & x''' & \cdots & x^{(m-1)} \\ y' & y'' & y''' & \cdots & y^{(m-1)} \end{cases}$.

Nel poligono di lati flessibili tante son le forze quanti sono i vertici, purchè se ve ne fossero altre non applicate ai vertici, esse per disporsi in equilibrio farebbero piegare i lati nel loro punto d'applicazione, ed introdurrebbero dei vertici di più nel poligono: di più le forze applicate ai vertici sono dirette all'infuori, poichè altrimenti risolvendole ciascuna in due secondo dirette secondo i lati adjacenti, ~~al~~ qualcuna delle componenti il cui effetto sarebbe di comprimere i lati, e non vi sarebbe più equilibrio per la flessibilità di questi.

Se invece di un poligono flessibile noi consideriamo un poligono di lati rigidi ma mobili intorno ai vertici, allora nè l'una nè l'altra delle dette condizioni sono necessarie. 1° poichè possiamo avere delle forze applicate ai ~~vertici~~ lati, le quali non produrranno alcun nuovo vertice, ma si ~~ridurranno~~ tutte ridurre ad altre forze applicate agli angoli.

2° Le forze possono essere dirette comunque, poichè non importa, stando i lati rigidi, che (effetto) alcune delle loro Componenti sia di comprimerli. In un tal poligono possono dunque esservi delle forze applicate ai lati, ed il problema rientrerà ancora nei problemi precedenti.

Vi ha un'altra maniera di intendere formato un poligono, ed è con i lati semplicemente appoggiati l'uno contro l'altro. In questo caso vi ha equilibrio, purchè ciascun lato sia egualmente premuto in parti contrarie, ossia purchè i lati siano premuti l'uno contro l'altro. Le forze debbono dunque essere tutte dirette all'indentro del poligono.

Lezione 50.ª

I teoremi dimostrati per il poligono funicolare equilibrato ~~sono~~ lo furono indipendentemente dal numero e dalla lunghezza dei lati, ossia sono dunque veri qualunque sia il numero e la lunghezza dei lati; se dunque ad un filo diviso in parti infinitesime applichiamo delle forze in ciascun punto di divisione, le leggi dell' equilibrio saranno le stesse che per il poligono funicolare di un determinato numero di lati.

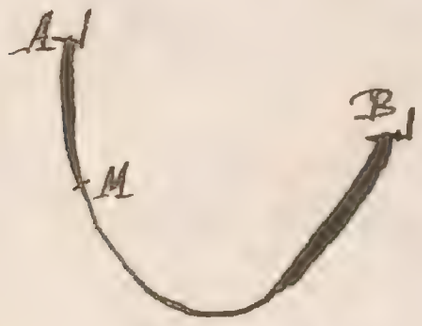
Le forze applicate a questo filo è necessario, che sieno infinitesime perchè il filo non sarebbe tanto robusto da resistere alloro azione, se desse avessero un valor sensibile.

In ciascun punto d' applicazione di ciascuna forza si formerà un vertice, come s'è detto nella Lez.ª precedente, ed il filo prenderà perciò la forma di una curva. Questa curva vien chiamata curva funicolare. Scopo della presente e delle seguenti Lezioni sarà d'investigare alcune delle proprietà di questa curva. Prima tratteniamoci un poco sulle forze molecolari, che operano su tutti gli elementi di un corpo.

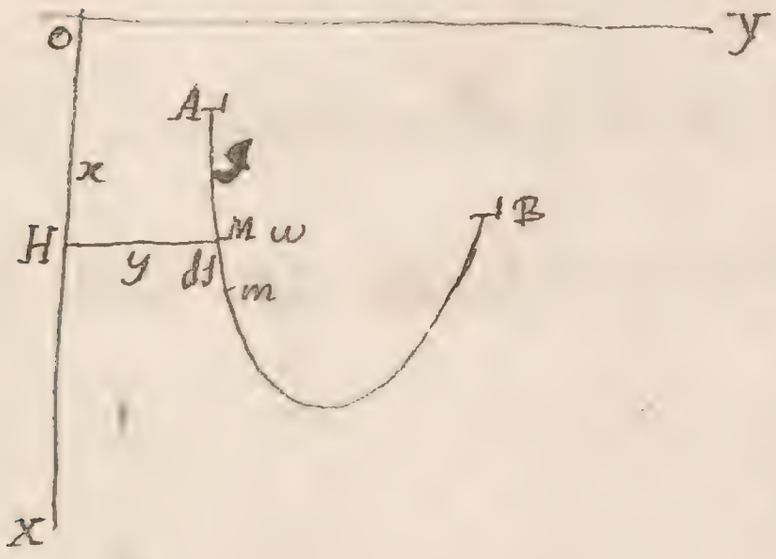
Una forza applicata ad un corpo è proporzionale alla velocità, che gli imprime in un dato tempo, proporzionale alla massa del corpo, ed inversamente proporzionale al tempo, che questa impiega per imprimere al corpo una data velocità. Se dunque sia φ la velocità, che una forza applicata ad un corpo di massa ~~M~~ imprime al corpo nell'unità di tempo, ossia in un secondo, [illegible] postiamo prender $M\varphi$ per misura della forza, allora φ esprime, o misura l'intensità della forza, che opera su l'unità di massa, e l'intensità della forza, che opera su di un elemento del corpo di massa dM sarà

-presso da $\varphi . dM$.

Ciò posto consideriamo un filo pesante di qualunque figura, e la cui densità varii in qualunque modo, attaccato per le sue estremità a due chiodi in A e B, esso abbandonato all'azione della gravità si disporrà secondo una curva AMB; nel filo così disposto facciamo una sezione normale in M.



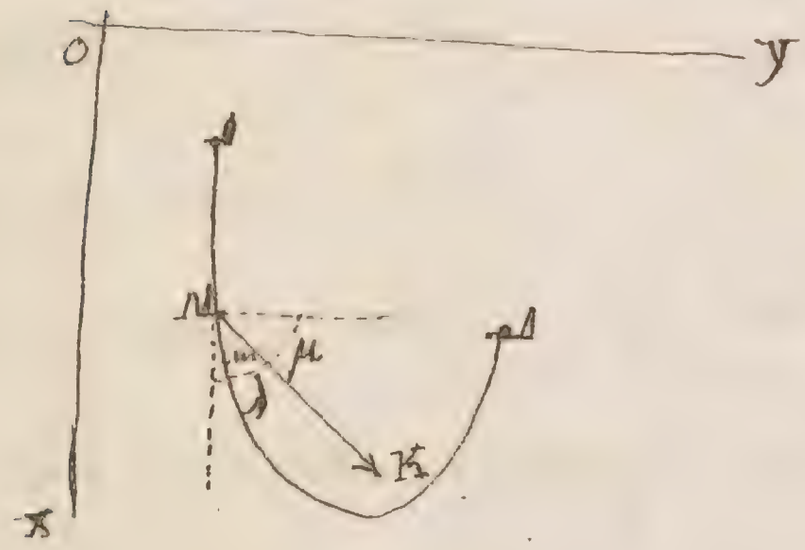
Se tal sezione la supponiamo molto piccola rispetto alla lunghezza del filo, potremo considerare invece del filo l'asse, che passa per i centri di gravità di tutte le sezioni normali, sia questo asse AMmB.



Riferiamo la curva a due assi, OX verticale, ed Oy orizzontale, consideriamo il punto $M \begin{cases} x \\ y \end{cases}$, ed il ~~round~~ tratto Mm infinitesimo di filo, la curva del filo possiamo riguardarla come un poligono infiniti-latero, ovvero, per farci un'idea più fatta della cosa, possiamo considerare il filo come una catenella formata di tratti infinitesimi uniti a snodo, e che si possono riguardar come rigidi, allora, potendosi il tratto Mm infinitesimo riguardar come cilindrico, per ciò, che abbiamo detto dei poligoni di lati rigidi uniti a snodo, il peso potremo considerarlo applicato alla metà di Mm, ma in un punto qualunque di Mm, come M.

Sia δ la densità del filo nel luogo, che consideriamo, sia ω l'area della sezione normale in M, sia s la lunghezza AM del filo, e ds la lunghezza del tratto Mm, il volume della porzioncella Mm di filo sarà espresso da $\omega.ds$, la massa da $\omega\delta.ds$, ed il peso da prodotto $g\omega\delta.ds$, essendo g quel che abbiam detto gravità, ossia il peso dell'unità di massa, ossia la velocità, che la gravità imprime ai corpi nell'unità di tempo, la quale si è trovata essere $g^{m}.60$, prendendo il secondo per unità di tempo.

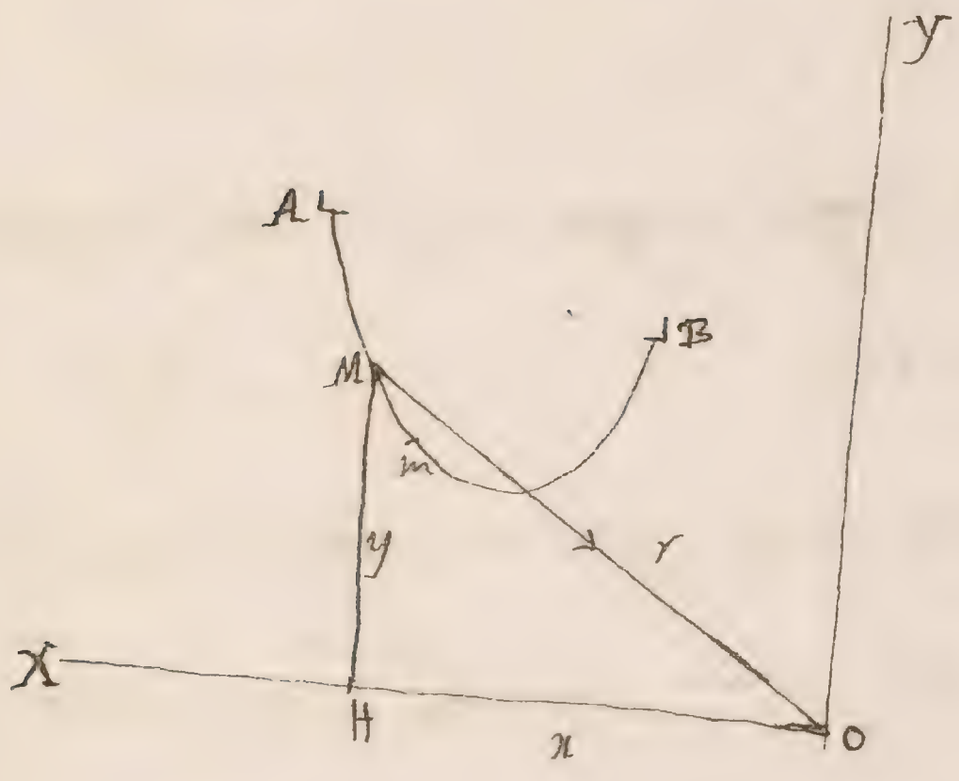
Nel caso, che consideriamo, la forza, che sollecita un'elemento del filo è verticale, ossia parallela ad ox, ed uguale $g\omega\delta.ds$, in questa espressione δ può essere funzione di s, ~~questa espressione~~ se chiamiamo Pds questa forza, abbiamo $P = g\omega\delta$. Pallora è il peso di una parte di filo, la cui sezione è quella fatta in M, la cui lunghezza è 1, e la cui densità è dappertutto δ.



Supponiamo ora ~~che~~ la gravità diretta non più in direzione verticale, e che non sia più costante nè in grandezza nè in direzione, ma che sia $\varphi = f(s)$ la velocità, che imprime ~~alla~~ ad un corpo nell'unità di tempo, e sieno λ, μ gli angoli, che la sua direzione fa cogli assi ox, oy, angoli dipendenti dalle coordinate del punto M, l'intensità della forza, quando essa opera sull'elemento Mm sarà espressa da $\varphi\omega\delta.ds$, e chiamando Pds, Qds le sue componenti verticale ed orizzontale sarà

$$\begin{cases} Pds = \varphi\omega\delta.\cos\lambda.ds \\ Qds = \varphi\omega\delta.\cos\mu.ds \end{cases}$$

Supponiamo, che la gravità, come avviene realmente, provenga dall'attrazione di una massa sferica. Dimostreremo a suo tempo, che una massa sferica attrae un corpo, come se tutta la materia fosse nel centro; sia pertanto O il centro d'attrazione, supponiamo che l'intensità di questa sia una funzione data della distanza MO, che chiamo r, e che sia $\varphi = f(r)$, l'intensità con cui M mè tirato verso O sarà $\varphi w \delta . dl$, e le componenti parallele agli assi di tal forza d'attrazione saranno



negative, ponendo l'origine degli assi nel centro O d'attrazione, e saranno

$$\begin{cases} P\,dl = -\dfrac{\varphi x w \delta}{r}\,dl. \\ Q\,dl = -\dfrac{\varphi y w \delta}{r}\,dl \end{cases}$$

Facciamo una prima ipotesi. che l'attrazione sia direttamente proporzionale alla distanza, allora la funzione $\varphi(r)$ sarà della forma $\varphi = hr$, essendo h una costante, e sarà $\begin{cases} P = -hxw\delta \\ Q = -hyw\delta \end{cases}$, in questa ipotesi le componenti parallele agli assi sono direttamente proporzionali alle coordinate.

Facciamo un'altra ipotesi, che l'attrazione sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza, ipotesi, che si verifica per la gravità;

allora sarà $\varphi = \frac{h^3}{r^2}$, essendo h una costante, e per conseguenza

$$\begin{cases} P = -\dfrac{h^3 x w \delta}{r^3} \\ Q = -\dfrac{h^3 y w \delta}{r^3} \end{cases}$$

, in questo caso le componenti parallele agli assi sono dunq

inversamente proporzionali ai cubi delle distanze, e

direttamente alle coordinate. Si possono fare ancora un'infinità di ipotesi,

in ciascuna si potrà sempre avere il valore della forza, e le sue componenti

parallele agli assi.

Se φ è una forza repulsiva, bisogna cangiar i segni alle Componenti P. Q.

Sezione 81ª

Ciò che si è detto antecedentemente giacchè estendere al caso in cui al filo sono applicate

delle forze non giacenti nello stesso piano; prendendo allora tre assi di coordinate fatte è lo

scrivere il valore delle componenti P, Q, R parallele agli assi della forza, che

sollecita un tratto di filo cilindrico, di lunghezza uno, la cui sezione normale è la sezion

fatta normalmente alla curva fa variare in un punto M, ~~la cui~~ di densità omog

ed eguale alla densità del filo nel punto M.

Ciò posto accingiamoci alla risoluzione del problema generale. Data in gran

e direzione la forza, che sollecita un punto ~~del~~ dipendente filo ~~per mezzo~~ delle coordinate del punto

ed in altri termini dato un filo di forma qualunque cilindrica o non cilindrica, omoge

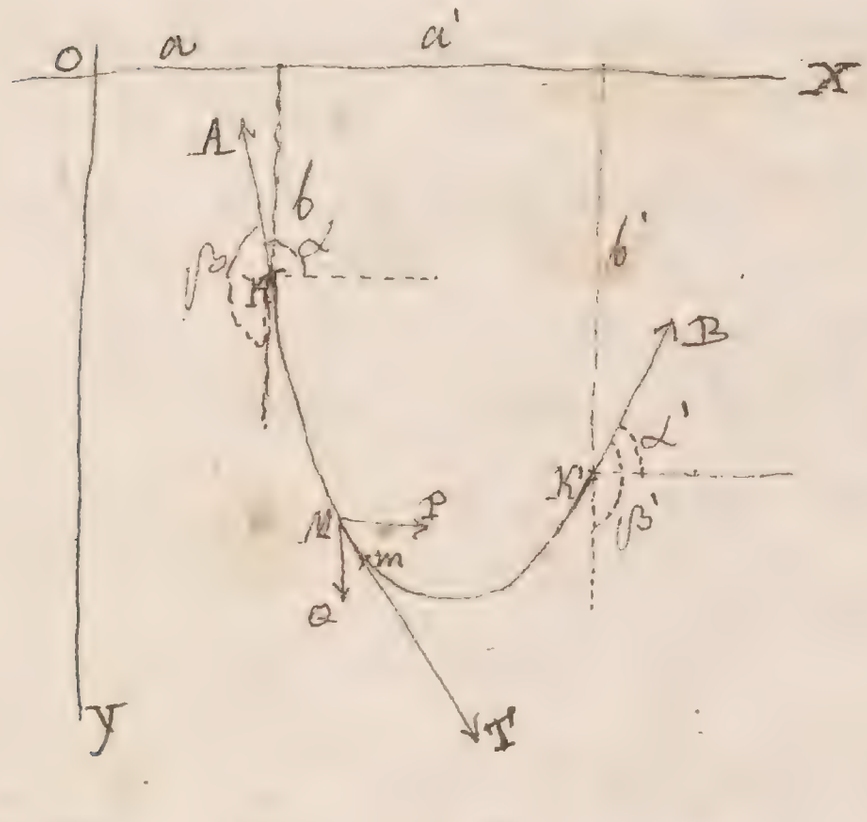
o non omogeneo, di lunghezza qualunque, sollecitato in ciascun punto da forze qualun

ritenuto nelle due estremità da punti fissi, oppure da due forze date in grandezz

e direzione. Determinare la figura d'equilibrio del filo, la natura della cu

secondo cui si dispone il filo, e la tensione di ciascun punto del filo.

Sia ora in primo luogo le forze sollecitanti il filo tutte in un piano, esso non potrà ridursi in equilibrio, se non lungache si disponga secondo una curva piana. In questo caso avremo due sole coordinate da considerare, se riferiamo la curva a due assi posti nel suo piano.



Supponiamo che sia KMK' la figura d'equilibrio del filo, gli estremi K, K' supposti essere liberi o fissi. Se sono liberi saranno di recepità ritenuti da due forze, siano A.B queste due forze, $\begin{cases} A\cos\alpha \\ A\cos\beta \end{cases}$, $\begin{cases} B\cos\alpha' \\ B\cos\beta' \end{cases}$ le loro componenti parallele agli assi; Queste forze sono completamente determinate quando gli estremi del filo sono liberi; ma quando gli estremi del filo sono fissi, esse sono incognite, in questo caso rappresentano le forze, che bisognerebbe sostituire alla fissità dei punti K. K' se si volesse queste lasciare in libertà. ossia rappresentano le tensioni dei punti fissi. Prendiamo un punto M, che abbia per coordinate $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, ed un punto infinitamente prossimo m corrispondente alle coordinate $\begin{cases} x+dx \\ y+dy \end{cases}$, sia T la tensione del tratto di filo Mm, siano $\begin{cases} Tds \\ \Theta ds \end{cases}$ le componenti parallele agli assi della forza, che sollecita il tratto Mm, abbiamo dimostrato, che in ogni poligono funicolare di un numero qualunque di lati comunque lunghi, la tensione di un lato è eguale e direttamente

opposta alla risultante di tutte le forze applicate dal principio del poligono fino alla prima estremità del lato comprenderà anche la forza applicata nel primo punto del poligono, dunque T è eguale e direttamente opposta alla risultante di tutte le forze applicate da K fino in M comprese $\begin{cases} A\cos\alpha \\ A\cos\beta \end{cases}$, se dunque intendiamo sostituzione T
-poste tutte le forze in due componenti parallele agli assi, e distintendiamo tutte le componenti che risultano, applicate in M, la componente di T parallela all'asse delle x sarà eguale alla somma delle componenti parallele all'asse delle x di tutte le forze applicate da K fino in M, e la componente di T parallela all'asse delle y sarà eguale alla somma delle altre componenti parallele allo stesso asse, ora T è diretta secondo la tangente alla curva funicolare in M, la quale fa cogli assi gli angoli, i cui cosen sono $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, dunque le componenti di T sono $\begin{cases} T\frac{dx}{ds} \\ T\frac{dy}{ds} \end{cases}$, per altra parte le forze applicate da K in M non comprese $\begin{cases} A\cos\alpha \\ A\cos\beta \end{cases}$ sono tante, quanti sono gli elementi della tratto di curva KM, dunque le somme delle componenti di queste forze sono espresse dai simboli $\int_0^{KM} P\,ds$, $\int_0^{KM} Q\,ds$, essendo P, Q funzioni di s, o di x, y, della cui determinazione ci siamo occupati nella Lezione antecedente, dunque finalmente

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{KM} P\,ds + A\cos\alpha &= -T\frac{dx}{ds} \\ \int_0^{KM} Q\,ds + A\cos\beta &= -T\frac{dy}{ds} \end{aligned}\right\}$$ sono le condizioni d'equilibrio del filo, e contengono la piena soluzione del problema.

Queste due equazioni che esprimono le sole condizioni necessarie per l'equilibrio del filo forniscono l'equazione della curva, e la tensione T del punto M. Per aver l'equazione della curva vediamo di eliminare T; E moltiplichiamo la 1ª equazione per dy, la 2ª per dx, e facendo la sottrazione di questa dalla 1ª, avremo l'equazione

$$dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = A\,dx\cos\beta - A\,dy\cos\alpha,$$

la quale sarà l'equazione della curva, ogniqualvolta P, Q son date in funzione di s. Quest'equazione si può scrivere diversamente, noi ora intendevamo gli integrali $\int P ds$, $\int Q ds$ tali da svanire per $s=0$. ma supponiamo anche intendere che per $s=0$, essi diventino $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, e supponiamo quindi scrivere l'equazione sotto la forma $dy\int P ds - dx\int Q ds = 0$, alcuni autori usano di presentarla sotto questa forma, noi però teniamoci alla 1ª.

Per avere l'equazione finita della curva bisogna ~~integrare~~ far sparire i segni $\int$, si avrà allora una equazione differenziale, che bisognerà integrare, e che sarà l'equazione finita della curva, quando si siano determinate le costanti arbitrarie introdotte dalla integrazione.

Per determinare T' leviamo al quadrato i due membri delle equazioni d'equilibrio, e sommiamole abbiamo

$$T^2 = \left[\int P ds + A\cos\alpha\right]^2 + \left[\int Q ds + A\cos\beta\right]^2.$$

Questa equazione ci fa conoscere T, quando avremo i valori di $\int P ds$, $\int Q ds$, facendo $s=0$ in questa equazione, abbiamo la tensione del filo nel punto K $T=A$ come già sapevamo.

Facciamo qualche esempio semplice per familiarizzarci con queste formole. Sia il filo pesante, cilindrico, e omogeneo, sia la direzione della gravità non verticale ma ~~[illegible]~~ diretta ~~[illegible]~~ parallelamente all'asse delle x,

allora $\Theta = 0$, e P è il peso dell'unità di lunghezza, epperciò se chiamiamo F la forza, che sollecita ciascun ~~elemento~~ tratto del filo, lungo 1 F sarà una quantità costante, e sarà $P = F$.

Sostituendo nell'equazione della curva, secondo cui si dispone il filo, essa diventa

$$\begin{cases} F\,ds\,dy = A\,dx\cos\beta - A\,dy\cos\alpha \\ T^2 = [F\,ds + A\cos\alpha]^2 + [A\cos\beta]^2 \end{cases}$$

e sostituendo nel valore di T^2, abbiamo

Facciamo ora l'ipotesi, che le forze vadano da K in K' crescendo proporzionalmente all'arco

allora sarà $\begin{cases} P = hs \\ Q = Ks \end{cases}$, e le equazioni della curva, e della tensione ci daranno le equa-

-zioni $\begin{cases} \frac{hs^2}{2}\,dy - \frac{Ks^2}{2}\,dx = A\,dx\cos\beta - A\,dy\cos\alpha \\ T^2 = \left[\frac{hs^2}{2} + A\cos\alpha\right]^2 + \left[\frac{Ks^2}{2} + A\cos\beta\right]^2 \end{cases}$. Potremmo anor fare tante altre

supposizioni, ma ritorniamo alle nostre equazioni generali, e vediamo in primo luogo come si determini nell'equa-

-zione della curva funicolare la costante, che risulta dalla integrazione di essa equazione.

Bisogna distinguere due casi, o i termini del filo sono liberi, o sono fissi.

Se sono liberi conosciamo $\begin{cases} A\cos\alpha \\ A\cos\beta \end{cases}$ $\begin{cases} B\cos\alpha' \\ B\cos\beta' \end{cases}$ e le coordinate del punto K, ci sono in-

-cognite le coordinate del termine K'. Per fissar le idee rappresentiamo l'integrale dell'equa-

-zione della curva col simbolo $\varphi(x,y) = \text{Cost.}$; il punto $K \begin{cases} a \\ b \end{cases}$ essendo un punto della curva

dovremo avere $\varphi(a,b) = \text{Cost.}$; a, b essendo cogniti la costante è dunque determinata, e

abbiamo $\varphi(x,y) = \varphi(a,b)$. Restano a determinarsi le coordinate a', b' del punto K'; pon-

-iamo, che la lunghezza del filo è una quantità data; diamola ~~però~~ l; la data

equazione della curva ~~poniamo~~ avere $s = \psi(x)$, dovrà essere $l = \psi(a')$, e se esprimiamo

s per y, e sia $s = \mu(y)$, dovrà essere $l = \mu(b')$; le equazioni $\begin{cases} l = \psi(a') \\ l = \mu(b') \end{cases}$ ci determinano

a', b'.

Quando i termini sono liberi ~~in~~ con poligono funicolare, tutte le forze ad esso applicate se le intendiamo applicate ad uno stesso punto, devono farsi equilibrio, nel nostro caso dovranno dunque essere soddisfatte ancora le condizioni $\begin{cases} A\cos\alpha + B\cos\alpha' + \int_0^l P\,ds = 0 \\ A\cos\beta + B\cos\beta' + \int_0^l Q\,ds = 0 \end{cases}$, e l'equilibrio sarebbe impossibile se esse non fossero adempiute.

Se i termini sono fissi, a, b' sono dati, e sono incognite le tensioni A, B e le loro direzioni, ossia sono incognite $A, B, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Queste sei incognite sono determinate dalle sei equazioni,

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' = 1 \\ A\cos\alpha + B\cos\alpha' + \int_0^l P\,ds = 0 \\ A\cos\beta + B\cos\beta' + \int_0^l Q\,ds = 0 \\ l = \varphi(a') \\ l = \mu(b') \end{cases}$$

di queste equazioni le ultime due non sono identicamente soddisfatte, ma debbono verificarsi, esse sono dunque equazioni che servono alla determinazione delle nostre incognite; quando queste saranno determinate, sarà soddisfatta la condizione, che ad $\begin{cases} x = a' \\ y = b' \end{cases}$ deve corrispondere $s = l$, l'altra condizione, che ad $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ deve corrispondere $s = 0$ servirà come nel caso precedente a determinarci la costante dell'equazione simbolica $\varphi(x,y) = \text{Cost.}$

Finora abbiam supposte P, Q date in funzione di s direttamente, potrebbe essere, che P, Q fossero date in funzione di x, y; allora bisognerà eliminare per la differenziazione i segni $\int$ dalle equazioni $\begin{cases} -T\frac{dx}{ds} = \int P\,ds + A\cos\alpha \\ -T\frac{dy}{ds} = \int Q\,ds + A\cos\beta \end{cases}$.

Differenziando queste equazioni abbiamo due equazioni differenziali di 2° ordine,

$$\left.\begin{aligned} -T\,d.\frac{dx}{ds} - dT.\frac{dx}{ds} &= P\,ds \\ -T\,d.\frac{dy}{ds} - dT.\frac{dy}{ds} &= Q\,ds \end{aligned}\right\}$$

tra le quali dobbiamo eliminare T per ottenere l'equazione della curva funicolare.

Per fare questa eliminazione moltiplichiamo la 1ª equazione per $\frac{dx}{ds}$, la 2ª per $\frac{dy}{ds}$, e sommiamole, abbiamo una equazione che, prendendo s per variabile indipendente, si può mettere sotto la forma

$$-T\,\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{ds^2} + dT\,\frac{dx^2+dy^2}{ds^2} = -\left[P\,dx + Q\,dy\right],$$ ora $ds^2 = dx^2+dy^2$; se differenziamo questa equazione abbiamo $2\,ds.\,d^2s = 2\left[dx\,d^2x + dy\,d^2y\right]$, donde, poichè s è variabile indipendente, $d^2s = 0$, e $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, sostituendo nella equazione trovata sostituiamo questi valori di ds^2, e del binomio $dx\,d^2x + dy\,d^2y$, affine di ridurre a $dT = -\left[P\,dx + Q\,dy\right]$; quando $P\,dx + Q\,dy$ è un differenziale esatto questa equazione ci da immediatamente T, ciò posto se moltiplichiamo la 1ª delle due equazioni differenziali superiormente scritte per $\frac{dy}{ds}$, la 2ª per $\frac{dx}{ds}$, e sottraggliamo la 2ª dalla 1ª abbiamo l'equazione

$$-T\left[\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d.\frac{dy}{ds}\right] = P\,dy - Q\,dx,$$ donde

$$dT = -\,d.\frac{P\,dy - Q\,dx}{\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d.\frac{dy}{ds}},$$ ma abbiamo anche $dT = -\left[P\,dx + Q\,dy\right]$

eguagliando questi due valori di dT abbiamo l'equazione della curva funicolare

$$P\,dx + Q\,dy = d.\frac{P\,dy - Q\,dx}{\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d.\frac{dy}{ds}},$$ la quale è di 3° ordine

Ogniuolta, che $P\,dx + Q\,dy$ è un differenziale esatto è meglio scriverla sotto quest'altra forma

$$\int (P\,dx + Q\,dy) = \frac{P\,dy - Q\,dx}{\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d.\frac{dy}{ds}}\,,$$ il

Problema dipende in questo caso da un' integrale di formola, e da una equazione di 2° ordine. Da tutto ciò concludiamo, che Generalmente il problema ~~dipende da una~~ della determinazione della curva funicolare dipende dall'integrazione di una equazione differenziale di 3° ordine, e da una di 1°, quando $P\,dx + Q\,dy$ è differenziale esatto dipende da una equazione di 2° ordine; Nel caso, in cui P, Q son date direttamente in funzione di s, il problema dipende dall'integrazione di una equazione differenziale di 1° ordine.

Lezione 52ª

Per compiere la teoria della curva funicolare restano due cose a considerarsi; Determinare le costanti arbitrarie, quando P. Q son date in funzione di x e di y, che risultano dall'integrazione; vedere cosa significhino geometricamente e meccanicamente le due equazioni

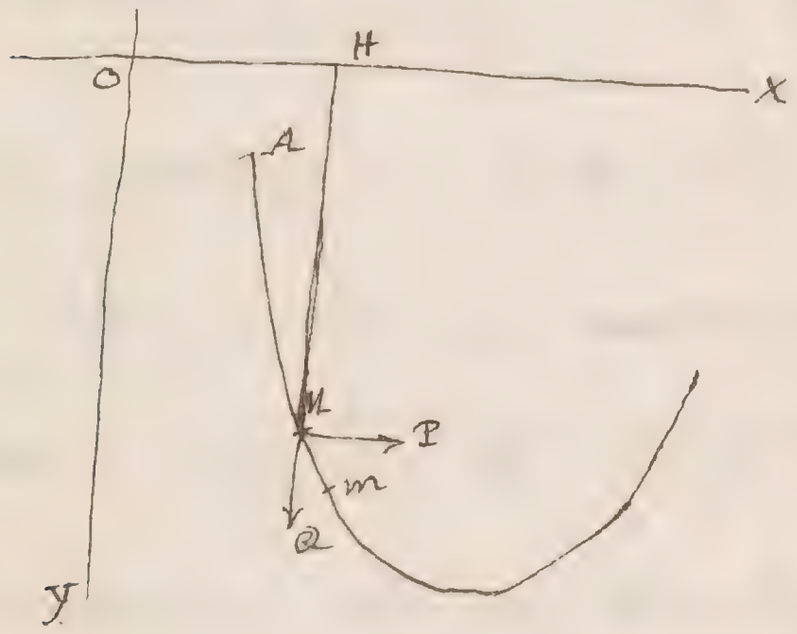
$$(1)\quad \begin{cases} -dT = P\,dx + Q\,dy \\ -T = \dfrac{P\,dy - Q\,dx}{\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d.\frac{dy}{ds}} \end{cases}$$

Cominciamo a risolvere questa 2ª questione. Perciò ricordiamoci le formole, che già una volta abbiamo trovate, e che danno le componenti tangenziale e normale di una forza applicata ad un punto di una curva; essendo P, Q le componenti

parallele agli assi della stessa forza, queste formole ~~erano~~ sono

$$\left.\begin{aligned} \text{forza tangenziale} &= \frac{P\,dx + Q\,dy}{ds} \\ \text{forza normale} &= \frac{P\,dy - Q\,dx}{ds} \end{aligned}\right\}$$

nel caso, in cui le ordinate della curva sono crescenti, e basta cangiare il segno alla 2ª per avere le formole pel caso delle ordinate decrescenti. Ciò posto le invece di considerare le forze P, Q che nel tutto caso sono quelle che agiscono sull'unità di lunghezza di filo, consideriamo le forze $P\,ds$, $Q\,ds$, operanti sull'elemento $M\,m$, questo potendosi considerare come un punto materiale, le componenti tangenziale e normale della forza che agisce su di esso saranno;



$$\left.\begin{aligned} \text{Componente tangenziale} &= P\,dx + Q\,dy \\ \text{Componente normale} &= P\,dy - Q\,dx \end{aligned}\right\}$$

ora $-dT = P\,dx + Q\,dy$, dunque

$-dT =$ componente tangenziale, dunque la 1ª delle equazioni (1) significa, che quando si passa da un punto ad un altro infinitamente vicino sulla curva funicolare, la tensione di essa varia, e l'aumento o la diminuzione è eguale alla Componente tangenziale delle forze applicate al filo tra il 1° punto ed il 2°; ciò si poteva prevedere sapendo che in ogni poligono funicolare la tensione di un lato è eguale alla risultante di tutte le forze applicate dal 1° estremo del poligono sino al lato in questione.

Nella 2ª equazione $-T = \dfrac{\dfrac{P\,dy - Q\,dx}{ds}}{\dfrac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^3}}$, perchè abbiam supposto ds variabile indipendente che possiamo scrivere;

il numeratore è la forza normale riferita all'unità di lunghezza del filo, ~~la~~ la qual forza denomino N, il denominatore rovesciato è il raggio di curvatura r in M della curva funicolare; non tenendo conto dei segni, questa equazione diventa dunque $T = Nr$, e significa meccanicamente, che la tensione di un punto della funicolare è direttamente pro-

-porzionale alla forza normale che agisce sull'unità di lunghezza del filo, ed al raggio di curvatura; questo risultato essendo assai semplice è da presumere, che si potrebbe trovare altro mezzo più diretto di dimostrarlo, e questo è ciò che più lungi vedremo.

La teoria della funicolare è tutta compresa nelle due proposizioni, che veniamo di dimostrare, che si possono esprimere in modo più semplice e più evidente dicendo, che 1.° la tensione passando da un punto ad un' altro vicino della curva cresce di una quantità numericamente eguale alla componente tangenziale e l'incremento dipende unicamente dalla componente tangenziale, e niente dalla normale; 2° la tensione in un punto è proporzionale direttamente alla componente normale N, ed al raggio di curvatura, ed il suo valore dipende per niente dalla componente tangenziale, ed il valore del raggio di curvatura $r=\frac{T}{N}$ dipende dalla sola normale. Quindi alla forza applicata in M sostituiamo le sue due componente tangenziale e normale, la prima sarà soltanto impiegata a tendere il filo, la seconda ad incurvarlo, poichè soltanto da questa dipende il raggio di curvatura: questo risultato potevasi vedere a priori perchè finchè applichiamo delle forze secondo la tangente non facciamo, che aumentare la tendenza del filo ad allungarsi, mentrechè le applichiamo una forza normale alla lunghezza del filo, questa nel punto d'applicazione introduce un vertice, cioè aumenta la curvatura; ~~se non altro punto~~

Se un filo è tirato da sole forze normali la tensione in ogni suo punto è costante, infatti in questo caso essendo nulla la componente tangenziale $dT=0$, ed integrando abbiamo $T=$cost.; inoltre essendo $N=\frac{T}{r}$, il raggio di curvatura in un punto qualunque del filo è inversamente proporzionale al valore della forza normale in quel punto.

Arriviamo facilmente agli stessi risultati partendo dalle equazioni

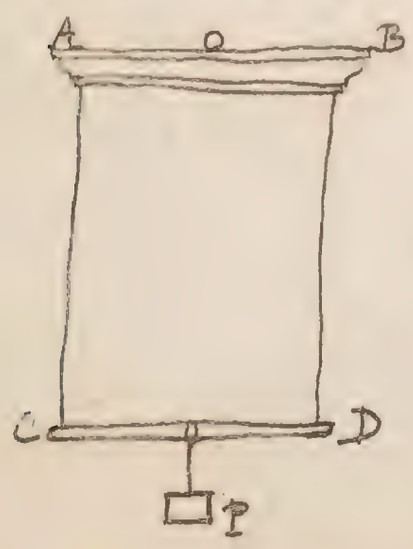
generali d'equilibrio $\begin{cases} -T\frac{dx}{ds} = \int P\,ds + A\cos\alpha \\ -T\frac{dy}{ds} = \int Q\,ds + A\cos\beta \end{cases}$, supponendo inoltre, che la forza ~~lineare~~ normale varii punto applicato sia normale alla curva in quei punti. Sia N la forza normale riferita all'unità di lunghezza, essa facendo cogli assi gli angoli i cui coseni sono $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$, bisognerà, che tali equazioni sostituiamo a P, Q, le componenti $N\frac{dy}{ds}$, $-N\frac{dx}{ds}$, (se l'aurva è d'ordinate crescenti), allora $\begin{cases} -T\frac{dx}{ds} = \int N\,dy + A\cos\alpha \\ -T\frac{dy}{ds} = -\int N\,dx + A\cos\beta \end{cases}$. In queste equazioni possiamo eseguire le integrazioni se N è costante, altrimenti esse sono un puro simbolo, poichè se N è funzione di x, y, non conoscendo ancora y in funzione di x, dx in funzione di y, non possiamo integrare già $\int N\,dy$, $\int N\,dx$; ma se sostituiamo nell'equazione $dT = -[P\,dx + Q\,dy]$ a P, Q le componenti $N\frac{dy}{ds}$, $-N\frac{dx}{ds}$, abbiamo $dT = 0$. Donde $T = cost.$; poichè $T = cost.$ differenziamo le due equazioni precedenti, avremo:

$$\left.\begin{aligned} -T\,d.\frac{dx}{ds} &= N\,dy \\ T\,d.\frac{dy}{ds} &= N\,dx \end{aligned}\right\}$$ donde se moltiplichiamo la 1ª equazione per dy, la 2ª per dx, e le sommiamo, abbiamo, poichè s è variabile indipendente

$$-T\,\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds} = N(dy^2 + dx^2) = N\,ds^2,$$ e quindi

$$T = -N\frac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y} = +Nr.$$

In questo caso delle forze normali è molto frequente in natura, infatti tutte le pressioni che esercitano l'uno contro l'altro i corpi sono normali alle superficie dei corpi. Vediamo alcuni esempii, in cui la forza, che agisce un filo proviene da una pressione un corpo contro il filo.

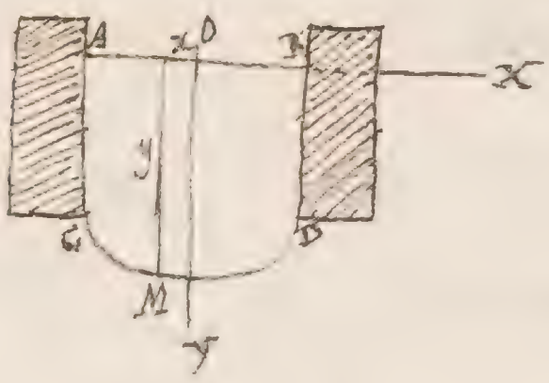


Se esponiamo all'azione del vento una tela attaccata per un capo ad una corniciera fissa AB, e per l'altro capo ad un bastone CD, che porta attaccato un peso P nel suo punto di mezzo, la tela s'inverà evidentemente secondo una superficie cilindrica, se supponiamo che il vento agisca in tutti i punti egualmente, la qual superficie avrà

per sezione retta una curva della specie, che noi consideriamo, sarà

sollecitata in ogni suo punto da una forza normale.

Abbiamo un'altro esempio di una particolare sollecitata da forze normali alla curva sezione retta della superficie cilindrica nella curva secondo cui si dispone una tela flessibile inchiodata per fondo di un canale pieno d'acqua. Infatti la pressione del liquido è diretta normalmente alla superficie di contatto.

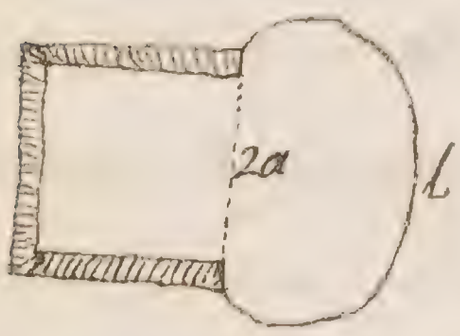


Se si volesse avere l'intensità di questa forza, sapendo che la pressione del liquido su l'elemento superficiale è eguale al peso di un cilindro d'acqua avente per base l'elemento, e per altezza la distanza dal centro di gravità alla superficie di livello, prendendo l'origine nel punto di mezzo O della linea di livello AB, chiamando l la lunghezza del canale, x, y le coordinate di un punto M della curva, P la pressione esercitata in quel punto diretta all'unità di lunghezza del filo CMD, si osserverà, che $l\,ds$ sarà l'elemento superficiale, $l\gamma ds$ il volume del cilindro sovraposto, e $l\gamma ds \cdot 1000$ sarà il peso di tal cilindro prendendo per unità di lunghezza il metro, e per unità di peso il Chilogramma, e che però $N = 1000 \cdot l\gamma$.

Sostituendo questo valore di N nell'equazione $T = N r = N \dfrac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$,

ed integrando, e determinando convenientemente le costanti, si arriverà all'equazione della curva. Le integrazioni si potranno compiere se la differenza fra la larghezza CMD della tela, e la larghezza AB del canale è molto piccola.

abbiamo un terzo esempio di un filo sollecitato da forze normali alla sua lun-
-ghezza in un vaso prismatico retto, che abbia quattro facce verticali, di cui tre sieno
resistenti, e la quarta conste di una tela più grande di quello, che richiederebbesi per
~~compire~~ chiudere il prisma, la quale sia applicata lungo gli spigoli delle pareti contigue.
Se empiamo il vaso d'acqua, la tela si stende, e sarà una superficie cilindrica evidentemente
- quella secondo cui si disporrà essa tela; questa superficie cilindrica è inoltre circo-
-lare.



Infatti il perimetro di ogni sezione orizzontale fatta nel vaso
essendo equalmente premuto, per quella sezione N è costante,
ora la tensione T è anche costante, e $r=\frac{T}{f}$. Dunque
in ogni sezione il raggio di curvatura è costante, ma vi
ha il solo circolo tra tutte le curve piane, per cui il raggio di curvatura è costante,
ogni sezione è dunque un'arco di circolo, ma i circoli han tutti la stessa ampiezza
poichè la tela ha dappertutto la stessa ampiezza, la superficie di questa è dunque
cilindrica circolare. Per compiere la soluzione del problema ci manca il raggio,
il numero di gradi dell'arco, e la tensione della tela. Riducendo questo problema
a termini generali si tratta, conosciuta la corda, che chiamo 2a d'un'arco circolare
la lunghezza l dell'arco, e la pressione costante N esercitata in ogni suo punto, di
determinare il raggio r del circolo, e la tensione T che si esercita in ogni suo punto;
Conosciuto r abbiamo tosto $T=Nr$, r poi l'abbiamo dalla equazione
$a=r\,\mathrm{Sen}\,180^\circ\frac{l}{\pi r}$; ricavato di qui r abbiamo anche il numero dei gradi dell'
arco, che sarà espresso da $180^\circ\frac{l}{\pi r}$.

Restami a dire come si debbano determinare le costanti arbitrarie, che risultano dalla in-
-tegrazione dell'equazione differenziale della funicolare. Perciò distinguiamo due casi,

o $Pdx+Qdy$ è differenziale esatto o non lo è.

Se $Pdx+Qdy$ è differenziale esatto, l'equazione differenziale della funicolare è di 2° ordine, e vi sono due costanti arbitrarie da determinare, che risultano dall'integrazione di questa, oltre quella che risulta dall'integrazione di $Pdx+Qdy$; chiamando A la tensione del 1° punto della curva, α, β gli angoli, che la direzione di questa tensione fa cogli assi, a, b le coordinate del 1° punto della curva, quest'ultima costante si ha osservando, che ai valori $x=a, y=b$ deve corrispondere $T=A$, le altre due si hanno osservando, che ad $x=a$ deve corrispondere $y=b$, e ad $x=a, y=b$ deve corrispondere $\frac{dy}{dx} = \tang \alpha$.

Se $Pdx+Qdy$ non è differenziale esatto allora l'equazione differenziale della curva è di 3° ordine, e tre sono le costanti arbitrarie. Tali costanti van determinate in modo, che ad $x=a$ corrisponda $y=b$, che formando il $\frac{dy}{dx}$ e mettendovi dentro $x=a, y=b$ si trovi $\frac{dy}{dx} = \tang \alpha$, e finalmente che sostituendo $x=a, y=b$ nella equazione $T = -\frac{Pdy - Qdx}{\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^2}}$ si trovi $T=A$.

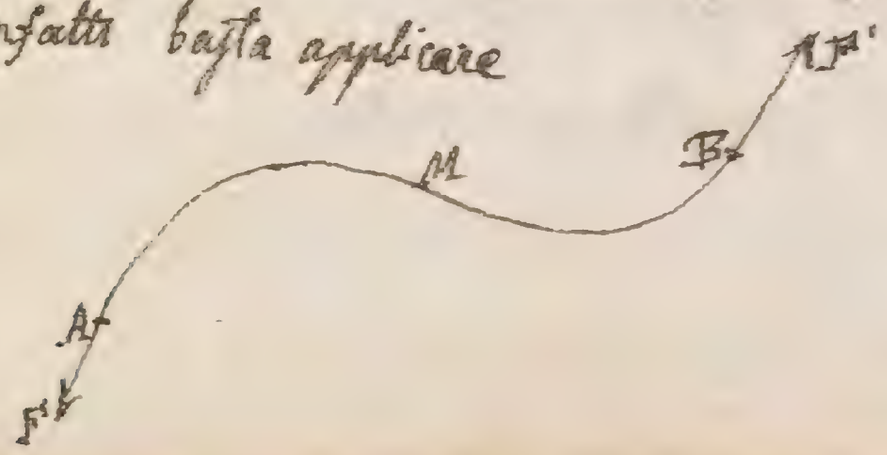
Quel che può esservi di incognito nelle quantità A, α, β, a, b si determina nel modo indicato nella Lezione antecedente.

Lezione 23ª

a La funicolare in cui le forze sono perpendicolari alla lunghezza del filo si denominò curva filaria.

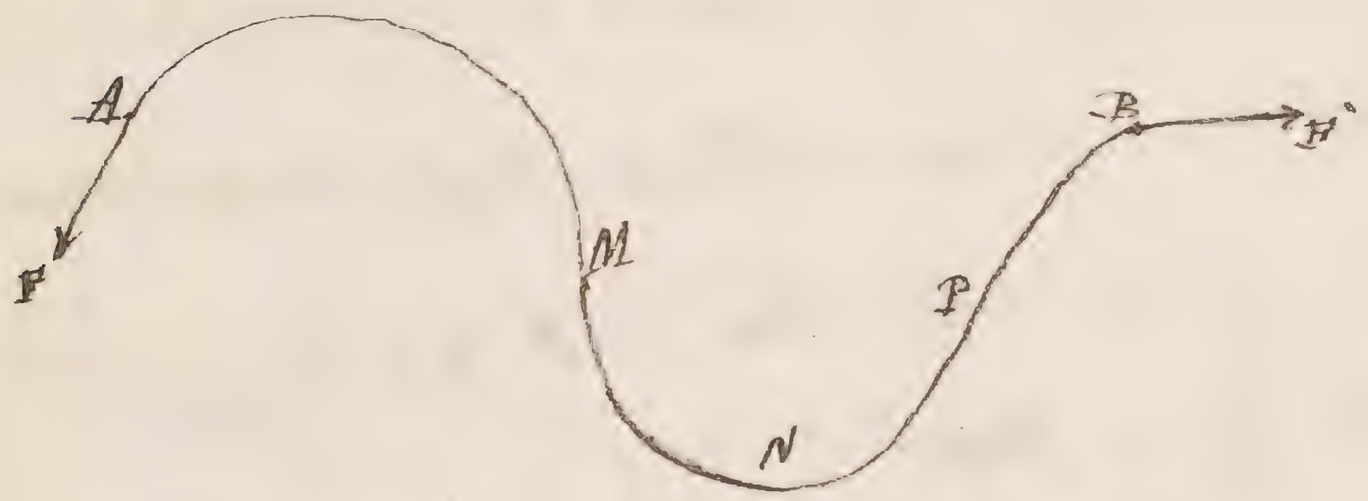
Qualunque curva immaginabile può essere una curva filaria.

Infatti basta applicare ai due estremi due forze eguali e dirette secondo le tangenti in tali punti, ovvero i raggi di



curvatura ~~dei tutti~~ i suoi punti, dividere la forza costante P applicata agli estremi per ciascun raggio di curvatura, e si avranno le forze normali da applicarsi in ciascun punto di un filo di lunghezza AB, perchè esso disponendosi in equilibrio prenda la figura della curva AMB.

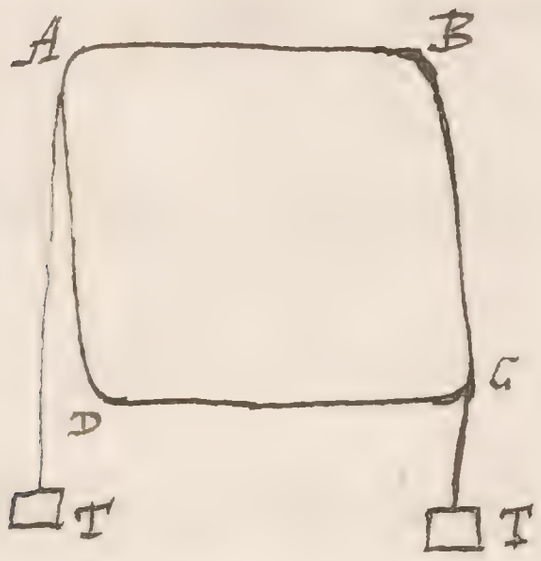
Vi ha un mezzo molto più semplice per fare una filaria d'una determinata forma; s'immaginiamo una superficie cilindrica retta sopra la curva AMB, avviluppiamo il filo interno a questa superficie ~~di~~ secondo una linea retta data, applichiamo nei suoi estremi due forze



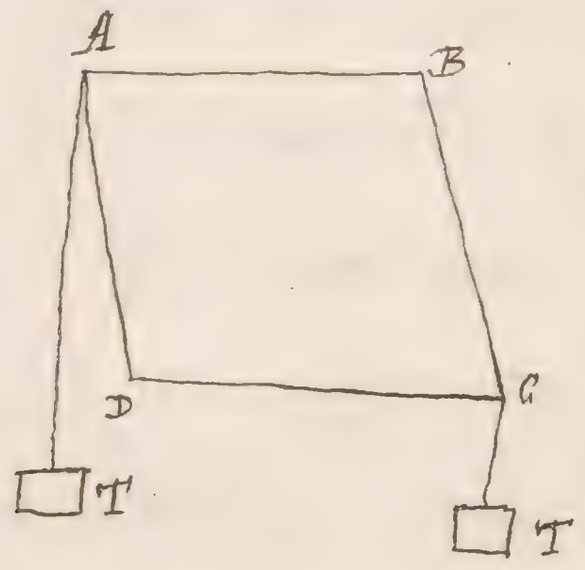
eguali e dirette secondo la tangente in tali punti estremi, il filo sarà in equilibrio, ed avrà preso la forma della curva AMB. In tal caso le forze normali, che sollecitano il filo misurano le pressioni del filo sulla superficie cilindrica, quindi il seguente teorema:
Quando si applica un filo sudi una curva materiale, o sudi una superficie cilindrica, il filo è dappertutto teso egualmente, e la pressione esercitata sulla superficie cilindrica, o sulla curva è inversamente proporzionale al raggio di curvatura.
Quando la curva ha dei punti di inflessione, il raggio di curvatura cangia di segno nei punti di inflessione, e di positivo diventa negativo, ciò significa, che le pressioni allora di ~~infelono~~ cangiano in tensioni; nella curva AMNPB ciò accade nella parte MNP; in tal parte la pressione sul cilindro è nulla, e il filo si discosterebbe dal cilindro per l'azione delle sole forze F, F', se non si impiega qualche altra forza per farlo star aderente al cilindro, si può far aderire il filo al cilindro facendo un cilindro, che posto a contatto del ~~del~~ coincida con esso perfettamente, e adattandolo sopra il filo, allora nella parte MNP

è premuto il 2° cilindro, e vicente il 1°, nelle altre parti è premuto

questo, e vicente l'altro cilindro.

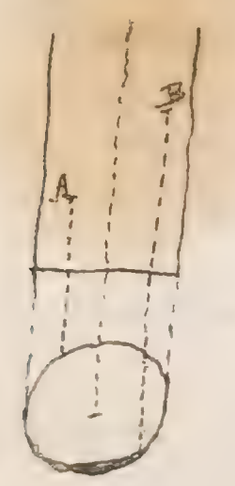


Se sopra una trave, che abbia gli angoli smozzati, come quello la cui sezione retta è ABCD, mettiamo un filo, alle cui estremità sieno attaccati due pesi eguali T, il filo si tende adattandosi sopra il trave, ed il trave sarà premuto negli angoli soltanto, sulle facce piane la pressione del filo sarà nulla; poichè il raggio di curvatura di una retta è infinito.



Se il trave avesse gli angoli aguzzi, la pressione del filo sulle facce sarebbe ancora nulla, ma la pressione sugli angoli A. C sarebbe infinita, ed avverrebbe, che ogli angoli si smozzerebbero, od il filo si romperebbe, poichè non havvi corpo, il quale possa sostenere una pressione infinita.

Consideriamo altri casi ancora.



Se sopra un cilindro avvolgiamo un filo teso in due punti A. B da forze eguali, detto si dispone sul cilindro secondo la curva detta elica, poichè essa è la curva la più breve, che si possa segnare sopra una superficie cilindrica. Se la lunghezza del filo non è determinata possiamo avvolgerlo in infiniti modi sul cilindro, potendo da A per farlo giungere in B fargli far tanti giri sul cilindro, quanti vogliamo; purchè li avvolga sempre secondo una elica, esso è sempre in equilibrio, poichè l'elica è sempre la più breve linea, che si possa tirare da A a B sul cilindro avuto riguardo al numero dei giri:

Data la tensione T del filo sui punti A, B si ha la pressione che ne è esercitata in un punto qua-
-lunque del cilindro $= \frac{T}{r}$, ora dicendo il raggio del cilindro, α l'angolo costante, che la
tangente all'elice fa colla generatrice del cilindro, abbiamo $r = \frac{a}{sen^2 \alpha}$, dunque
$N = \frac{T sin^2 \alpha}{a}$, quindi si vede, che la pressione del filo sul cilindro è costante dap-
-pertutto.

In generale se mettiamo un filo sopra una superficie curva qualunque teso alle sue estremità
da due forze eguali in due punti della superficie, il filo si disporrà secondo la curva della minima o della massima dista-
-za tra i due punti d'applicazione delle forze.
Infatti l'effetto delle forze eguali applicate al filo nei suoi estremi è di tendere il filo, ora se il filo
non è ancora disposto sulla superficie secondo la linea di minima distanza, non essendovi forza, che lo
costringa a stare in tale posizione, anzi le forze applicate agli estremi tendendo a smuoverlo dalla posi-
-zione, ossia ~~ad allung~~ a ridurlo il più teso che possono, esso non starà in tal posizione, e si muoverà fino
a che si disporrà secondo la linea di minima distanza tra i punti d'applicazione delle forze,
i quali sono fissi sulla superficie, giunto in questa posizione il filo sarà in equilibrio, poichè allora
non potrà tendersi di più. Se il filo è disposto sulla superficie secondo la linea di massima
distanza, esso sarà in equilibrio, poichè non vi ha ragione, perchè esso muovendosi di tal posizione
si muova sulla superficie strisciando piuttosto da una parte, che dall'altra della posizione
primitiva. Questa posizione d'equilibrio del filo è però instabile, mentre la 1ª è stabile.
Le pressioni del filo contro la superficie si esercitano normalmente alla superficie, ora le forze
che sollecitano un filo non si fanno equilibrio, se non sono contenute nel piano osculatore alla
curva secondo cui si dispone il filo nel loro punto d'applicazione, dunque un filo non può essere
in equilibrio sopra una superficie, se la normale la curva secondo cui esso si dispone non è tale,
che la normale alla superficie in ogni suo punto sia contenuta nel piano ad essa osculatore
in quel punto, ossia se la normale principale della curva d'equilibrio non si confonde
colla normale alla superficie, od altrimenti ancora se il piano osculatore della curva d'

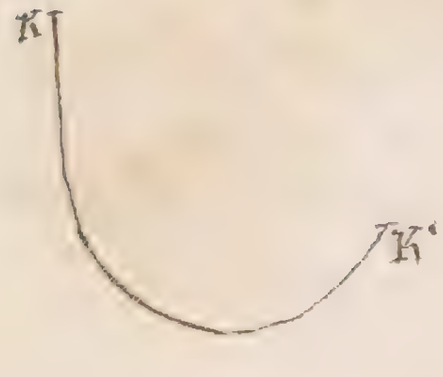
equilibrio non è dappertutto perpendicolare alla superficie, ora abbiamo dimostrato, che queste le curve d'equilibrio sono quelle di minima e di massima distanza, dunque le curve di minima e di massima distanza tra due punti di una superficie curva qualunque godono della proprietà che il loro piano osculatore è dappertutto perpendicolare alla superficie.

Questa proprietà delle linee di minima di massima distanza si dimostra analiticamente, e la dimostrazione si riduce ad un problema di Calcolo delle variazioni.

Se la superficie è chiusa vi ha linea massima, se è aperta non vi ha; così il filo, che mettevamo sopra il cilindro circolare applicandovi due forze eguali in A, B ha una sola posizione d'equilibrio sulla superficie, ed è quella della linea brevissima tra i punti A e B, avuto sempre riguardo al numero dei giri, che facciam fare al filo intorno al cilindro per giungere da A in B.

Lezione 84ª.

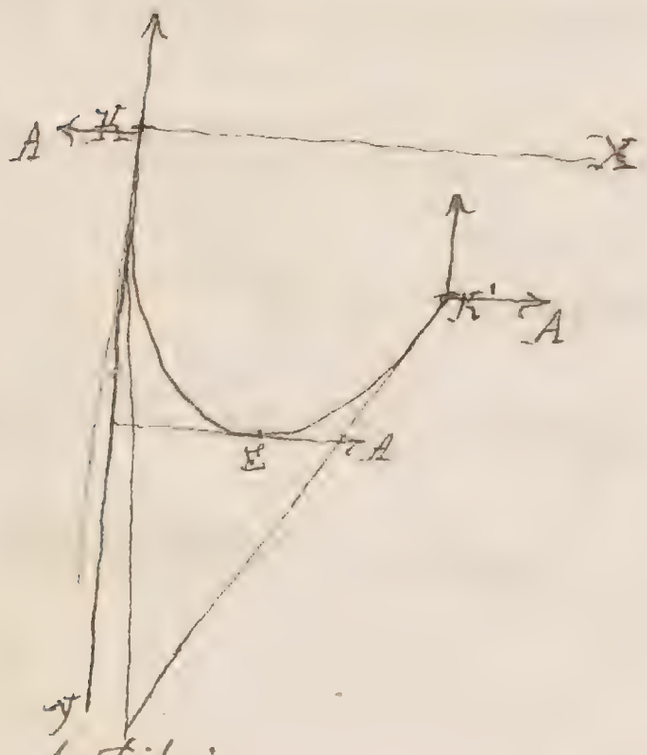
Fra tutte le forme delle funicolari, quelle che più ci interessano, sono quelle delle linee secondo cui si dispone un filo pesante attaccato per le sue estremità a due punti fissi K, K' meno distanti tra loro di quel che sia la lunghezza del filo. Il filo potendo così considerare come una catenella di anelli piccoli piccoli in confronto della lunghezza



della catena, queste curve furon chiamate curve catenarie.

La forma della Catenaria dipende dalla posizione dei punti fissi, dalla lunghezza della catena, e dal peso degli anelli; potendo queste cose variare in infinite guise, ne segue, che infinito è il numero delle forme, che può avere la Catenaria, ossia, che vi ha una infinità di curve, che possono essere Catenarie.

Non però tutte le curve possono essere catenarie, poichè queste hanno delle proprietà comuni, che esponiamo prima di considerare catenarie particolari.



Tutte le proprietà del poligono funicolare caricato convengono alla catenaria. Quindi in essa la tensione orizzontale è costante in ogni suo punto, ed è ancora la stessa nei punti estremi K, K', cosicchè se si volessero togliere i punti estremi fissi bisognerebbe sostituire a ciascuno di essi due forze una verticale, l'altra orizzontale, tali che la somma delle due forze verticali fosse eguale al peso della catena, e le orizzontali fossero eguali ed eguali alla tensione orizzontale A della curva.

Inoltre se prolunghiamo le tangenti estreme della curva esse si incontrano sulla verticale che passa pel centro di gravità del filo o della catena, e siccome possiamo riguardare gli estremi della curva in qualunque luogo di essa, così le tangenti in due punti qualunque della curva prolungate si incontrano sulla verticale del centro di gravità.

Riferendo la curva a due assi, uno orizzontale, l'altro verticale, condotti per l'estremo E della catena, ne segue, che la tensione della curva nel punto E, la cui ordinata è nulla, è eguale alla tensione orizzontale A, poichè in tal punto la tangente alla curva è orizzontale.

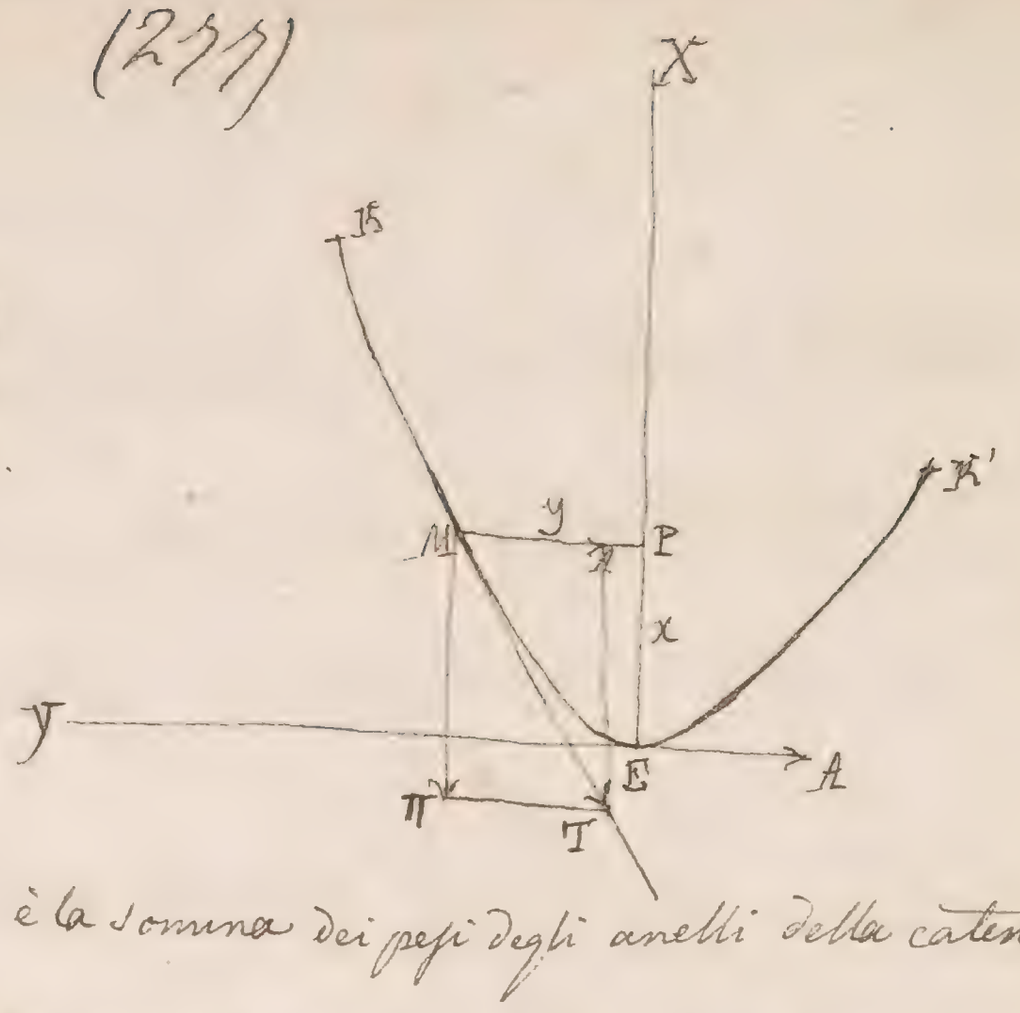
Le generali equazioni della funicolare sono, essendo H la tensione in K, bisogna che le applichiamo al caso delle forze parallele, per avere l'equazione generale della Catenaria.

$$\left.\begin{aligned} -T\frac{dx}{ds} &= \int P\,ds + H\cos\alpha \\ -T\frac{dy}{ds} &= \int Q\,ds + H\cos\beta \end{aligned}\right\}$$

In questo caso metto l'origine in E, e riguardo il punto E come 1° punto della curva, la tensione in questo punto essendo orizzontale, ed = A, le equazioni si riducono alle seguenti

$$-T\frac{dx}{ds} = \int P\,ds$$

$$-T\frac{dy}{ds} = \int Q\,ds - A$$



In queste equazioni $-\int P\,ds$ è la somma dei pesi degli anelli della catena da E in M, ossia il peso della porzione ME di catena, questo peso chiamiamolo Π, e sarà $\Pi = -\int P\,ds$, e sarà funzione di s, od di x, y; $\int Q\,ds$ è la somma delle componenti orizzontali dei pesi da E sino in M, la qual somma è nulla; sostituendo questi valori nelle equazioni generali, abbiamo le equazioni generali di tutte le catenarie $T\frac{dx}{ds} = \Pi$, $T\frac{dy}{ds} = A$. Qualunque sia la legge con cui variano i pesi dei diversi anelli della catena, Π deve sempre essere positivo, e deve sempre crescere col crescere di s, quest'ultima condizione equivale a dire, che $\frac{d\Pi}{ds}$ deve sempre essere positivo, A è necessariamente positiva anch'essa; Dalle equazioni generali eliminando T abbiamo $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{\Pi}$ equazione generale di tutte le catenarie. Dalle stesse equazioni elevando al quadrato i loro due membri e poi sommandole abbiamo ancora $T^2 = \Pi^2 + A^2$, equazione la quale ci da la tensione T, e ci dice inoltre, che in ogni Catenaria la tensione in un punto è eguale alla risultante delle forze, Componente orizzontale della tensione, ossia tensione orizzontale, e peso della porzione di catena compresa tra il punto, che si considera, ed il punto più basso della curva, quindi risulta un metodo per condurre una tangente alla Catenaria in un punto qualunque M di essa.

Costruiscasi in M un rettangolo, il cui lato orizzontale MA rappresenti la tensione orizzontale, il cui lato verticale M Π rappresenti ~~la ten~~ il peso della catena ME,

la diagonale di un tal rettangolo sarà tangente alla catenaria.

Abbiamo anche trovato per la funicolare $-dT = P\,dx + Q\,dy$, nel nostro caso differenziando $\int P\,ds = -\pi$, $\int Q\,ds = 0$, abbiamo $P = -\frac{d\pi}{ds}$, $Q = 0$, per la catenaria si ha dunque $dT = \frac{d\pi}{ds}\,dx$; quando avremo π in funzione di s integrando avremo T in funzione di x determinando la costante arbitraria in modo, che per $x = 0$ sia $T = s$

L'equazione generale $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{\pi}$, A, π dovendo sempre essere positivi, ci dice, che $\frac{dy}{dx}$ è sempre positivo, ossia che la tangente alla Catenaria fa sempre angolo diverso dall'asse delle x positive, ossia colla verticale, e che $\frac{dy}{dx}$ non potrà mai esser zero, poichè A essendo costante, bisognerebbe perchè ciò avvenisse, che fosse $\pi = \infty$, ora non abbiamo catena, il cui peso sia infinito, inoltre π crescendo col crescere di s, ~~la curva~~ $\frac{dy}{dx}$ diminuirà col crescere di s, la curva va dunque sempre allargandosi, quanto più ci scostiamo da E. Differenziando l'equazione $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{\pi}$. si vede ancora, che $\frac{d^2y}{dx^2}$ è sempre negativo, la curva dunque è sempre concava verso EX.

Tutte le curve, che soddisferanno alle condizioni di essere sempre concave verso l'asse delle x e di allargarsi sempre partendo dall'origine potranno essere catenarie; posto dunque segnare una curva qualunque KEK', e determinare la legge dei pesi della catena a partire da E. Sia $y = \varphi(x)$ l'equazione della curva KEK', sia Ω il peso totale della catena, il quale deve essere conosciuto, sieno l, l' le lunghezze di catena EK, EK', le quali sono conosciute essendo conosciute le coordinate dei punti K, K', differenziamo l'equazione $y = \varphi(x)$ e sia $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$, poichè $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{\pi}$, avremo $\pi = \frac{A}{\varphi'(x)}$, e volendo esprimere π per s bisognerà che ricaviamo x per s integrando $ds = dx\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}$, e che quindi esprimendo x per s, lo sostituiamo nel valore di π in $\varphi(x)$. Sia $\varphi(x) = \psi(s)$, sarà $\pi = \frac{A}{\psi(s)}$

Per determinare A introduciamo la condizione, che il peso di K[illegible] più il peso di K'E sia eguale a Ω, avremo $\Omega = \frac{A}{\varphi(l)} + \frac{A}{\varphi(l')}$, donde

$$A = \frac{\Omega}{\frac{1}{\varphi(l)} + \frac{1}{\varphi(l')}}$$

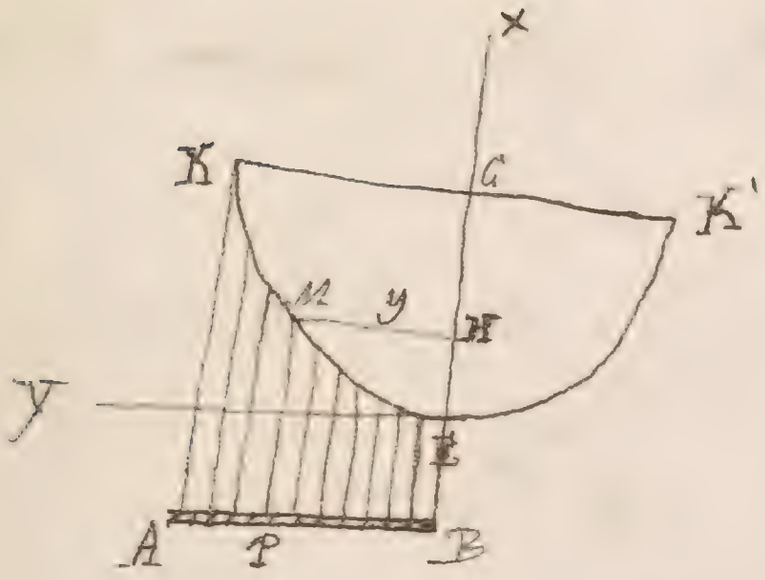
; se la catena deve essere formata di un numero h di anelli da E in K, e vogliamo dare all' artefice una tavola dei pesi di ciascun anello, perchè esso possa costruirsi la catena, chiamando $\pi', \pi'', \pi''' \ldots \pi^{(n)} \ldots \pi^{(h)}$ i pesi di ciascuno di essi, avremo, se h sia abbastanza grande da poter riguardare $\frac{l}{h}$ come la lunghezza di ciascuno anello,

$$\begin{cases} \pi' + \pi'' + \ldots + \pi^{(n-1)} = \dfrac{A}{\varphi\left[\frac{(n-1)l}{h}\right]} \\ \pi' + \pi'' + \ldots + \pi^{(n-1)} + \pi^{(n)} = \dfrac{A}{\varphi\frac{nl}{h}} \end{cases}$$

donde $\pi^{(n)} = \dfrac{A}{\varphi\left(\frac{nl}{h}\right)} - \dfrac{A}{\varphi\left[\frac{(n-1)l}{h}\right]}$;

in questa formola basterà dare ad n i valori $1, 2, 3, \ldots h$ per avere i pesi dei diversi anelli.

Supponiamo, che l'equazione $y = \varphi(x)$ sia quella di una parabola ordinaria, e sia $y^2 = px$, avremo allora $\varphi'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, e quindi $\frac{p}{2y} = \frac{A}{\pi}$, $\pi = \frac{2Ay}{p}$; essendo data la lunghezza ed il peso dell'arco KEK', A è determinata, e $\frac{2A}{p}$ essendo quantità costante, l'equazione $\pi = \frac{2A}{p} y$ ci dice, che il peso è proporzionale alla orizzontale y.



Se ad una catena KE attacco tanti fili, e alle estremità di questi attacco una spranga AB pesante, ~~ed~~ omogenea, e cilindrica, disponendosi la spranga orizzontalmente, la catena KE si dispone secondo un'arco di parabola, supponendo i fili e la catena non pesanti; infatti in tal caso i pesi sono proporzionali alle ordinate.

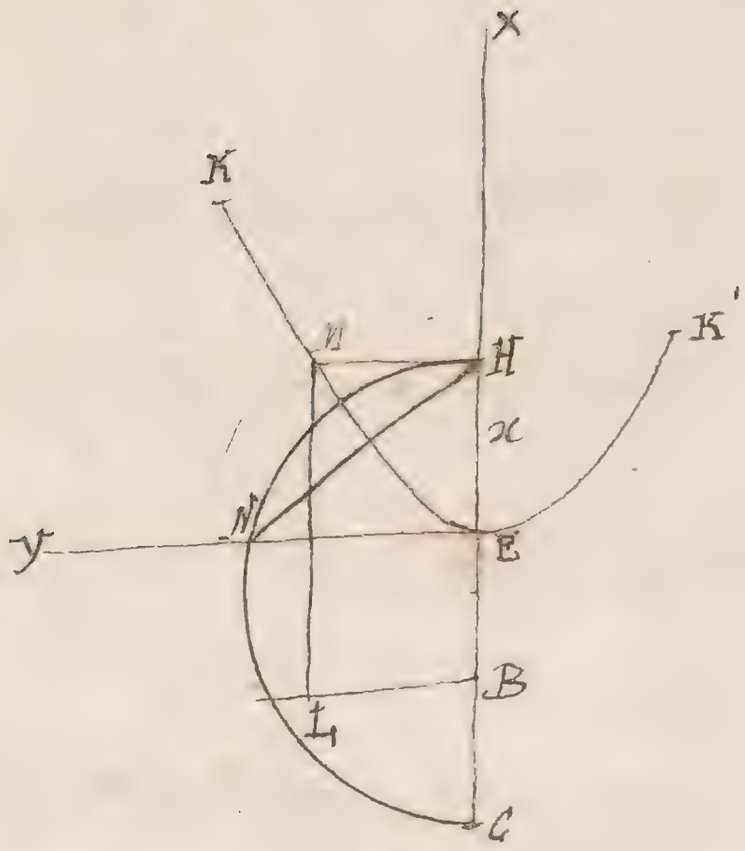
dei ponti pensili il peso delle catene e delle gomene è trascurabile a fronte del peso del tavolato, inoltre le porzioni del tavolato hanno i loro pesi proporzionali alle loro lunghezze, dunque nei ponti pensili ~~dunque~~ le curve secondo cui sono piegate le gomene sono sensibilmente parabole ordinarie.

Lezione 55ª

abbiamo trovate le equazioni generali, che ci danno la forma delle ~~cat~~ diverse catene e la tensione in ogni loro punto, abbiamo detto quali sieno le proprietà generali delle catenarie, facciamo ora delle ipotesi particolari sulla distribuzione dei pesi della catena. Quando il peso è uniformemente distribuito nella lunghezza della catena, ossia quando si ha un filo cilindrico, pesante ed omogeneo, la curva secondo cui questo si dispone attaccandole per le sue estremità a due punti fissi si chiama la catenaria omogenea. In questa ipotesi tutte le lunghezze eguali di filo pesando egualmente, se chiamiamo K il peso dell'unità di lunghezza, avremo $\pi = Ks$, e poichè A ~~rappresenta~~ possiamo intendere rappresentato da un peso, ci sarà permesso di rappresentare A col prodotto KB, B sarà la lunghezza di una certa parte di filo il cui peso è eguale alla tensione orizzontale. Sostituendo questi valori di π, A nella equazione generale delle catenarie $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{\pi}$ ossia $\pi\, dy = A\, dx$, essa diventa $s\, dy = B\, dx$. Questa è l'equazione differenziale della catenaria omogenea.

Le due espressioni $T = \sqrt{\pi^2 + A^2}$, $dT = \frac{d\pi}{ds}\, dx$ della tensione ci danno per la catenaria omogenea $T = K\sqrt{B^2 + s^2}$, $dT = K\, dx$,

e poichè ad $s = 0$, deve corrispondere $T = A = KB$ abbiamo le due espressioni della tensione $T = K\sqrt{B^2 + s^2}$, $T = K(x + B)$.



Queste due valori della tensione ci somministrano due modi grafici per determinarla. Se conosciamo la lunghezza dell'arco ME avremo la tensione in M, facendo un rettangolo, i cui lati sieno B, s, e pesandone la diagonale

Suppongasi omogenea e cilindrica di diametro eguale a quello del filo KEK'. Se conosciamo l'ascissa HE = x del punto M, abbiamo la tensione in M, la quale è proporzionale alla elevazione ML del punto M al disopra di un piano orizzontale IB condotto alla distanza B dal punto più basso E della curva, ed è eguale al peso di uno filo di lunghezza MI, omogeneo e cilindrico di diametro eguale a quello del filo KEK'.

Da ciò si vede, che il problema della determinazione della tensione dipende dalla determinazione delle costanti K, B. B è la sola di queste costanti, che entri nella equazione della curva, ed è detta parametro o modulo della tensione orizzontale, ci occuperemo fra breve della determinazione del modulo B, il cui valore dipende dalla lunghezza del filo e dalla posizione dei punti fissi.

Eguagliando i due valori della tensione, che si sono trovati, abbiamo l'equazione $x+B=\sqrt{B^2+s^2}$, donde $x^2+2Bx=s^2$, ed $s=\sqrt{x(2B+x)}$;

la Catenaria omogenea è dunque rettificabile, e la lunghezza di un' arco ME contata dal punto più basso E è media proporzionale fra l'ascissa HE, e l'ascissa accresciuta del doppio del modulo; se dunque prolunghiamo EX di una quantità EC = 2B, e sopra HC descriviamo un semicircolo, HN = ME.

Finalmente sostituendo questo valore di s nella equazione differenziale della curva $sdy = B\,dx$, ed integrando, abbiamo l'equazione finita della Catenaria omogenea

$$y = B\int \frac{dx}{\sqrt{2Bx+x^2}} = B\log\left\{\text{cost.}\left[B+x\pm\sqrt{2Bx+x^2}\right]\right\}$$, la costante si determina

osservando, che ad $x=0$ deve corrispondere $y=0$; questa osservazione ci da

$\log[B\,\text{cost.}]=0$, donde $\text{cost.}=\frac{1}{B}$, e per conseguenza

$$y = B\log.\frac{B+x\pm\sqrt{2Bx+x^2}}{B}$$, se y lo volessimo espresso in s, come

già abbiamo espresso s, ricordandoci le equazioni $\begin{cases} x+B=\sqrt{B^2+s^2} \\ s=\sqrt{2Bx+x^2} \end{cases}$

abbiamo subito $y = B\log\frac{s\pm\sqrt{B^2+s^2}}{B}$.

La Catenaria omogenea è simmetrica rispetto alla verticale EX condotta pel punto più basso, poichè ad uno stesso valore di x ne corrispondono due per y eguali e di segno contrario; per convincerci di ciò vediamo se moltiplicando fra di loro i due valori del numero, che è sotto il segno log., il prodotto è $=1$;

$$\frac{B+x+\sqrt{2Bx+x^2}}{B}\cdot\frac{(B+x)-\sqrt{2Bx+x^2}}{B} = \frac{(B+x)^2-(2Bx+x^2)}{B^2} = \frac{B^2}{B^2}=1,$$

ciò essendo, chiamando N, N' questi numeri, ne deriva, che $N=\frac{1}{N'}$, e che $\log N = \log N'$. Possiamo convincerci della stessa simmetria ricavando x per y, ed esaminando se cangiando il segno di y non cangia il valore di il segno di x; Dalla equazione sovrascritta in x e in y, abbiamo

$$B+x+\sqrt{2Bx+x^2} = Be^{\frac{y}{B}} = Be^{z}, \text{ facendo } \frac{y}{B}=z$$

$$2Bx+x^2 = (B+x)^2 - 2Be^z(B+x)+B^2e^{2z}$$

$$2Be^z(B+x) = B^2(1+e^{2z})$$

$$x = B\,\frac{1+e^{2z}-2e^z}{2e^z} = B\,\frac{(1-e^z)^2}{2e^z} = \frac{B}{2}\left[e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right]^2 = \frac{B}{2}\left[e^{\frac{y}{2B}}-e^{-\frac{y}{2B}}\right]^2.$$

Avuto questo valore di x per y, abbiamo facilmente anche T per y;
sostituendo nell'equazione $T = K(x+B)$, abbiamo

$$T = K\frac{B}{2}\cdot\frac{1+e^{2z}}{ez} = \frac{KB}{2}\left[e^{\frac{y}{B}} + e^{-\frac{y}{B}}\right].$$

L'equazione $T = Nr$, ci da $r = \frac{T}{N}$, ora $N = \frac{Pdy - Qdx}{ds} = P\frac{dy}{ds}$, nella nostra ipotesi $P = \frac{d\pi}{ds} = K$, dunque $\frac{dy}{ds} = \frac{A}{T} = \frac{KB}{T}$,

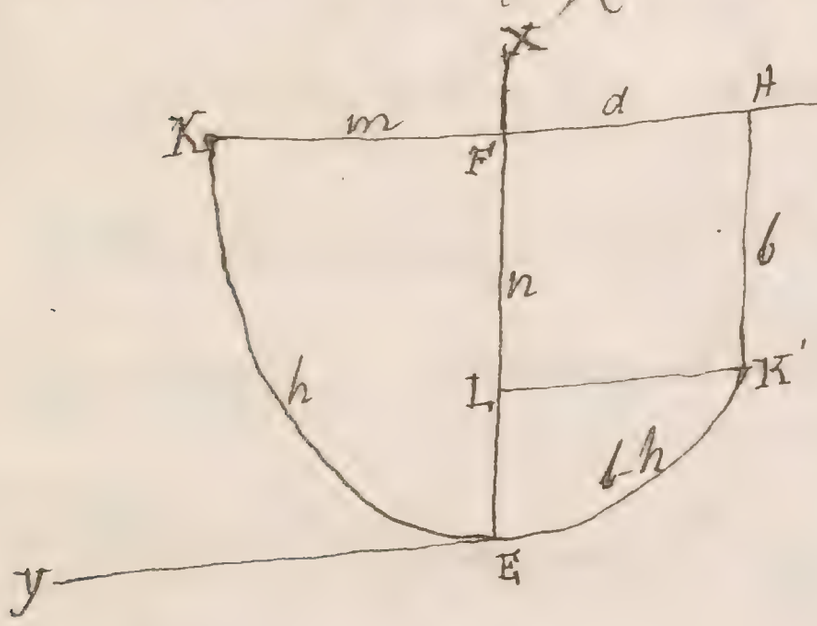
dunque il raggio di curvatura della Catenaria omogenea

è ~~$r = \frac{K\pi}{d\pi\, K}$~~ $r = \frac{T}{K\frac{KB}{T}} = \frac{T^2}{BK^2} = \frac{B^2+s^2}{B} = \frac{(x+B)^2}{B}$

$$r = \frac{B}{4}\left[e^{\frac{y}{B}} + e^{-\frac{y}{B}}\right]^2.$$

Lezione 26.ª

Per compiere la teoria della Catenaria omogenea restaci a determinare le costanti, che entrano nelle sue equazioni generali. Possiamo fare due ipotesi, la 1.ª che sieno dati i punti fissi, e la profondità del punto infimo della Catenaria; la 2.ª, che sieno dati i punti fissi e la lunghezza della catena.



Nella prima ipotesi E sarà noto, quando conosceremo K.F. E.F, che chiamo m, n; ed l ottiala lunghezza del filo, e la porzione EK, che chiamo h saranno ~~note~~ note quando conosceremo il punto E ed il modulo B; dunque nel

1°. caso son Dati a. b. n,
sono incognite b. h. m. B, e si

hanno queste incognite osservando, che $x = n$ rende $y = m$, $s = h$, e che $x = n - b$ rende $y = a - m$, $s = b - h$.

Per esprimere queste condizioni possiamo servirci di uno dei due sistemi di equazioni

$$\left.\begin{aligned} y &= B \log \frac{B+x+\sqrt{2Bx+x^2}}{B} \\ s &= \sqrt{2Bx+x^2} \end{aligned}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{aligned} y &= B \log \frac{s+\sqrt{B^2+s^2}}{B} \\ B+x &= \sqrt{B^2+s^2} \end{aligned}\right. ,$$

nel nostro caso ci riesce più comodo l'uso del 1° sistema, e troviamo per la determinazione delle quattro incognite le quattro equazioni

$$m = B \log \frac{B+n+\sqrt{2Bn+n^2}}{B} \quad , \quad a-m = B \log \frac{B+n-b+\sqrt{2B(n-b)+(n-b)^2}}{B}$$

$$h = \sqrt{2Bn+n^2} \quad , \quad l-h = \sqrt{2B(n-b)+(n-b)^2}$$

ricavando m dalla 3ª equazione, ed eguagliandolo a quel valore di m, che ci da la 1ª, abbiamo una equazione, che contiene il solo B; una tale equazione risolta coi metodi d'approssimazione ci da B; avuto B abbiamo subito m, h, e quindi l.

Nel 2° caso sono dati a, b, l, sono da determinarsi m, n, h, B; e si determinano esprimendo analiticamente, che s = h deve rendere x = n, y = m, e che

s = l − h rende x = n − b, y = a − m, in questo caso ci sarà più conveniente di servirci del 2° sistema di equazioni, che abbiamo superiormente scritto. Sostituendo in tal sistema abbiamo le quattro equazioni, che risolvono il problema, le quali sono

$$m = B \log \frac{h+\sqrt{B^2+h^2}}{B} \quad , \quad a-m = B \log \frac{l-h+\sqrt{B^2+(l-h)^2}}{B}$$

$$B+n = \sqrt{B^2+h^2} \quad , \quad B+n-b = \sqrt{B^2+(l-h)^2} \; ;$$

dalla 2ª, e dalla 4ª equazione eliminando n, abbiamo

$\sqrt{B^2+h^2} - b = \sqrt{B^2+(l-h)^2}$, donde ricavasi

$h = \frac{l}{2} - \frac{b^2}{l^2-b^2}\sqrt{4B^2+l^2-b^2}$; dalla 1ª e dalla 3ª equazione

eliminando m hassi una equazione in B. h , nella quale sostituendo questo valore di h, avremo una equazione contenente il solo B, che risolta in qualche modo ci darà B; avuto B, avremo tosto h, e quindi m. n.

Se i due termini son dati alla stessa altezza dall'orizzonte, come avviene nei ponti pensili, allora $b=0$, $m=\frac{1}{2}a$, $h=\frac{1}{2}l$, e la questione diventa per conseguenza più semplice, poichè avremo due incognite di meno di nella 1ª ipotesi, che nella 2ª.

nella 1ª saranno dati a, n, e saranno incogniti b, B.

nella 2ª saranno dati a, l, e saranno incogniti n, B.

Osservando, che $x=n$ rende $y=\frac{1}{2}a$, $s=\frac{1}{2}l$, abbiamo per risolvere la 1ª questione le equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = B\log\frac{B+n+\sqrt{2Bn+n^2}}{B} \\ \frac{1}{2}l = \sqrt{2Bn+n^2} \end{cases} ;$$

la 1ª equazione ci da B. trovato questo la 2ª ci da subito l.

Vi han due casi, in cui la soluzione della 1ª equazione diventa alquanto più facile, 1º quando n è molto piccolo a confronto di a; Infatti allora B è grandissimo, e svolgendo il 2º membro dell'equazione 1ª secondo le potenze di $\frac{n}{B}$ potremo trascurare le potenze molto elevate di $\frac{n}{B}$, con 4º la 4ª potenza, e le superiori. Se non vorremo grande approssimazione, avremo così una equazione di 2º grado, che ci darà B.

2° quando la saetta n è molto grande a confronto di a; Infatti allora B è molto piccolo, e svolgendo secondo le potenze di $\frac{B}{n}$ il logaritmo, si potranno trascurare per es. le potenze superiori alla prima di $\frac{B}{n}$, si avrà così una equazione di 2° grado, la quale ci da B per a;

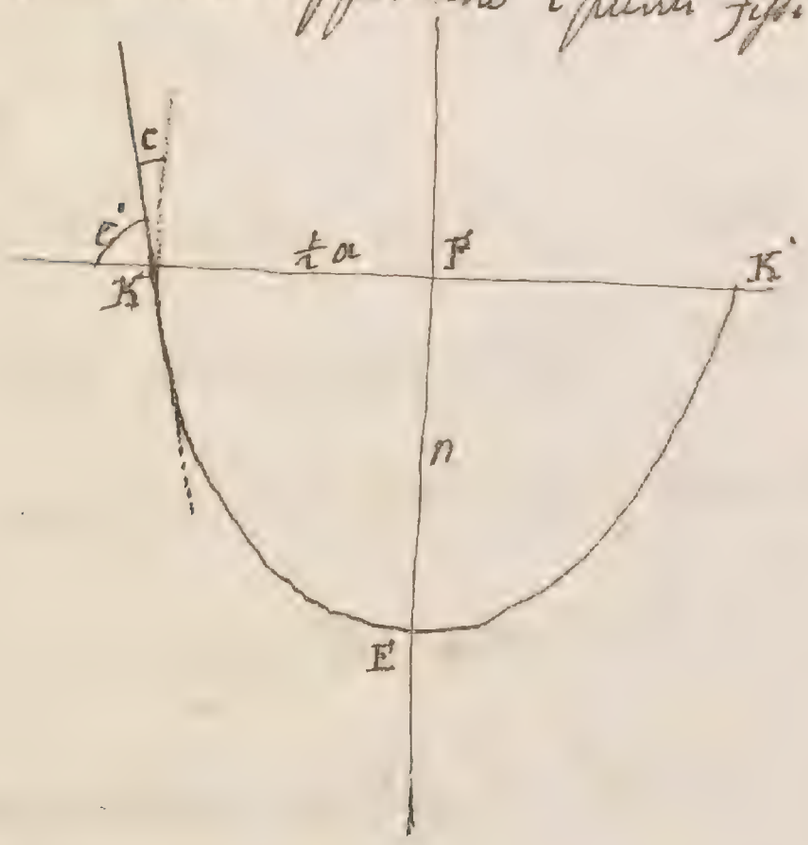
Sostituendo $x=n$, $y=\frac{1}{2}a$, $s=\frac{1}{2}l$ nel 2° sistema di equazioni (pag. 254), abbiamo per risolvere la 2ª questione le equazioni $\begin{cases} \frac{1}{2}a = B \log \frac{\frac{1}{2}l + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4}l^2}}{B} \\ B+n = \sqrt{B^2 + \frac{1}{4}l^2} \end{cases}$

Dalla 1ª questa equazione si ha B, sostituendolo nella 2ª si ha n;

la 1ª equazione è facilmente risolvibile per approssimazione nel caso in cui $l-a$ è piccolissimo, e nel caso in cui $l-a$ è grandissimo, poichè nel 1° caso B è grandissimo, nel 2° B è piccolissimo.

Determinate, che avremo nel 1° caso B, l, nel 2° B, n, facile sarà la costruzione grafica della Catenaria. Converrà di più per eseguire tale costruzione servirsi della equazione $x = \frac{B}{2}\left[e^{\frac{y}{2B}} - e^{-\frac{y}{2B}}\right]$.

Per compiere la soluzione del problema meccanico restavi ancora a determinare la tensione, che sopportano i punti fissi. Quando K, K' sono alla stessa altezza, le tensioni che ci soffrono sono eguali; chiamando T la tensione in K, abbiamo $T = K\sqrt{B^2 + \frac{1}{4}l^2} = K(B+n)$, e chiamando c l'angolo di questa tensione colla verticale, abbiamo $\operatorname{tang} c = \frac{dy}{dx} = \frac{B}{\frac{1}{2}l} = \frac{2B}{l}$, avuto B, abbiamo con queste formole T, c, ma sarà meglio, che ci formiamo una formola non contenente B, e che ci dia il valore di c direttamente per i dati della questione.



Sieno a, l i dati, e formiamo il valore di c in questo caso.

Dall'equazione ~~$B = \frac{2}{l}$~~ $\operatorname{tang} c = \frac{2B}{l}$, abbiamo

$B = \frac{1}{2} l \operatorname{tang} c$, sostituendo questo valore di B nella equazione

$$\frac{1}{2}a = B \log \frac{\frac{1}{2}l + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4}l^2}}{B}$$, abbiamo.

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2} l \operatorname{tang} c \log \left\{ \cot c + \sqrt{\cancel{\frac{2}{l}\cot c} + \cot^2 c} \right\}$$

$$a = l \operatorname{tang} c \log \left\{ \frac{\cos c + 1}{\operatorname{sen} c} \right\} = l \operatorname{tang} c \log . \cot \tfrac{1}{2} c ;$$

quando l-a è molto grande, allora c è molto piccolo, e si può facilmente calcolarne il valore; quando l-a è molto piccolo, chiamando c' l'angolo della tensione coll'orizzonte, c' è anche molto piccolo, e l'equazione $a = l \cot c' \log \operatorname{tang} \cancel{\frac{1}{2}c'} (45° + \frac{1}{2}c')$ dà facilmente c'.

Calcolando nel caso in cui sono dati a, l, le quantità B, n, c trovasi

$$B = \frac{l\sqrt{2l}}{4\sqrt{3(l-a)}} \quad , n = \frac{1}{4}\sqrt{6l(l-a)} \quad , \cos c = \sqrt{\frac{6(l-a)}{l}} .$$

Lezione 57.ª

Il Caso della Catenaria parabola, in cui i pesi della Catena crescono proporzionalmente alla orizzontale y non è più nè meno difficile di quello ~~del getto~~ della Catenaria omogenea. Infatti le costanti in questo caso sono a, b, m, n, h, l, p, (p essendo il parametro della parabola) delle quali tre essendo date si hanno le altre quattro esprimendo analiticamente, che $x = n$ rende $y = m$, $s = h$

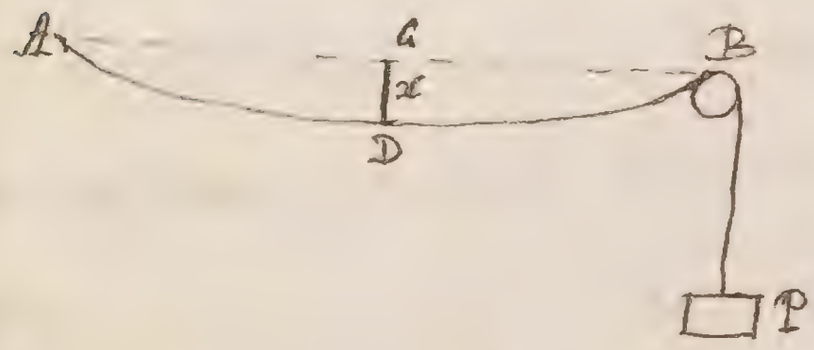
e che $x = n - b$ rende $y = a - m$, $s = b - h$,

e le equazioni, che esprimono queste condizioni sono nè più nè meno complicate di quelle, che si hanno per la catenaria omogenea.

La catenaria omogenea e la catenaria parabola si confondono sensibilmente insieme quando la saetta è molto piccola. Infatti in tal caso confondendosi sensibilmente ~~con~~ nell'equazione differenziale $sdy = Bdx$ della catenaria omogenea potendo sostituire y ad s, ~~essa~~ essa diventa allora l'equazione differenziale di una parabola $ydy = Bdx$. Potremo dunque prendere per la determinazione delle costanti nel caso, in cui la saetta è molto piccola per equazione della catenaria l'equazione della parabola, pel valore dell'arco quello della catenaria omogenea, e avremo così ~~i valori~~ i valori delle costanti con ~~una~~ approssimazione alquanto grossolana; per avere maggiore approssimazione bisognerà poi, che prendiamo le vere equazioni della catenaria omogenea, o della catenaria parabola, secondoche la catenaria da determinarsi sarà omogenea, o parabola.

Quando la saetta della catenaria omogenea è molto piccola, abbiamo detto, che si confondono sensibilmente con y, possiamo sostituire nella equazione $sdy = Bdx$ l'ordinata y all'arco s, per la stessa ragione possiamo ancora sostituire l'arco s all'ordinata y, e perciò ds a dy; facendo questa sostituzione ci risulta l'equazione differenziale $sds = Bdx$ di una cicloide. La catenaria omogenea di saetta molto piccola si può dunque riguardar anche come una cicloide.

Serviamoci di questa considerazione in un qualche esempio particolare.



È dato un filo di lunghezza $ADB = l$ di peso p, e teso in B da un peso P molto maggiore del peso p si domanda la saetta x, che sarà piccolissima, della curva d'equilibrio del filo.

Consideriamo la curva come un'arco di cicloide, la sua equazione differenziale sarà $sds = Bdx$. Da questa equazione integrando riaviamo $s^2 = 2Bx$, poichè la costante dell'integrazione è zero, dovendo ad $x=0$ corrispondere $s=0$; e facendo $s=\frac{1}{2}l$, abbiamo $\frac{1}{4}l^2 = 2Bx$, donde $l^2 = 8Bx$ e moltiplicando per K, $Kl.l = 8Ax$, ora la tensione è la risultante della tensione orizzontale A e del peso dell'arco $\frac{1}{2}l$, uguale $\frac{P}{2}$, d'altronde la tensione è $=P$, poichè AB la supponiamo orizzontale, P è dunque la risultante delle forze A, $\frac{P}{2}$, ma $\frac{P}{2}$ possiamo trascurarlo a fronte di P, possiamo dunque mettere nella equazione $Kl.l = 8Ax$, P in vece di A. Mettendo in vece di A il peso P, e invece di Kl il suo valore p in questa equazione, abbiamo $x = \frac{pl}{8P}$, x essendo la saetta della curva, questa formola serve a farci vedere se la saetta sia o no trascurabile.

Abbiamo trovata l'equazione, ed analizzate le proprietà della catenaria supponendo i fili perfettamente flessibili, e perfettamente inestensibili. Generalmente si trascura l'estensibilità, e la rigidezza dei fili, poichè sottili, che ordinariamente si impiegano nella costruzione sono trascurabili, siccome però vi han dei corpi estensibilissimi, e dei corpi molto rigidi importa di conoscere, come si possano introdurre nei calcoli queste proprietà dei corpi.

Per introdurre nei calcoli l'estensibilità dei fili partiamo da dati sperimentali. Chiamando lunghezza naturale di un filo la sua lunghezza quando non è teso da alcuna forza, se il filo è cilindrico, omogeneo, evidentemente

l'allungamento, che esso soffre è proporzionale alla sua lunghezza, alla forza che lo tende, se quindi denominiamo con le lettere l. P. δ la lunghezza naturale del filo, la tensione, e l'allungamento che esso soffre, darà $\delta = AlP$, essendo A una costante, la quale si determina sperimentalmente prendendo una porzione del filo di una determinata lunghezza, ~~di una determinata grossezza~~, e tendendolo con una determinata forza; Essendo l la lunghezza, P la forza, δ l'allungamento, che abbiamo trovato soffrire il filo, sarà $A = \frac{\delta}{lP}$. Determinata così la costante A pel quel filo potremo calcolare l'allungamento di una porzione qualunque l di esso filo tesa da una forza qualunque P colla formola $\delta = AlP$, ma se il filo essendo della stessa sostanza sarà più grosso, o più piccolo che il filo su cui abbiamo fatta l'esperienza questa formola non vale più per darci l'allungamento di esso filo, bisogna perciò, che introduciamo ancora la sezione del filo nel valore di δ.

Se ω sia la sezione del filo, su cui abbiam fatta l'esperienza, Ω sia la sezione del filo, di cui cerchiamo l'allungamento, è evidente, che essendo Δ l'allungamento di questo sotto la medesima tensione, δ l'allungamento del 1°, sarà $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\omega}{\Omega}$, ossia gli allungamenti sono inversamente proporzionali alle sezioni, dunque $\Delta = \frac{\omega}{\Omega}\delta = \frac{\omega}{\Omega} AlP$, e facendo $\omega A = \alpha$, poichè ω sezione del filo su cui abbiamo esperimentato è una costante, $\Delta = \alpha \frac{lP}{\Omega}$; se in questa formola facciamo $\Omega = 1$, $l = 1$, $P = 1$, abbiamo $\Delta = \alpha$, α è dunque l'allungamento di un filo, che ha per sezione l'unità di area, per lunghezza l'unità di lunghezza, e teso dall'unità di forza. α è costante per tutti i fili della stessa natura, ma varia variando questa,

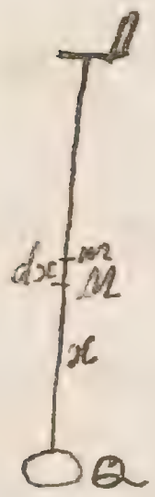
Supponiamo, che si sia costrutta una tavola dei coefficienti λ di allungamento dei diversi fili delle diverse sostanze, e che pel ferro si trovi essere $\lambda = \frac{1}{20000}$, volendo determinare la sezione di una chiave di ferro in modo, che essa non si allunghi più di $0^{m.}{,}02$ sotto l'azione di un peso $P = 2000^{chil.}$, se la chiave debba essere lunga per es. $30^{m.}$, basterà sostituire nell'equazione $\Delta = \lambda \frac{lP}{\Omega}$, in vece di Δ, λ, l, P i loro valori, ed avremo la sezione

$$\Omega = \frac{1}{20000} \cdot \frac{30 \cdot 2000}{0.02} = \frac{3}{0.02} = 150^{\text{Unità q.i}}$$

, se il ~~quadrato~~ quadrato sia l'unità di area; facendo costruire una chiave di sezione quattro volte maggiore di quella, che abbiamo trovata colla formola, saremo certi, che essa non si allungherà più di $0^{m.}{,}02$.

Facile sarebbe la costruzione di una tavola dei coefficienti di allungamento λ per le varie lontanze dei fili.

Se la tensione del filo varia da un punto all'altro del filo, la formola trovata non serve più a darci l'allungamento del filo.



In questo caso la tensione, riferendo il filo ad un sistema di assi ortogonali, sarà funzione delle coordinate dei diversi punti del filo; questa funzione essendo conosciuta, colla formola cognita di avrà l'allungamento di un'elemento del filo, ed integrando fra i limiti del filo s'avrà di questo allungamento, di avrà l'allungamento totale. Facciamo un'esempio.

Debba trovarsi l'allungamento di un filo sospeso ad un punto fisso per uno dei suoi capi, e portante all'altro capo un peso Q. Sia l la lunghezza naturale del filo, che supponga omogeneo e cilindrico, sia p il suo peso;

Considero un' elemento Mm, lacui lunghezza naturale chiamo dx, chiamo x la lunghezza naturale della porzione M2 di filo, l'elemento Mm sarà tirato dal peso Q, e dal peso della porzione x di filo, ora questo peso è $\frac{px}{l}$. la forza tendente l'elemento è dunque $Q+\frac{px}{l}$. Ciò posto, essendo Ω la sezione del filo, ~~sarà~~ e d.Δ l'allungamento dell' elemento Mm, abbiamo

$$d.\Delta = \alpha\left(Q+\frac{px}{l}\right)\frac{dx}{\Omega}\,;$$ integrando questa espressione tra i limiti 0,l abbiamo d'allungamento totale del filo

$$\Delta = \frac{\alpha}{\Omega}\left[Ql+\frac{pl}{2}\right] = \frac{\alpha}{\Omega}\cdot\frac{2Q+p}{2}\cdot l\,.\quad \text{Se } Q=0,\ \Delta=\frac{\alpha}{\Omega}\cdot\frac{pl}{2}.$$

Lezione 56.ª

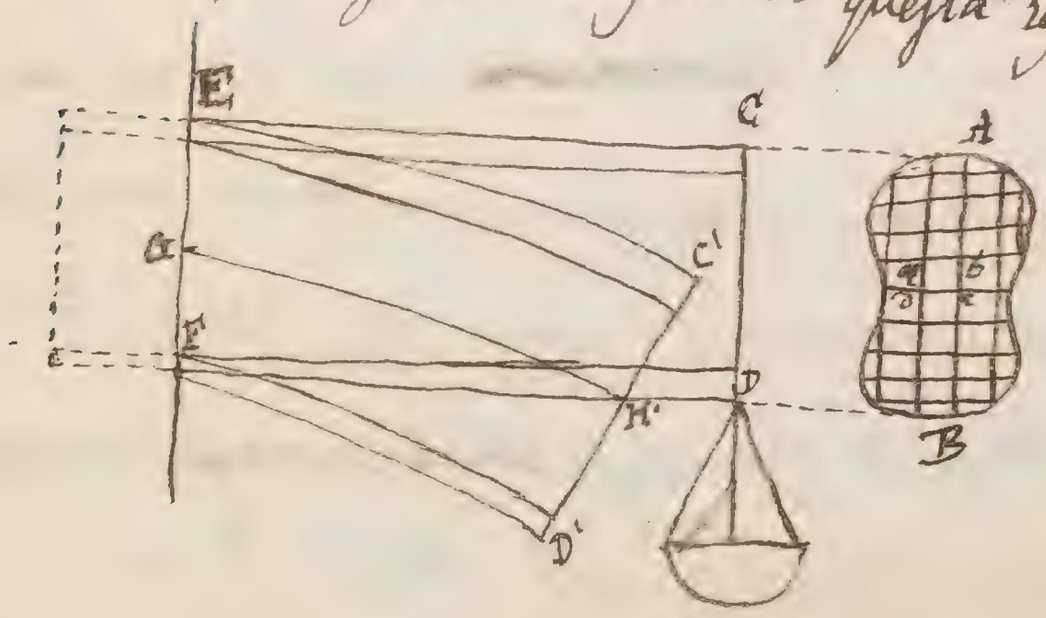
Applichiamo ciò che si è detto degli allungamenti dei fili estensibili alla ricerca della equazione della curva d'equilibrio di una catena omogenea, ed estensibile.

Sia s la lunghezza naturale di un' arco di catenaria omogenea, ds la lunghezza naturale di un'elemento di quest'arco, ω la sezione del filo, e sieno s', ds' le lunghezze e ~~dell'arco~~ dell'arco, ~~e del~~ suo elemento ds per l'estensibilità del filo; sieno y', x' le coordinate della catenaria che ricerchiamo riferita a due assi uno verticale, l'altro orizzontale condotti pel suo punto più basso, la equazione di tal Catenaria sarà $\frac{dy'}{dx'}=\frac{A}{\Pi}$, A essendo la componente orizzontale, la quale è costante, Π essendo il peso dell'arco s', ora il peso dell'arco s' è lo stesso, che quello dell'arco s, dunque $\Pi = K\omega s$, e $\frac{dy'}{dx'}=\frac{A}{K\omega s}$.

Ciò posto l'allungamento di ds essendo $\frac{\alpha}{\omega} T . ds$, abbiamo $ds' = ds\left(1 + \frac{\alpha}{\omega} T\right)$, e facendo $\frac{\alpha}{\omega} = \beta$, poichè ω è costante per tutti i punti del filo, $ds' = ds(1+\beta T)$; inoltre T ~~$= \sqrt{X^2+Y^2}$~~ ~~$= X$~~ ~~componente~~ ~~orizzontale della tensione~~ rimanendo la stessa anche dopo l'allungamento abbiamo $T = A\frac{dx'}{dy'}$; questo valore di T sostituito nel valore di ds', ~~diviene~~ diviene $ds' = ds\left(1 + \beta A \frac{dx'}{dy'}\right)$; eliminando x tra questa equazione, e l'equazione $\frac{dy'}{dx} = \frac{A}{Ms}$, avremo l'equazione della curva, che vogliamo; per far questa eliminazione differenziamo quest'ultima equazione, ed il valore di ds che ottenimmo $ds = \frac{A}{K} d.\frac{dx}{dy'}$ sostituiamolo nell'altra, avremo $ds' = \frac{A}{K}\left(1+\beta A \frac{dx'}{dy'}\right) d.\frac{dx}{dy'}$, e questa sarà l'equazione differenziale della curva d'equilibrio di un filo pesante, omogeneo, ed estensibile attaccato per le sue estremità a due punti fissi. Generalmente questa equazione non si può integrare, ma quando β è piccolissima l'integrazione si fa.

Veniamo ora conto della rigidezza dei fili.

Ogni solido oppone una resistenza al piegamento, esaminiamo come esista questa resistenza, un tal esame ci condurrà alla conoscenza della differenza di intensità di questa resistenza nei diversi solidi.



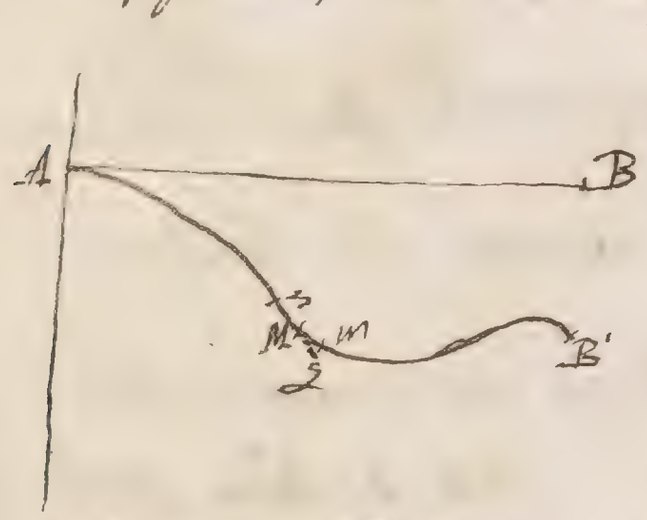
Sia il solido cilindrico e sia AB la sua sezione, esso può considerare formato dalla riunione di fibre dirette nel senso della sua lunghezza, ed aventi sezioni piccolissime ab c d.

è facile il comprendere, che se noi in qualunque modo lo inflettiamo facendogli prendere la forma EG'D'F, le fibre più atte come EG' si allungheranno, mentre le fibre più basse si accorceranno, e che quanto più andremo dall'alto verso il basso troveremo fibre meno allungate, quanto più dal basso andremo all'alto troveremo fibre meno accorciate, e che perciò ci darà tra le fibre più basse, e le più alte una fibra che non ci darà allungata nè accorciata, questa fibra invariabile è detta fibra media.

Ogni corpo oppone tanto maggior resistenza al piegamento quanto più è elastico, e la forza che ci vuole per inflettere dipende dalla sezione, ossia dal numero delle fibre, dalla forma della sezione, dalla lunghezza del corpo, e dalla curvatura che vorremo dargli, ossia dal raggio di curvatura della curva secondo cui vogliamo piegare le sue fibre.

Infatti l'osservazione ci dice che se il numero delle fibre è maggiore la forza inflettitrice deve essere maggiore, e deve essere tanto più grande, quanto più distanti saranno le fibre dalla fibra, a cui essa è applicata, poichè le fibre più lontane oppongono maggior resistenza, ora la maggiore o minore lontananza delle fibre dalla fibra a cui è applicata la forza inflettente dipende dalla forma della sezione; inoltre la forza è tanto maggiore quanto più corto è il solido, e quanto minore è il raggio di curvatura delle fibre piegate.

Ciò posto Consideriamo di un solido la sola fibra media, la quale non cangia di lunghezza per l'inflessione, sia AB la posizione naturale di questa, sia AB' la curva secondo cui fu inflessa da una certa forza, o da un certo numero di forze, se tutto ad un tratto questa diventa rigida fuorchè in un punto M, ~~[illegible]~~ il tratto Mm per la forza d'elasticità, che esiste in tutti i corpi, AB' tenderebbe a ritornare alla sua prima forma, e non potendo ciò avvenire per la rigidezza che in essa supponiamo, l'azione della forza di elasticità farà girare la parte di fibra MB' attorno ad M fino anche il tratto Mm venga a disporsi sul prolungamento Mg del tratto MN.



La forza d'elasticità producendo moto di rotazione ha un momento, che fu detto momento elastico.

Il momento elastico è direttamente proporzionale all'angolo di contingenza in M g, ed inversamente proporzionale al raggio di curvatura in M.

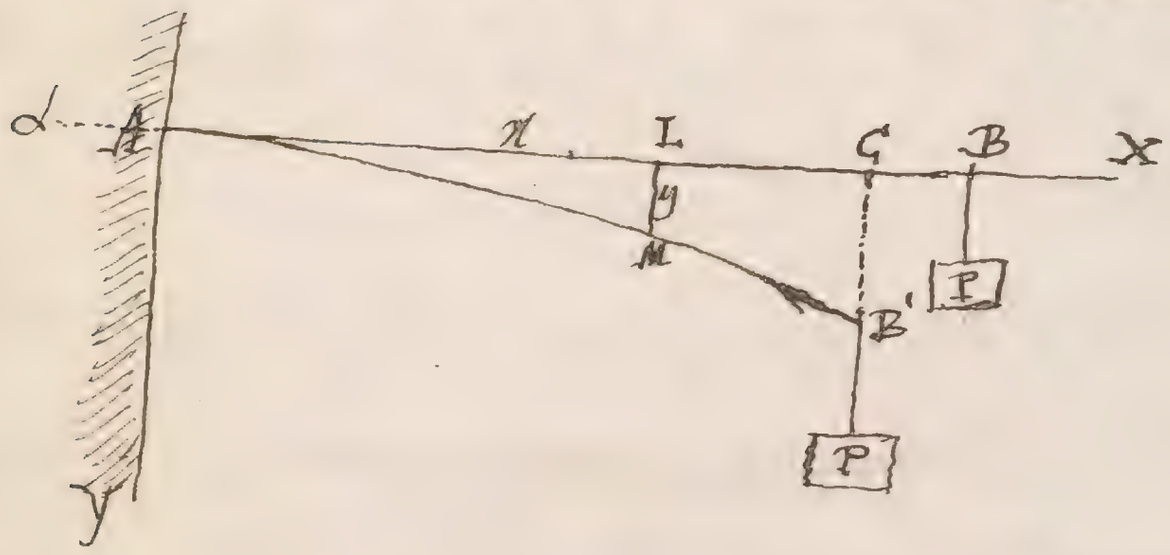
Se ora la curva AMB supponiamo tutta flessibile, come è realmente, vediamo facilmente, che in ciascun punto vi avrà un momento elastico inversamente proporzionale al raggio di curvatura in quel punto, poichè in ogni punto M l'azione della elasticità è di far rotare il tratto M m, e di condurlo sul prolungamento M g di n M.

Essendo E una costante dipendente dalla sostanza della verga elastica, e dalla sua forma, essendo il raggio di curvatura, il momento elastico sarà esprimibile colla formula $\frac{E}{\rho}$. Esprimendo, che la forza d'elasticità, e le forze applicate alla verga si fanno equilibrio, si hanno le condizioni d'equilibrio d'una verga elastica sollecitata comunque da forze.

Noi per ora faremo soltanto delle ipotesi particolari:

La curva d'equilibrio di una verga elastica sollecitata da forze vien detta curva elastica.

Sia la verga rappresentata dalla retta AB nella sua posizione naturale, e



essa la incastriamo per una parte Ad in un muro, ed alla estremità B le attacchiamo un peso P, essa si infletterà secondo una curva AB', supposta la verga senza peso si domanda l'equazione della curva elastica AMB'.

Riferiamo la curva cogli assi AX, AY, sieno x, y le coordinate di un punto M di essa, sieno $\begin{matrix} AC = a \\ B'C = b \end{matrix}$ le coordinate dell'estremo B', il momento

di P rispetto al punto M sarà $P.L.G = P(a-x)$, e perchè la verga rimanga nella posizione AMB' bisognerà che esso sia eguale al momento elastico nel punto M. Eguagliando questi due momenti abbiamo l'equazione differenziale della curva AMB', la quale è $\frac{E'}{\rho} = P(a-x)$; esprimendo le condizioni che $x=0$ rende $y=0, \frac{dy}{dx}=0$ abbiamo delle equazioni per determinare le due costanti arbitrarie, che risultano dalla integrazione.

I casi, che di più ci importa di conoscere, di questa curva sono quelli in cui la inflessione è piccolissima, ora abbiamo il vantaggio, che appunto in questi casi l'integrazione, che generalmente è impossibile, diventa possibile, e facile ad eseguire.

Infatti in questi casi l'elastica confondendosi insensibilmente coll'arco, nel valore di ρ eguagliando si prende s per variabile indipendente, $\rho = \frac{ds\, d^2x}{d^2y}$, e poniamo sostituendo dx a ds, e l'equazione differenziale diventa $P(a-x) = E\frac{d^2y}{dx^2}$; integrando, determinando le costanti arbitrarie, come si è detto, abbiamo successivamente

$$E\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}P(2ax-x^2), \quad Ey = \frac{1}{2}P\left(\frac{2ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{6}P(3ax^2 - x^3).$$

Osservando che $x=a$ deve rendere $y=b$ abbiamo la saetta $b = \frac{1}{3E}Pa^3$, dunque la saetta piccolissima della curva AMB' è proporzionale al peso inflettente, ed ~~alla~~ pure al cubo della proiezione orizzontale della curva, ed è inversamente proporzionale al coefficiente del momento elastico.

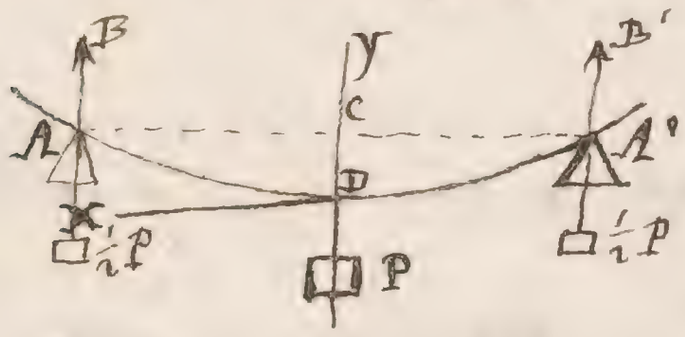
Se vogliamo una approssimazione grossolana, chiamando l la lunghezza della verga, possiamo dire, che $b = \frac{1}{3E}Pl^3$, ma se vogliamo molta approssimazione bisogna che formiamo il valore di s per x, ~~espresso s per y~~ e che esprimiamo, che ad $x=a$ deve corrispondere $s=l$, potremo così avere a per l, e quindi b per l; ora $\frac{dy}{dx}$ essendo quantità molto piccola nella nostra ipotesi, possiamo trascurare per es. la 4ª potenza nello sviluppo di $ds = dx\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, ed avremo così

sione $ds = dx\left(1+\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\right) = dx\left[1+\frac{1}{2}\frac{P^2}{4E^2}(2ax-x^2)^2\right]$, che sarà facilmente integrata, e cioè da $s = x+\frac{P^2}{120E^2}\left[20a^2x^3-15ax^4+3x^5\right]$, poichè $x=0$ deve rendere $s=0$; sostituendo in a ad x, abbiamo l'equazione

$$l = a+\frac{P^2}{120E^2}\left[8a^5\right] = \frac{15aE^2+P^2a^5}{15E^2},$$ da cui quando P sarà dato si l si avrà facilmente a, e quindi b; sarà però meglio di cercare una equazione, che dia immediatamente b per l, eliminando a tra l'equazione, che da l per a, e quella che da b per a.

Lezione 29ª

Facciamo un'altra ipotesi. Sia una verga elastica senza peso appoggiata



ai due punti fissi A, A', caricata nel suo punto di mezzo D di un peso P, domandasi l'equazione della curva d'equilibrio ADA', secondo cui si disporrà la verga.

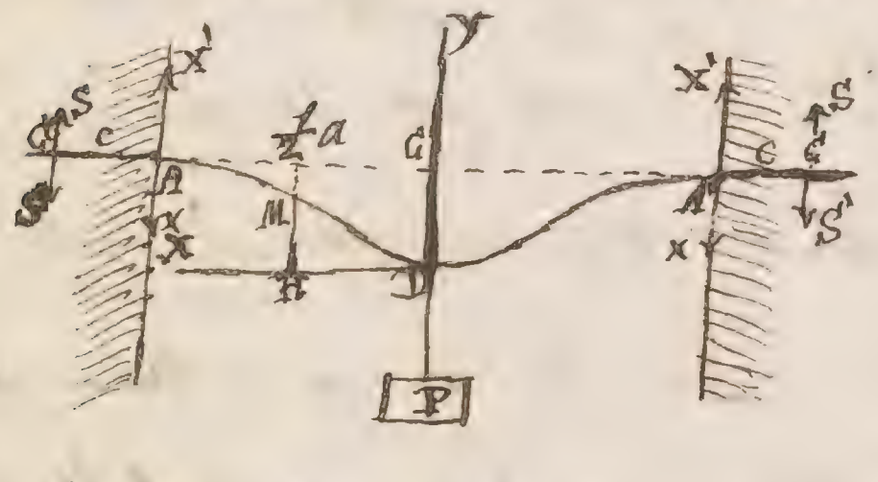
Il peso P potendosi scomporre in due forze eguali applicate una in A, l'altra in A', ed eguali $\frac{1}{2}P$, ~~ne deg~~ ed i punti fissi dovendo per l'equilibrio resistere all'azione di queste due forze, ne segue, che questi oppongono due resistenze $AB = A'B' = \frac{1}{2}P$ e dirette in senso contrario a DP, e che però possiamo togliere i punti fissi, senza che venga turbato l'equilibrio, purchè applichiamo in A, A' due forze $AB = A'B' = \frac{1}{2}P$. Inoltre se l'equilibrio sussiste quando a D è applicato un peso P, a fortiori sussisterà, se rendiamo fisso il punto D, ma nel punto D la tangente alla curva è orizzontale, e la curva è simmetrica rispetto alla verticale DY, la curva è dunque la stessa, che la curva AMB' del problema

antecedente, se giogita la intendiamo volta colla convessità verso l'orizzonte, e la sua equazione riferita agli assi DY. DX sarà cangiando P in $\frac{1}{2}$P, a $\frac{1}{2}$AA'; facendo AA' = a, CD = b, essa è dunque $Ey = \frac{1}{24} P(3ax^2 - 2x^3)$, e $b = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{3E} a^3$.

Quindi si vede, che una trave caricata nel mezzo ed ~~applicata~~ appoggiata per le sue estremità contro due muri si piega sedici volte meno, che una trave delle stesse dimensioni e figura confitta in un muro per una estremità, e caricata dello stesso peso della prima all'altra estremità.

dell'~~espressione~~ $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{4E}(ax - x^2)$, mettendo $\frac{1}{2}a$ in vece di x, avremo la tangente trigonometrica dell'angolo, che la tangente alla curva nell'estremità A fa coll'orizzonte, $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{16E} a^2$.

Facciamo un'altro caso. Sia la verga non più semplicemente appoggiata ad due punti fissi, ma incastrata in A, A' in due muri in modo, che le tangenti alla curva in A, A' sieno di nessità orizzontali, e sia sempre la verga caricata nel suo punto di mezzo D di un peso P, la figura d'equilibrio della verga non sarà più la stessa; essa sarà però ancora simmetrica rispetto alla verticale DY, e la tangente in D sarà ancora orizzontale.



Inoltre se il peso lo scompongo in quattro forze, due X'.X' eguali, applicate in A, A', e dirette in senso contrario a P, due S'.S' eguali, applicate alle distanze eguali C, C dei A, A' dirette nel senso di P, posso supporre tutti i muri, quando li sostituisca le forze X. X. S. S, eguali ed opposte alle X. delle coordinate, e riferire la curva agli assi DX. DY; esprimendo che le forze X. S fanno equilibrio alla forza d'elasticità avremo l'equazione della curva d'equilibrio AMI

ora se ρ sia il raggio di curvatura di un punto M, $\frac{E}{\rho}$ sarà il momento della elasticità, e se x, y sieno le coordinate del punto M, $X(\frac{1}{2}a-x)$, $-S(c+\frac{1}{2}a-x)$ saranno i momenti delle forze X, S rispetto al punto M, e la condizione d'equilibrio della verga sarà

$$\frac{E}{\rho} = X(\tfrac{1}{2}a-x) - S(c+\tfrac{1}{2}a-x) = (X-S)(\tfrac{1}{2}a-x) - Sc = \tfrac{1}{2}P(\tfrac{1}{2}a-x) - Sc,$$

osservando che $X-S=\frac{1}{2}P$; questa è la equazione differenziale della curva AMD, essendo essa di 2° ordine, integrandola troveremo due costanti arbitrarie, per determinarle bisognerà esprimere, che $x=o$ rende $y=o$, $\frac{dy}{dx}=o$; Se in questa equazione è anche una indeterminata, esprimendo che $x=\frac{1}{2}a$ rende $\frac{dy}{dx}=o$ resta determinata anche questa.

Generalmente l'equazione non è integrabile, nel caso soltanto, in cui la saetta CD è molto piccola, ossia è piccola l'inflessione della verga, riesce facile l'integrazione.

Infatti allora dx si confonde sensibilmente con ds, e $\rho = \frac{dx^2}{d^2y}$.

$E\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}P(\frac{1}{2}a-x) - Sc$; integrando abbiamo

$$E\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}P(ax-x^2) - Scx + Cost$$

poichè per $x=o$, $\frac{dy}{dx}=o$, e per $x=\frac{1}{2}a$, $\frac{dy}{dx}=o$, abbiamo $Cost=o$, $Sc=\frac{1}{8}Pa$, e per conseguenza $E\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}Pax - \frac{1}{4}Px^2 - \frac{1}{8}Pax = \frac{1}{8}P(ax-2x^2)$;

integrando di nuovo, ed osservando che $x=o$ deve rendere $y=o$, abbiamo l'equazione della curva $Ey = \frac{1}{8}P(a\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}) = \frac{1}{48}P(3ax^2-4x^3)$.

Mettendo in questa equazione invece di x $\frac{1}{2}a$ abbiamo la saetta

$$CD = b = \frac{P}{48E}\left(\frac{3a^3}{4} - \frac{4a^3}{8}\right) = \frac{1}{48}\cdot\frac{Pa^3}{4E} = \frac{1}{64}\cdot\frac{P}{3E}a^3.$$

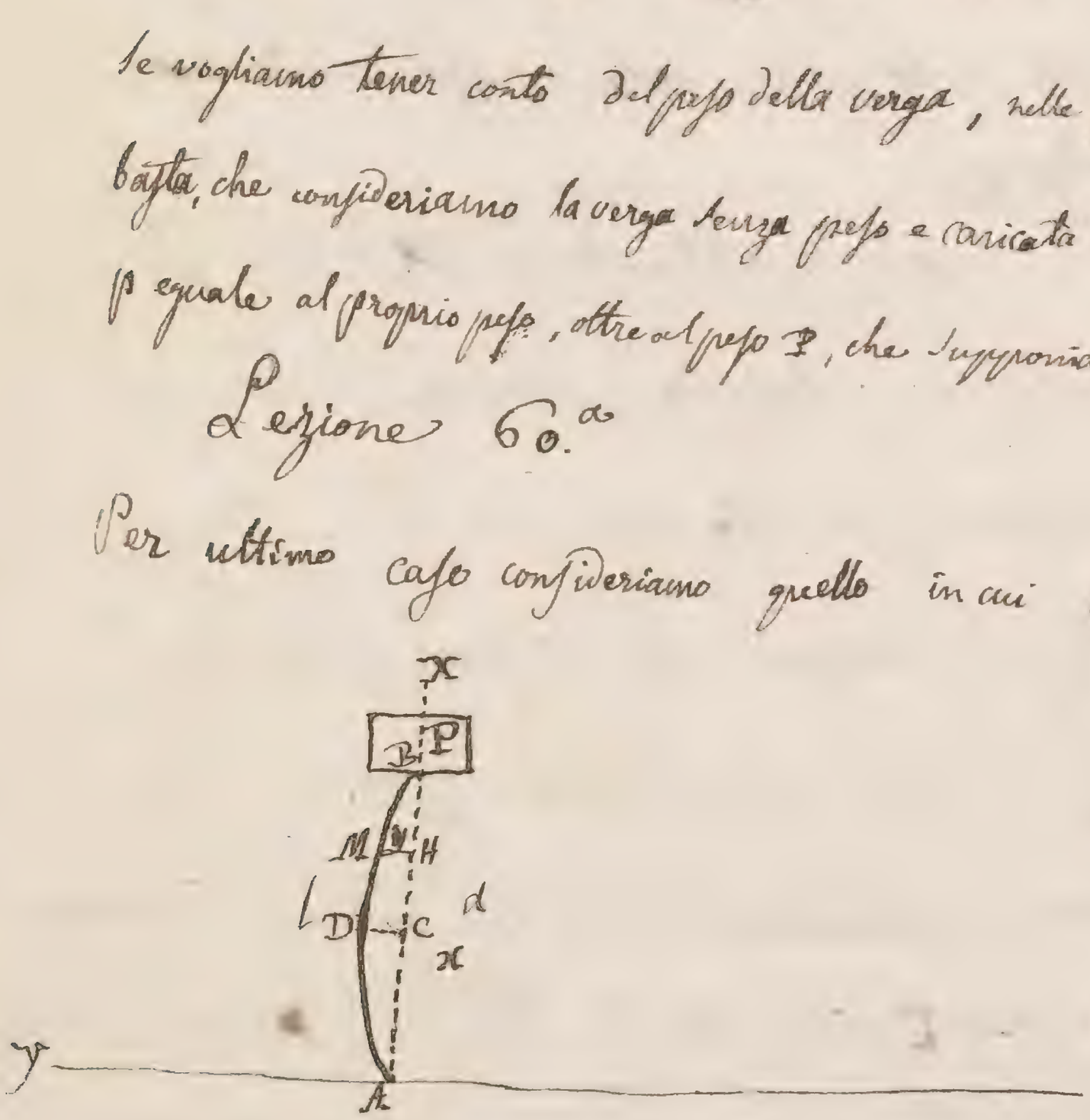
Dunque se prendiamo tre travi della stessa dimensioni, e della stessa forza
eduna la piantiamo in un muro per una estremità, attaccandovi all'altra
-mità un peso P, l'altra la appoggiamo a due muri, e la carichiamo nel suo
di mezzo del peso P, e la terza finalmente la incastriamo per i suoi due capi in
due muri caricandola nel suo punto di mezzo del peso P, le saette d'inflessioni
tre travi ~~stanno~~ staranno tra loro :: 64:16:1.

ed all'ultima curva, che abbiamo analizzata, ci ha un punto di inflessione tra A
per avere l'ascissa di questo punto, eguagliamo a zero il $\frac{d^2y}{dx^2}$, l'equazione
$\frac{1}{4}P(a-2x)-\frac{1}{6}Pa=0$, ci da subito $x=\frac{1}{4}a$; per avere la tangente alla
curva nel punto d'inflessione, facciamo $x=\frac{1}{4}a$ nel valore di $\frac{dy}{dx}$, avremo pel
punto d'inflessione $\frac{dy}{dx}=\frac{P}{6E}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{2a^2}{16}\right)=\frac{P}{64E}a^2$.

se vogliamo tener conto del peso della verga, nelle ipotesi che finora abbiamo fatte
basta, che consideriamo la verga senza peso e caricata nel suo centro di gravità di un peso
P eguale al proprio peso, oltre al peso P, che supponiamo essa porti.

Lezione 60.a

Per ultimo caso consideriamo quello in cui la verga appoggiata ad un piano
orizzontale Ay viene
inarcata per l'azion
di un peso P, di cui è c
-ricata nella sua est
-mità B, ed il cui centro
gravità si trova sul



verticale, che passa pel punto d'appoggio A.

Essendo $MH=y$, $AH=x$, evidentemente l'equazione della curva BMA sarà $\frac{E}{\rho}=Py$, quest'equazione è facilmente integrabile, giacendo la saetta CD o ventre massimo della curva è molto piccolo; infatti allora si può scambiare ds per dx, ed il valore di ρ prendendo x per variabile indipendente diventa $\rho=\frac{-dx^2}{d^2y}$, il qual valore sostituito nell'equazione, abbiamo $E\frac{d^2y}{dx^2}=-Py$, donde integrando $y=K\operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{E}}\,x+h\cos\sqrt{\frac{P}{E}}\,x$, rappresentando con K, h le costanti dell'integrazione.

Le costanti K, h si determinano osservando, che ad $x=0$, e ad $x=AB=a$ deve corrispondere $y=0$, e rigetta $h=0$, $K\operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{E}}\,a=0$, in quest'ultima equazione a corda dell'arco BMA è indeterminata, e si determina osservando che ad $x=a$ deve corrispondere $A.MB=s=l$; per esprimer ciò facciamo avvertire, che K non può esser zero, poichè altrimenti l'equazione della curva si ridurrebbe ad $y=0$, e la curva si ridurrebbe alla retta AV, ciò, che è contro la nostra ipotesi, e che però l'equazione $K\operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{E}}\,a=0$, non può essere soddisfatta, che per $\operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{E}}\,a=0$, e facendo per brevità $\sqrt{\frac{P}{E}}=p$ diremo, che deve essere $\operatorname{sen}pa=0$; questa equazione è soddisfatta semprechè sarà $pa=i\pi$, essendo i un numero intero; inoltre K non essendo nullo, l'equazione della curva sarà $y=K\operatorname{sen}px$, la quale ci dice, che K è il massimo valore che possa acquistare y, K dunque altro che è la saetta di inflessione, ossia il ventre massimo della verga inflessa; nel punto corrispondente a questo valore di y la tangente essendo verticale, se formiamo il $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}=pK\cos px$, dovremo avere per $y=K$, $\frac{dy}{dx}=0$, ora perchè ciò sia bisogna, che sia $\cos px=0$; ossia $px=\frac{i\pi}{2}$, i essendo un numero intero ed impari, a questa equazione aggiungendo l'altra $pa=i\pi$

risulta $x = \frac{a}{2}$, il ventre massimo della verga è dunque alla metà della corda AB.

Ciò premesso formiamo il valore di s; nell'ipotesi della saetta molto piccola $\frac{dy}{dx}$ essendo quan-
assai piccola
abbiamo $ds = dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = dx\left(1+\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\right) = dx\left(1+\frac{1}{2}p^2K^2\cos^2 px\right)$, e quindi

$$l = \int_0^a dx\left(1+\frac{1}{2}p^2K^2\cos^2 px\right) = a+\frac{1}{2}p^2K^2\int_0^a \cos^2 px\,dx ,$$

$$\int_0^a \cos^2 px\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a dx\,(1+\cos 2px) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4p}\left(\operatorname{Sen} 2pa\right) = \frac{1}{2}a$$

$$l = a\left(1+\frac{p^2K^2}{4}\right) = \frac{i\pi}{p}\left(1+\frac{p^2K^2}{4}\right)$$ da questa equazione in cui abbiamo intro-
to i in vece di a, ricaviamo $K^2 = \frac{4}{p^2}\left(\frac{lp}{i\pi}-1\right)$, alla qual equazione aggiungen-
do l'altra $a = \frac{i\pi}{p}$ si comprende, che havvi ancora una costante indeterminata, la quale è i, e che non ci hanno più condizio-
che servano a determinarla. Questa indeterminazione proviene dall'averci sup-
posta la saetta di inflessione piccolissima, poichè affinchè questa ipotesi si verifichi non
possiamo prenderci ad arbitrio il peso inflettente P, ora l'indeterminazione di P corrisponde
poco quella di i.

i non è determinata, non però tutti i valori dati ad essa soddisfanno al problema,
come non tutti i pesi P possono inflettere poco la verga, cerchiamo pertanto quali
sieno i limiti dei valori di i.

Se $\frac{lp}{i\pi} < 1$, K^2 è negativo, e K è immaginario, non può dunque essere $\frac{lp}{i\pi} < 1$;
ora da una tal disuguaglianza ricaviamo $P < \frac{i^2\pi^2E}{l^2}$, dunque la curva diventerà adun-
immaginaria sempreché sarà $P < \frac{i^2\pi^2E}{l^2}$, o meglio sempreché sarà $P < \frac{\pi^2E}{l^2}$,
giacchè il minimo valore di i è $i = 1$. A questo fatto analitico non sfuggiamo dare

altra interpretazione meccanica, che quella di dire, che la laytra, o verga non si inflette per l'azione di pesi minori di $\frac{\pi^2 E}{l^2}$.

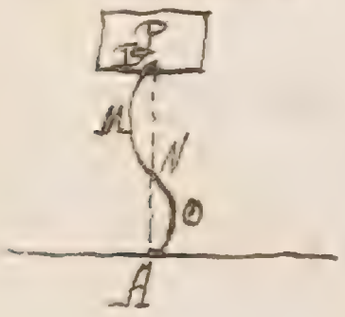
Se $P = \frac{\pi^2 E}{l^2}$, allora $K = o$, ~~la curva~~ l'equazione della curva si cangia in quella di AX, e la verga non si inflette ancora.

Ma se $P > \frac{\pi^2 E}{l^2}$, se per es. $\rho = \sqrt{\frac{P}{E}} = \frac{\pi}{l}(1+\xi^2)$, allora

$K^2 = \frac{4}{\rho^2}\left(1+\xi^2-1\right) = \frac{4l^2}{\pi^2}\cdot\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$, e $K = \frac{2l\xi}{\pi(1+\xi^2)}$; mettendo questi valori di ρ e di K nell'equazione della curva, essa diventa

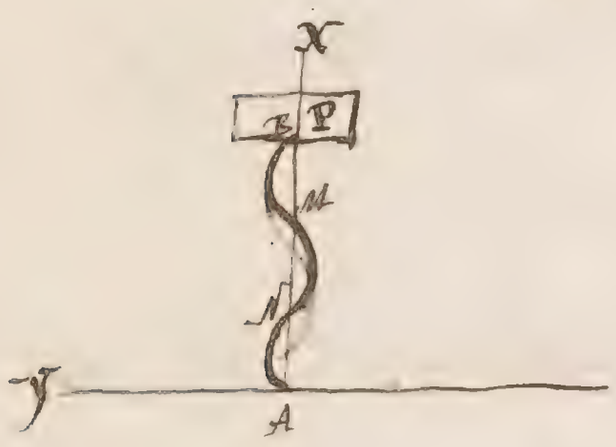
$y = \frac{2l\xi}{\pi(1+\xi^2)} \operatorname{sen} \frac{\pi(1+\xi^2)}{l} x$. In questa equazione ξ bisogna, che lo prendiamo piccolo, se vogliamo che K sia piccola. Ingrossando ξ arriveremo sino a $\xi = 1$, allora $\rho = \frac{2\pi}{l}$, ora abbiamo anche $\rho = \frac{2\pi}{l}$ se facciamo $i = 2$. $\xi = 0$; così facendo abbiamo $K = 0$, ciò, che ci dice, che la verga in tal caso non si inflette.

Per darci una ragione di questo fatto in apparenza stravagante facciamo crescere di poco ρ facendo $\rho = \frac{2\pi}{l}(1+\xi^2)$, avremo allora $K = \frac{2l\xi}{\pi(1+\xi^2)}$, la quale sarà di nuovo piccola; avremo pure $a = \frac{l}{1+\xi^2}$, e l'equazione della curva sarà $y = \frac{2a\xi}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}$. In questa facendo $x = \frac{1}{1}a$, troviamo $y = o$, la curva taglia dunque la verticale AX, e prende la forma BMNOA.



Questo risultato ci dice, che se vogliamo, che la saetta di inflessione sia piccola, essendo ρ [redacted] poco maggiore di $\frac{2\pi}{l}$, bisogna, che diamo una spinta alla verga obbligandola a tagliare la verticale BA, e che dandole

una tal spinta, quando $p=\frac{2\pi}{l}$, la verga si rimette verticale, se però la spinta non sarà talmente forte da farla inurvare a destra della verticale, come prima era inurvata a sinistra. A questo proposito fa d'uopo che osserviamo, anche, che la verga non si inflette, se qualche istantanea causa oltre il peso P non concorre a farla muovere dalla sua posizione verticale; non havvi infatti ragione alcuna per cui la verga sotto l'azione del peso P debba inflettersi piuttosto da una parte, che dall'altra della verticale. Se nel valore di p $p=\frac{2\pi}{l}(1+\xi^2)$ facciamo crescere ξ^2 arriveremo sino a $\xi^2=\frac{1}{2}$, allora $p=\frac{3\pi}{l}$, ma questo valore di p l'abbiamo anche facendo $i=3$, $\xi=0$, inoltre così facendo abbiamo anche $K=0$, conchiudiamo perciò come nel caso di $i=2$, che, se p è un poco maggiore di $\frac{3\pi}{l}$, possiamo fare, che la saetta di inflessione della verga sia piccola, purchè obblighiamo questa a tagliare in due punti la verticale AB, i quali corrisponderanno ad $x=\frac{1}{3}a$, $x=\frac{2}{3}a$, e che non possiamo fare, che, quando $p=\frac{3\pi}{l}$, la saetta K sia minore di $\frac{2l}{9\pi^2}$ altrimenti, che mettendola in direzione verticale.



Continuando gli stessi ragionamenti vedremo, che quando p è poco maggiore di $\frac{4\pi}{l}$ perchè la equazione $y=K\operatorname{sen}px$ sia applicabile alla curva d'inflessione della verga, bisogna che obblighiamo questa a tagliare la verticale AB in 3 punti; che quando p è poco maggiore di $\frac{5\pi}{l}$ per rendere l'equazione $y=K\operatorname{sen}px$ applicabile, bisogna obbligare la verga a tagliare in 4 punti la verticale AB, ... e in generale, che, quando p è poco maggiore di $\frac{i\pi}{l}$, ossia P è poco maggiore di $\frac{i^2\pi^2E}{l^2}$, per rendere l'equazione $y=K\operatorname{sen}px$ applicabile alla curva d'inflessione della verga, bisogna obbligare la verga a tagliare in $(i-1)$ punti la verticale AB.

BACCIARELLO ING. MICHELE
Grande Ufficiale Corona Italia
Commendatore SS. M. e L.
CAPO COMPARTIMENTO 1° Cl.
FERROVIE STATO

Lezione 1.ª

Il Problema generale della Dinamica è, Dato un sistema di corpi rigido o flessibile, a cui si è applicato un numero qualunque di forze, di cui si conoscono le direzioni e le velocità iniziali, determinare al fin di un tempo t le coordinate di tutti i punti del sistema mobile in funzione del tempo stesso t. Noi, procedendo come abbiam fatto nella Statica, arriveremo alla soluzione di questo problema generale dopo esser passati per i casi i più semplici di questo problema.

Il caso il più semplice è quello, in cui il sistema mobile non è che un punto materiale, e il punto si muove per l'azione di forze acceleratrici, che hanno cessato di agire da di sotto, conservando la velocità, che gli hanno impressa, per legge d'inerzia.

In tal caso il punto si muove percorrendo una retta, e descrivendo spazii proporzionali ai tempi; un tal moto dicesi moto eguabile e rettilineo.

Sia OB ~~il punto~~ la direzione del mobile, sia O il punto, da cui contiamo gli spazii, che esso descrive, ossia l'origine degli spazii, sia A il punto da cui parte il mobile al principio dei tempi, e sia questo punto determinato per la sua distanza $OA=a$ dal punto O, rappresenti c la velocità del ~~mo~~ mobile, ossia (V. Prol.ª pag. 4) lo spazio, che il mobile descrive nell'unità di tempo, dopo un tempo t sia il mobile giunto in B ad una distanza dall'origine O degli spazii $OB=x$, sarà evidentemente $x=a+ct$; questa è l'equazione del moto eguabile e rettilineo; in essa sono racchiuse tutte le leggi di un tal moto.

Dall'equazione $x=a+ct$ ricaviamo $x-a=ct$, e $c=\frac{x-a}{t}$; se ora un'altro mobile con una velocità c' si muova per un tempo t' partendo dalla distanza a' dall'origine degli spazii, alla fin del tempo t' sarà ad una distanza x' dall'origine degli spazii $x'=a'+ct'$, e sarà $c'=\frac{x'-a'}{t'}$; ora $x-a$, $x'-a'$ non sono altro, che gli spazii percorsi nei tempi t, t' dai due mobili, le formole $\begin{cases} c=\frac{x-a}{t} \\ c'=\frac{x'-a'}{t'} \end{cases}$ ci dicono dunque che nel moto equabile e rettilineo le velocità sono direttamente proporzionali agli spazii, ed inversamente proporzionali ai tempi.

Riguardo al moto equabile e rettilineo si possono presentare diversi problemi, che tutti saranno facili a risolversi col mezzo della sola equazione generale di questo moto $x-a=ct$. noi qui ne risolveremo alcuni.

Un mobile sia, che dopo un tempo θ era alla distanza h dall'origine degli spazii, e che dopo un tempo θ' era alla distanza h' dallo stesso punto, si domanda dopo qual tempo esso sia alla distanza l dall'origine degli spazii.

Sia c la velocità del mobile, che per ora supponiamo cognita, e rappresentiamo con a la distanza pure incognita del mobile all'origine degli spazii nell'origine dei tempi, sia t il tempo ricercato, per determinarlo avremo le equazioni $h-a=c\theta$, $h'-a=c\theta'$, $l-a=ct$. Dalle due prime equazioni ricaviamo $a=\frac{\theta h'-\theta' h}{\theta-\theta'}$, $c=\frac{h-h'}{\theta-\theta'}$, sostituendo questi valori nella 3ª abbiamo $t=\frac{l(\theta-\theta')-\theta h'+\theta' h}{h-h'}=\frac{\theta(l-h')-\theta'(l-h)}{h-h'}$; se per valori particolari di $\theta, \theta', l, h, h'$ si troverà t negativo bisognerà concludere, che il mobile si era già trovato alla distanza l dall'origine degli spazii prima di giungere alla distanza a datale origine.

Due mobili camminano secondo la stessa retta e nello stesso senso con velocità c, l'altro con velocità c', e partendo l'uno ~~dalla distanza~~ da un punto alla distanza a dall'origine degli spazii, l'altro da un punto alla distanza a' dalla stessa origine,

si domanda dove e dopo qual tempo i due mobili si incontreranno.

Siano x la distanza dall'origine degli spazii al punto d'incontro dei mobili, t il tempo alla fin del quale essi si incontrano,

$$\left.\begin{aligned} x-a &= ct \\ x-a' &= c't \end{aligned}\right\}$$ saranno le equazioni del problema, le quali ci danno tolto $t=\frac{a'-a}{c-c'}$, $x=\frac{ca'-ac'}{c-c'}$.

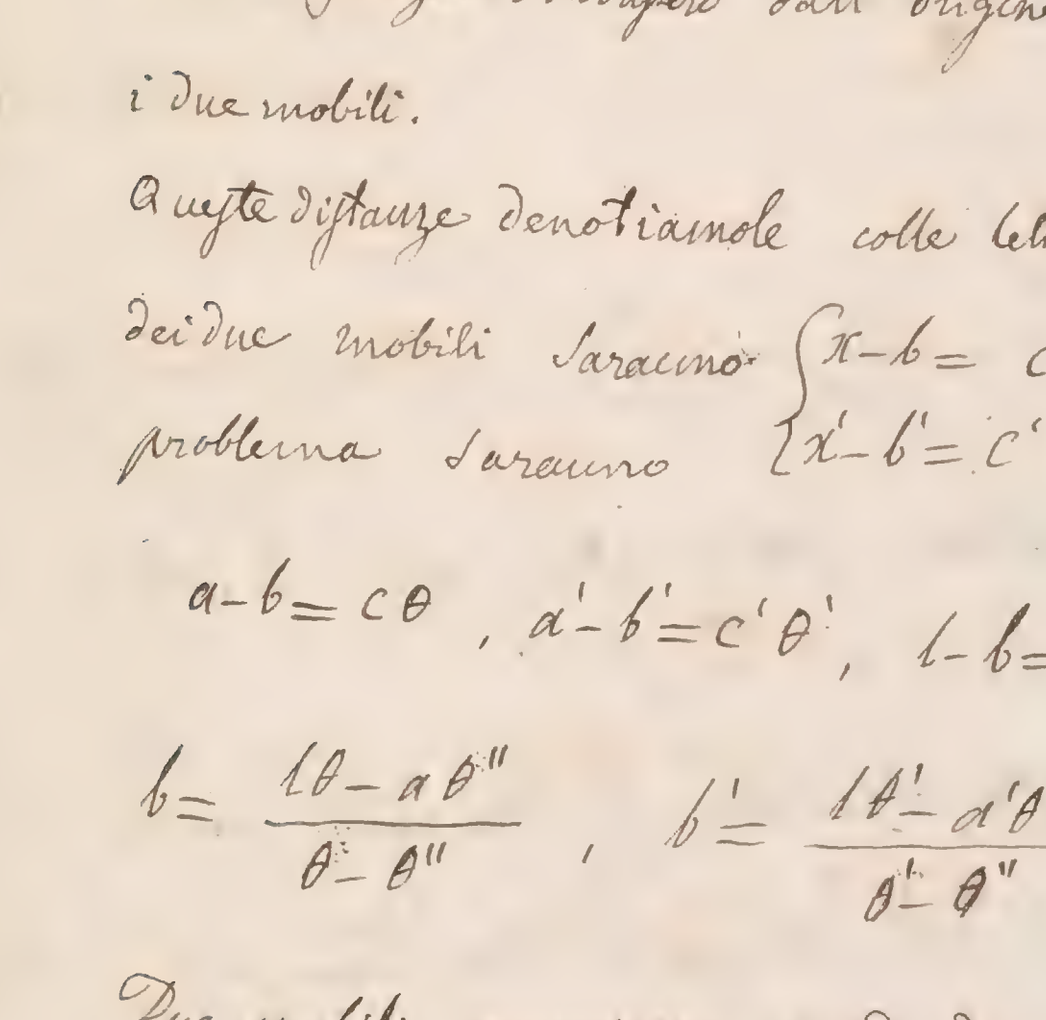
Due mobili camminando con velocità incognite c, c' nella stessa direzione si incontrano dopo un tempo θ'' alla distanza l dall'origine degli spazii, inoltre dopo l'altro tempo θ' il primo mobile era alla distanza a dall'origine degli spazii, ed il secondo mobile era alla distanza a' dalla stessa origine dopo un tempo θ, si domandano le velocità c, c' dei due mobili, ed a che distanze si trovassero dall'origine degli spazii nell'origine dei tempi i due mobili.

Queste distanze denotiamole colle lettere b, b'; le equazioni dei due moti dei due mobili saranno $\left.\begin{aligned} x-b &= ct \\ x'-b' &= c't' \end{aligned}\right\}$, epperciò le equazioni del problema saranno le quattro seguenti,

$$a-b=c\theta\ ,\quad a'-b'=c'\theta\ ,\quad l-b=c\theta''\ ,\quad l-b'=c'\theta''\ ,$$ donde ricavasi

$$b=\frac{l\theta-a\theta''}{\theta-\theta''}\ ,\quad b'=\frac{l\theta'-a'\theta''}{\theta'-\theta''}\ ,\quad c=\frac{a-l}{\theta-\theta''}\ ,\quad c'=\frac{a'-l}{\theta'-\theta''}\ .$$

Due mobili camminano secondo due rette diverse AM', $A'M''$, andando il 1° da A verso M', il 2° da A' verso M'', sono date le loro velocità c, c', sono date le direzioni dei loro moti AM', $A'M''$ per mezzo delle loro equazioni $\left.\begin{aligned} y &= mx+n \\ y &= m'x+n' \end{aligned}\right\}$ riferite a due assi ortogonali OX, OY,



Sono date finalmente le ascisse dei punti A, A' dove erano i mobili all'origine dei tempi; si domanda la distanza dei due mobili dopo un tempo t

Essendo cognite le ascisse a, a' dei punti A, A' sono pure cognite le loro ordinate dalle equazioni di AM', A'M'', sieno b, b' queste ordinate, chiamiamo $\begin{cases} x' & y' \\ x'' & y'' \end{cases}$ le coordinate dei punti M', M'' dove si trovano i mobili dopo il tempo t, sarà evidentemente $c^2t^2 = (x'-a)^2 + (y'-b)^2$, $c'^2t^2 = (x''-a')^2 + (y''-b')^2$; a queste equazioni aggiungendo le altre $y' = mx' + n$

$$y'' = m'x'' + n'$$

i punti M', M'' appartengono alle rette AM', A'M'', abbiamo quante equazioni ci abbisognano per determinare x', y', x'', y''; eliminando tra queste equazioni otteniamo

$$x' - a = \frac{ct}{\sqrt{1+m^2}}, \quad x'' - a' = \frac{c't}{\sqrt{1+m'^2}}, \quad y' = ma + \frac{mct}{\sqrt{1+m^2}} + n$$

$$y'' = m'a' + \frac{m'c't}{\sqrt{1+m'^2}} + n', \text{ e quindi}$$

$$\overline{M'M''}^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 = \left(a - a' + \frac{ct}{\sqrt{1+m^2}} - \frac{c't}{\sqrt{1+m'^2}}\right)^2 + \left(ma + n - m'a' - n' + \frac{mct}{\sqrt{1+m^2}} - \frac{m'c't}{\sqrt{1+m'^2}}\right)^2.$$

Per compiere la soluzione di questo problema resta a determinarsi la velocità relativa di un mobile rispetto all'altro.

La velocità relativa di un mobile rispetto ad un'altro è quella velocità, con cui vedremmo muoversi il mobile, se noi partecipassimo del moto dell'altro mobile. Per vedere qual sia la direzione, e la misura di questa velocità osserviamo, che in virtù del moto nostro comune col 2° mobile noi vedremmo il 1° mobile muoversi con velocità eguale e direttamente opposta alla nostra, se questo fosse nello stato di quiete, e conchiuderemo subito, che in virtù di questo moto, che ~~il corpo~~ noi vedremmo nel mobile, ma che esso realmente non ha, e del suo vero moto, che noi lo vedremo muoversi secondo la risultante di questi due moti, epperciò, che per avere la velocità relativa di un mobile M' rispetto ad un'altro M'' bisogna fare la risultante della

velocità del mobile M', e di una velocità eguale e direttamente opposta a quella del mobile M", ~~~ rappresenterà Bμ" in direzione la velocità relativa di M° rispetto ad M," e ne sarà la misura.

Lezione 2.ª

~~La luce~~ I raggi lucidi, che dagli astri vengono ai nostri occhi impiegano un certo tempo a far questo viaggio, ed arrivano a noi con una certa velocità; noi ci muoviamo anche con una certa velocità, che abbiamo comune col globo terrestre, che in un'anno compie il suo giro intorno al sole percorrendo l'eclittica, in grazia di questa velocità nostra noi vediamo gli astri non nella direzione dei raggi lucidi, che da essi partono, ma nella direzione della velocità relativa di questi rispetto a noi. Questo fenomeno è conosciuto sotto il nome di aberrazione della luce; fu Bradley il primo, che se ne accorse, e non si può spiegare altrimenti, che come noi lo spieghiamo.

Quando un corpo si muove, e la sua velocità cresce proporzionalmente ai tempi, il moto dicesi allora uniformemente accelerato.

Se c sia la velocità iniziale del mobile, g la velocità, che esso acquista in ogni unità di tempo, u la velocità, che esso ha dopo un tempo t, sarà evidentemente $u = c + gt$; se dopo il tempo t si lascia ancor muovere il mobile per un tempetto dt, alla fin del tempo t avea ~~~ una velocità u, ed avea percorso uno spazio s, alla fin del tempo t+dt avrà una velocità u+du, ed avrà percorso uno spazio s+ds, e potendosi riguardar il moto del mobile durante il tempo infinitesimo dt come un moto eguabile, la cui velocità del mobile sia la media delle velocità u, u+du, che il mobile ha al principio ed al fine del tempo dt, esisterà tra u, s, t, du, ds, dt

la relazione $(u+\frac{du}{2})dt = ds$, ossia $u\,dt+\frac{1}{2}du\,dt = ds$, e trascurando il termine di 2° ordine $\frac{1}{2}du\,dt$, abbiamo $u\,dt = ds$, donde $\frac{ds}{dt} = u = c+gt$; integrando questa equazione abbiamo espresso per il tempo $s = a+ct+\frac{1}{2}gt^2$, se a sia il valore iniziale dello spazio, ossia la distanza a cui era il mobile dall'origine degli spazii nell'origine dei tempi.

Se al principio dei tempi il mobile è all'origine degli spazii, e parte dalla quiete, allora $a=0$, $c=0$, e le equazioni del moto uniformemente accelerato si riducono alle seguenti $u=gt$, $s=\frac{1}{2}gt^2$, le quali ci dicono, che in questo caso le velocità stanno come i tempi, e gli spazii come i quadrati dei tempi o come i quadrati delle velocità, poichè eliminando da queste equazioni t abbiamo $s=\frac{u^2}{2g}$.

In questo moto il mobile nel tempo t percorre lo spazio $\frac{gt^2}{2}$, e dopo il tempo t cessa l'azione della forza, il mobile per legge d'inerzia continuerà a muoversi, muovendosi con moto equabile, e colla velocità acquistata gt, e percorrerà in un tempo t uno spazio espresso da $gt\cdot t = gt^2$, ora gt^2 è il doppio dello spazio percorso dal mobile nel tempo t con moto uniformemente accelerato.

Si prende per misura di una forza la velocità da essa prodotta nell'unità di tempo, e per misura della velocità lo spazio ~~percorso~~ descritto in virtù di questa dal mobile nell'unità di tempo, la misura ~~della~~ di una forza è dunque una linea; nel moto che consideriamo essa è g, ora differenziando l'equazione $u=c+gt$, troviamo, che $g=\frac{du}{dt}$, la misura della forza nel moto uniformemente accelerato si deduce dunque dal valore del 1° coefficiente differenziale della velocità espressa in funzione del tempo t, e si deduce anche dal 2° coefficiente differenziale dello spazio espresso in funzion del tempo, poichè dall'equazione $2gs=u^2$, abbiamo $u\,du = g\,ds = u\,gdt$ e quindi $u=\frac{ds}{dt}$, $g=\frac{d^2s}{dt^2}$. (ciò è vero non solo per questo moto, ma per ogni moto vario, come dimostreremo fra poco.

Lezione 3.ª

Quando un mobile si muove con una velocità, che varia a ciascun istante, il moto dicesi vario. La forza acceleratrice, che produce un tal moto, è continua, e generalmente varia col variare del tempo. Sia φ il valore, ossia l'intensità della forza acceleratrice dopo un tempo t, sia u la velocità del mobile dopo un tal tempo, s lo spazio percorso in esso tempo, cerchiamo quali relazioni esistano tra queste quattro quantità φ, t, u, s, ed avremo risoluto un caso del problema generale della Dinamica.

Per trovar queste relazioni lasciamo agire la forza ancora per un istante dt, dopo questo tempo la velocità sarà diventata $u+du$, e lo spazio $s+ds$. dt essendo un'istante infinitesimo non farà errore il supporre, che lo spazio ds sia stato descritto dal mobile nel tempo dt con moto eguabile e colla velocità u, dunque $ds = u\,dt$, ed $u = \frac{ds}{dt}$.

Per trovare una relazione fra φ, t, u, s, supponiamo, che conosciamo una forza acceleratrice costante f capace di produrre nel mobile una velocità g nell'unità di tempo, questa forza f nel tempetto dt produrrà la velocità $g\,dt$, mentre la forza φ produce la velocità du, ora due forze costanti stanno fra loro come le velocità, che imprimono ad uno stesso mobile nello stesso tempo, dunque (poichè φ si può riguardar come costante pel tempo infinitesimo dt)

$f : \varphi :: g\,dt : du$, donde $\varphi = \frac{f}{g} \cdot \frac{du}{dt}$, ora g è la misura della forza f dunque $\frac{f}{g} = 1$, e $\varphi = \frac{du}{dt}$, e poichè $u = \frac{ds}{dt}$, $\varphi = \frac{d^2 s}{dt^2}$; più generalmente possiamo scrivere $\varphi\,dt = d.\frac{ds}{dt}$ lasciando libera la scelta della variabile indipendente.

Fra le quattro quantità φ, t, s, u abbiamo dunque le due relazioni

$u = \frac{ds}{dt}$, $\varphi = \frac{du}{dt}$, per mezzo delle quali quando ci sarà data una delle quattro suddette quantità in funzione di t, o di φ, o di s, o di u, potremo avere tutte due quantità espresse anche per t, o per φ, o per s, o per u, e quando ci saranno dati i valori di due delle quantità φ, s, t, u potremo avere le altre due, purchè inoltre sieno date tante condizioni quante bastano per determinare le costanti arbitrarie rifiutanti dalla integrazione. Eliminando t tra le equazioni trovate, abbiamo una terza equazione $u\,du = \varphi\,ds$, che potremo impiegare invece di una delle altre due, quando ciò ci sembrerà più conveniente. Se il moto è accelerato queste equazioni servono, se il moto è ritardato, bisogna in esse cangiare il segno di du, ed avremo queste altre due $\varphi\,dt = -du$, $-u\,du = \varphi\,ds$.

Facciamo ora alcune ipotesi per renderci familiari queste formole.

Si ha un mobile, che percorre spazii proporzionali ai cubi dei tempi, di modochè gli spazii descritti in tempi eguali sono :: 1 : 7 : 19 : 37 ----, si vuole la velocità di questo mobile alla fine di qualunque tempo, e la forza acceleratrice.

Sia h lo spazio, che il mobile descrive nell'unità di tempo, e parta il mobile nell'origine dei tempi dalla quiete e dall'origine degli spazii, a $t=0$ dovrà corrispondere $s=0, u=0$ sarà dunque $s = ht^3$, $u = \frac{ds}{dt} = 3ht^2$, $\varphi = \frac{du}{dt} = 6ht$; in questo moto le velocità crescono dunque come i quadrati dei tempi, e la forza acceleratrice cresce proporzionalmente ai tempi.

Un mobile si muove descrivendo spazii proporzionali al quadrato della velocità, si domanda la forza acceleratrice.

Se f sia lo spazio corrispondente al valore v della velocità u, sarà $s = fu^2$, e quindi $\varphi = u \frac{du}{ds} = \frac{u}{\frac{ds}{du}} = \frac{1}{2f}$; in questo moto la forza acceleratrice è dunque costante; inoltre $dt = \frac{ds}{u} = 2f\,du$, e se a $t=0$ deve corrispondere $u=0$, ossia se il mobile parte dalla quiete, $t = 2fu$, la velocità è dunque in questo moto proporzionale al tempo, ossia il moto è uniformemente accelerato.

La velocità di un mobile cresce come il logaritmo dei tempi, si domanda la forza acceleratrice, e lo spazio descritto in un tempo qualunque.

Sia $u = i \log t$, i essendo una costante, avremo $\varphi = \frac{du}{dt} = \frac{i}{t}$,

$i \log t = \frac{ds}{dt}$, $s = i \int \log t\,dt = it(\log t - 1)$, se vorremo che a $t=0$ corrisponda $t=0$; se t è negativo, la velocità e lo spazio diventano immaginarii, bisogna dunque in questo moto non supporre mai t negativo.

a $t=0$ corrisponde $s=0$, $\varphi = \infty$, $u = -\infty$, ~~ciò~~ e u è negativo sinantochè t è < 1; quando $t=1$, allora $u=0$, $s = -i$, $\varphi = i$; crescendo t cresce u, ~~cresce~~ e diminuisce negativamente sinoatanto che diventa $=0$, quando $t = e = 2,7\ldots$, e cresce quindi indefinitamente; la forza acceleratrice φ diminuisce ~~[illegible]~~ lentamente.

~~[illegible]~~ Da tutto ciò concludiamo, che se la forza acceleratrice è diretta secondo AF, e che se A è il punto dove si trova il mobile all'origine dei tempi, questo in virtù della velocità ~~[illegible]~~ che ha in questo tempo benchè sollecitato da una forza $\varphi = 0$ si muove nel senso di AB con moto ritardato, e si muove in questo senso fino a che ~~[illegible]~~

perduta tutta la velocità iniziale, dopo un tal tempo, la forza q continuando adagire sul mobile nella direzione AF, esso ritornerà verso A percorrendo la stessa strada BA, che già avea percorsa, oltrepasserà A, e si muoverà per tutti i raggi con velocità sempre maggiore, percorrendo la linea AF.

La forza acceleratrice è proporzionale al seno di un multiplo del tempo, il mobile parte dalla quiete e dall'origine degli spazii nell'origine dei tempi, si domanda dove sarà il mobile dopo un tempo t, e quale sarà allora la sua velocità.

Sia $\varphi = K \operatorname{sen} ht$, sarà $du = \varphi dt = K \operatorname{sen} ht\, dt$, ed $u = K \int \operatorname{sen} ht\, dt = \frac{-K}{h} \cos ht + C$

e poichè per $t=0$, $u=0$, $u = \frac{K}{h}(1-\cos ht)$; sarà inoltre

$s = \int u\, dt = \frac{K}{h}\left[t - \frac{\operatorname{sen} ht}{h}\right] + C$, e poichè il mobile parte dall'origine degli spazii nell'origine dei tempi $s = \frac{K}{h} t - \frac{K}{h^2} \operatorname{sen} ht$; Dalle equazioni di questo moto

$$\varphi = K \operatorname{sen} ht, \quad u = \frac{K}{h}(1-\cos ht), \quad s = \frac{K}{h} t - \frac{K}{h^2} \operatorname{sen} ht$$

si scorge, che la forza acceleratrice è zero ogniqualvolta t è un multiplo intero di $\frac{\pi}{h}$, e che ha una infinità di intermittenze, essendo ora positiva, ora negativa, secondochè il valore di ht è compreso tra un multiplo pari di π, e un multiplo impari, oppure fra un multiplo impari ed uno pari di π, e che la velocità cresce finchè la forza acceleratrice è positiva, diminuisce quando questa è negativa, sino a diventar zero, donde incomincia a crescere di nuovo, diventando la forza positiva, per di nuovo diminuire così continua crescendo e diminuendo colla stessa legge per intervalli di tempo eguali, il moto è dunque accelerato e ritardato successivamente, e l'acceleramento ed il ritardamento si succedono dopo intervalli di tempo eguali.

Lezione 4.ª

Applichiamo quel che si è detto del moto vario al moto dei gravi cadenti e dei gravi salienti. Fatta astrazione dalla resistenza dell'aria, e dalle altre circostanze, che concorrono ad alterare questi moti, il 1.° è un moto uniformemente accelerato, ed il 2.° un moto uniformemente ritardato. Infatti quantunque l'intensità della forza, che attira i corpi verso la terra, e che abbiam chiamata gravità, cresca in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro terrestre, si può tuttavia senza errore sensibile riguardar questa forza come costante alla superficie della terra, stantechè le distanze che ci occorre di considerare sono trascurabili a fronte della lunghezza del raggio terrestre.

Le equazioni del moto verticale dei gravi nel vacuo sono dunque

$$u = c + gt, \quad s = ct + \tfrac{1}{2}gt^2, \quad 2gs = u^2 - c^2,$$

g essendo la misura della gravità, c la velocità iniziale del grave, u la velocità, che questo ha dopo un tempo t, ed s lo spazio percorso in questo tempo.

Si osservò quale spazio un grave abbandonato a se stesso descrive in un minuto secondo, e si trovò questo spazio $= 4^{m}.9044$, il moto del grave essendo uniformemente accelerato, si conchiuse, che se in qualche modo fosse stato possibile di sottrarre il grave all'azione della gravità, esso avrebbe colla velocità acquistata, e conservata per legge d'inerzia percorso uno spazio doppio, ossia $= 9^{m}.8088$ in un'altro secondo, ora lo spazio percorso nell'unità di tempo misura la velocità, si conchiuse dunque, che la velocità acquistata dal grave in un secondo è $= 9^{m}.8088$, ma questa velocità misura la forza acceleratrice, dunque $g = 9^{m}.8088$, e

prossimamente $g = 9^{m}, 61$.

Per passare dal moto uniformemente accelerato in generale al caso particolare dei gravi cadenti nel vuoto basta dunque sostituire a g il suo valore $9^{m}, 8088$ nelle equazioni generali del moto. Facendo questa sostituzione, e supponendo, che il grave parta dalla quiete, ossia sia $C=0$, le equazioni del moto del grave cadente sono

$$u = (9,8088)\,t, \quad s = (4,9044)\,t^2, \quad u = \sqrt{(9,6176)\,s}\,.$$

La velocità, che un grave acquista cadendo da una certa altezza si chiama la velocità dovuta a quest'altezza, e l'altezza da cui deve cadere un grave per acquistare una certa velocità si chiama l'altezza dovuta a questa velocità.

Data l'altezza si ha la velocità, che le è dovuta dalla formola $u = \sqrt{2gs}$, e data la velocità si ha l'altezza che le è dovuta dalla formola $s = \frac{u^2}{2g}$.

In questi moti, che ora consideriamo, noi supponiamo, che il mobile sia un punto materiale, ossia una massa di volume insensibile, questa massa così concentrata in un punto possiamo supporla quanto grande o quanto piccola vogliamo, così quando consideriamo il moto di un grave cadente verticalmente, noi consideriamo la massa del grave come riunita in un solo punto, e determiniamo le leggi del moto di questo punto, che possiamo supporre per es. essere il centro di gravità del mobile.

Ciò premesso sia M la massa del corpo cadente, moltiplichiamo i due membri dell'equazione $u = gt$ per M, abbiamo $Mu = Mgt$, ora Mg non è altro, che il peso assoluto P del grave Mu è la quantità di moto, che ha il corpo dopo il tempo t, dunque $Mu = Pt$, ossia

la quantità di moto di un corpo cadente cresce proporzionalmente al tempo, ed è eguale al prodotto del peso assoluto del corpo per il tempo.

Moltiplichiamo ancora per M l'equazione $u^2 = 2gs$, avremo $Mu^2 = 2Mgs = 2Ps$; il prodotto Mu^2 della massa pel quadrato della velocità si dice forza viva del corpo, il prodotto Ps del peso del corpo per lo spazio da esso percorso cadendo si dice quantità d'azione, dunque in un grave cadente, che parte dalla quiete, la forza viva è eguale al doppio della quantità d'azione.

Il prodotto Ps fu detto quantità d'azione, poichè desso esprime l'azione, o il lavoro, che è necessario per ricondurre il mobile al punto di partenza. Infatti quando si portano diversi pesi alla stessa altezza, il lavoro è proporzionale al peso, e quando si portano gli stessi pesi a diverse altezze il lavoro è proporzionale all'altezza; quindi si conchiude, che il lavoro necessario per portare un dato peso ad una data altezza è proporzionale al prodotto del peso per l'altezza.

Se il grave non parte dalla quiete, ma parte con una velocità iniziale c, allora $u - c = gt$, $u^2 - c^2 = 2gs$; moltiplicando ancora queste due equazioni per M, abbiamo $Mu - Mc = Pt$, $Mu^2 - Mc^2 = 2Ps$. In queste equazioni Mu è la quantità di moto del grave alla fin del tempo t, Mc è la quantità di moto, che avea il grave al principio del tempo t, $Mu - Mc$ è dunque la quantità di moto acquistata dal corpo nel tempo t,

parimente $M u^2$ è la forza viva del mobile dopo il tempo t, $M c^2$ era la forza viva del mobile al principio del tempo t, $M u^2 - M c^2$ è dunque la forza viva acquistata nel tempo t. Dunque un grave cadente verticalmente con una data velocità iniziale acquista di quantità di moto fatto in un tempo t è eguale al prodotto del peso assoluto del grave per il tempo, e la forza viva acquistata dal mobile tra due posizioni qualunque è eguale al doppio della quantità d'azione impiegata queste due posizioni.

Quando un grave è spinto in alto con una velocità iniziale c, esso si muove con moto uniformemente ritardato, poichè ad ogni intervallo eguale di tempo la gravità gli toglie porzioni eguali di velocità. Per avere le equazioni di questo moto basta, che nelle equazioni del moto dei gravi cadenti cangiamo il segno a g, le equazioni del moto dei gravi salienti sono dunque

$$u = c - gt, \qquad c^2 - u^2 = 2gs, \qquad s = ct - \tfrac{1}{2} g t^2 .$$

Il mobile sale finchè gli resta alcunchè della velocità c, e cessa di salire dopo un tempo $T = \frac{c}{g}$ corrispondente ad $u = 0$, dopo aver percorso uno spazio $S = \frac{c^2}{2g}$; passato questo tempo, la gravità continuando ad agire sul mobile lo fa discendere facendogli di nuovo percorrere nel tempo $\frac{c}{g}$ lo spazio $\frac{c^2}{2g}$, e facendogli di nuovo acquistare la velocità c.

Moltiplicando le equazioni $c - u = gt$, $c^2 - u^2 = 2gs$ per M abbiamo $\begin{cases} Mc - Mu = Pt \\ Mc^2 - Mu^2 = 2Ps \end{cases}$, donde deduciamo, che nel moto uniformemente ritardato di un grave salente la perdita di quantità di moto è eguale al prodotto del peso assoluto del grave pel tempo, e la perdita di forza viva è eguale al doppio della quantità d'azione impiegata nel tempo.

Racchiudendo questi teoremi, e quelli che sono in capo di questa pag.a in un solo, possiamo dire, che nel moto prodotto da una forza acceleratrice costante l'acquisto o la per-

detta di quantità di moto in un dato tempo è eguale al prodotto del peso, o più generalmente della forza motrice pel tempo, e che l'acquisto o la perdita di ~~quantità~~ forza viva nello stesso tempo è eguale al doppio della quantità d'azione sviluppata o sopportata in quel tempo. Fra poco generalizzeremo questi teoremi. Introducendo nelle equazioni del moto dei gravi saliente le costanti S, T, abbiamo $S - s = \frac{u^2}{2g}$, $T - t = \frac{u}{g}$, donde concludiamo, che in questo moto la velocità è proporzionale al tempo, che resta da scorrere sino alla cessazione del moto, e lo spazio ~~è proporzionale~~ che resta a descriversi sino alla cessazione del moto è proporzionale al quadrato della velocità.

Lezione 5.ª

Riprendiamo le equazioni generali del moto vario $\varphi ds = u du$, $\varphi dt = du$; integrandole, e volendo che a $t = 0$ corrisponda $s = 0$, $u = c$, avremo

$$u - c = \int_0^t \varphi dt \quad , \quad u^2 - c^2 = 2\int_0^s \varphi ds .$$

Sia M la massa del mobile, moltiplicando i due membri di queste equazioni per M abbiamo $Mu - Mc = \int_0^t M\varphi dt$, $Mu^2 - Mc^2 = 2\int_0^s M\varphi ds$, e chiamando P la forza motrice $M\varphi$, $Mu - Mc = \int_0^t P dt$, $Mu^2 - Mc^2 = 2\int_0^s P ds$; possiamo ridurre questa 2.ª equazione a teorema.

In tal equazione P può rappresentare un peso capace di ~~tenere~~ far equilibrio alla forza che sollecita la massa M. Pds è il lavoro elementare fatto dalla forza nel tempetto dt, o la quantità d'azione sviluppata dalla forza in

tal tempo i (possiamo) prendere per misurare la quantità d'azione sviluppata da una forza per unità il lavoro di un uomo che solleva un peso di un Chilogrammo a un metro di altezza; questa unità fu chiamata Chilogrammetro; quando il lavoro, o la quantità d'azione da misurarsi è molto grande, bisogna per facilitare i Calcoli, che prendere una unità più grande del Chilogrammetro; possiamo per es- prendere per unità di lavoro quel Lavoro che si richiede per sollevare un metro cubo d'acqua ossia mille Chilogrammi a un metro di altezza; questa unità fu adottata, e chiamata Dinamia, o unità Dinamica. L'unità di lavoro che si impiega ora più frequentemente nelle applicazioni è il Cavallo vapore è il lavoro, che si richiede per sollevare in un secondo 75 Chilog. a un metro di altezza. $\int_0^t P\,ds$ è la somma dei lavori elementari fatti dalla forza negli istanti dt cominciando da $t=0$ sino a $t=t$, ossia è la quantità d'azione sviluppata dalla forza tra i valori di s, $s=0$, $s=s$. Mu^2 vien anche chiamata la forza viva nel moto comunque vario, $Mu^2 - M$ è dunque l'aumento di forza viva fatto nel tempo t, dunque finalmente il teorema che volevamo dimostrare; nel moto vario l'aumento di forza viva è eguale al doppio della quantità d'azione sviluppata dalla forza tra i valori $s=0$, $s=s$, dello spazio. Facciamo qualche applicazione ancora delle equazioni generali del moto vario.

Un corpo, che si muove sopra di un altro corpo, perde ad ogni istante una parte della sua velocità per la scabrezza sua e dell'altro corpo, questa resistenza, che si oppone al moto libero del Corpo, e che lo ritarda, dicesi attrito, vedremo a suo tempo come si misura questa forza ritardatrice; per ora consideriamo soltanto qualche caso particolare.

Un corpo è gettato sopra un piano orizzontale (fatta astrazione dalla resistenza dell'aria) con una velocità iniziale C, se non vi fosse attrito, il corpo si muoverebbe con moto equabile e rettilineo, essendovi attrito esso si muoverà con moto ritardato, si chiedono le equazioni di questo moto.

Se il peso del corpo è grande, l'attrito è anche grande, se il peso è piccolo, l'attrito è anche piccolo, ossia l'attrito è proporzionale al peso del corpo, se dunque q sia il peso del corpo, si potrà l'attrito esprimere col prodotto fq. Se il piano è omogeneo, fq è ovunque lo stesso, il moto del corpo è dunque equabilmente ritardato. Se il piano è eterogeneo, fq varia da un istante all'altro, e il moto è ancora ritardato, ma non più equabilmente. Supponiamo, che il piano orizzontale sia eterogeneo, che la scabrezza vada uniformemente scemando cominciando dal luogo, donde gette il mobile, e che le variazioni abbiano luogo nel senso della lunghezza del piano, di modoche in ogni ciascuna listra trasversale di larghezza infinitesima sia omogenea; supponiamo inoltre, che si siano fatte alcune esperienze, e si sia trovato, che lanciando il mobile lungo la prima listra trasversale con una velocità di 4 m. il moto si spegne dopo un decimo di secondo, e che, lanciando il mobile lungo una listra distante 10 m. dalla prima con la velocità 4, il moto si spegne dopo 10 secondi.

fq essendo la forza motrice, dividendola per la massa M del corpo, avremo la forza acceleratrice $= fg$, poichè $q = Mg$; nel nostro caso il coefficiente f

varia per ogni listra. Coi dati sperimentali, che abbiamo, possiamo avere il valore di f corrispondente alle due listre distanti tra loro di $10^{m.}$; quando il mobile si muove lungo una traversale, il suo moto è equabilmente ritardato, ed essendo c la velocità iniziale, abbiamo tempo t, dopo cui si spegne il moto, $t = \frac{c}{fg}$, dunque per la 1ª listra $\frac{4}{f'g} = \frac{1}{10}$, $f'g = 40$, e per l'altra listra $\frac{4}{f''g} = 10$, $f''g = 0,4$.

~~Da ciò concludiamo~~ che, dal punto ove fg vale $40^{m.}$, al punto ove fg vale 0,4, la forza acceleratrice diminuisce di $39^{m.}6$, ora tra questi due punti sono $10^{m.}$ di distanza, per ogni metro la forza acceleratrice diminuisce dunque di $3^{m.}96$, e per $s^{m.}$ diminuisce di $(3^{m.},96)s$, dunque alla distanza s dalla 1ª listra, ossia dal punto di partenza del mobile, la forza acceleratrice è $\varphi = 40 - (3,96)s$.

Ciò posto abbiamo $\frac{d^2s}{dt^2} = 40 - (3,96)s$, ed integrando

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 80s - (3,96)s^2 + \text{Cost.} = a^2,$$

La costante ~~arbitr~~ indeterminata si determina introducendo la velocità iniziale del mobile, se vogliamo che questa sia di $20^{m.}$ per secondo, abbiamo

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{80s - (3,96)s^2 + 400}, \quad \text{e quindi}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{400 + 80s - (3,96)s^2}}, \quad \text{donde}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{3,96}} \operatorname{arc}\left[\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{124,3}(1+4,1) - \sqrt{4,1}(1-24,3)}{\sqrt{(-4,1)(1+4,1)} + \sqrt{}}\right]$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{3,96}} \operatorname{arc}\left\{\operatorname{tang} = \frac{(28,4)\frac{20}{\sqrt{3,96}} - \frac{80}{3,96}\sqrt{\frac{400}{3,96} + \frac{80}{3,96}1 - 1^2}}{607,3 + \frac{80}{3,96}1}\right\}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{3,96}} \operatorname{arc}\left\{\operatorname{tang} = \frac{2249,28 - 80\sqrt{400 + 80\mathcal{A} - (3,96)1^2}}{4569,33 + (19,2)1}\right\}$$

volendo che a $t=0$ corrisponda $1=0$.

Volendo sapere in che luogo il mobile si fermerà e dopo qual tempo, basta, che eguagliamo a zero il valore di u, avremo così una equazione, che ci darà 1, risolvendola abbiamo due valori per 1 uno positivo, l'altro negativo, il primo di questi $1=24,3$ è quello, che esprime la distanza a cui si ferma il mobile, sostituendo questo valore di 1 in t, abbiamo la durata totale del moto

$$t = \frac{2}{\sqrt{3,96}} \operatorname{arc}\left\{\operatorname{tang} = \frac{2249,28}{4569,33 + (19,2)(24,3)}\right\} = 0''43.$$

Lezione 6.ª

Un solido che si muove attraverso a un fluido comunica alle molecole di questo una certa velocità, ora comunicando velocità ad altro corpo gli perde una parte della propria velocità, e ciò per legge d'inerzia; l'inerzia del fluido entro a cui si muove un solido equivale dunque ad una forza diretta in senso contrario al moto del solido, ossia generalmente i fluidi resistono al movimento dei solidi.

L'esperienza ci dice, che le resistenze dei fluidi al movimento dei solidi sono prossimamente proporzionali ai quadrati delle velocità di questi, e che senza fare errore sensibile si può adottare l'ipotesi, che la resistenza di un fluido sia proporzionale al quadrato della velocità del mobile.

L'Effetto della resistenza di un fluido è di ritardare il moto del solido, che si muove dentro il fluido, dividendo l'espressione di questa resistenza per la massa del solido, avrassi dunque espressione della forza ritardatrice del moto del solido, ora la massa M di un corpo, il peso assoluto è P, è $M=\frac{P}{g}$, ~~la forza~~ Quando dunque un solido si muove attraverso ad un fluido, il suo moto è ritardato dalla resistenza del fluido, e la forza ritardatrice è proporzionale al quadrato della velocità, e alla gravità g, essa può dunque esprimersi colla formula $\varphi = gK^2u^2$, K essendo una quantità dipendente dalla densità del fluido, e dalla forma, dalle dimensioni, e dalla densità del solido, u essendo la velocità, g la gravità terrestre.

Ciò premesso, esaminiamo il moto dei gravi tenendo conto della resistenza dell'aria. Voglio lanciare una sfera sovra un piano orizzontale con una velocità iniziale C senza attrito, voglio sapere come si muova, e se dopo un dato tempo si fermi per la resistenza dell'aria.

La forza operante sull'elemento del mobile, in questo caso è la sola
forza ritardatrice proveniente dalla resistenza dell'aria, dopoche il mobile è stato lanciato. Dunque $\varphi = -gK^2u^2$,

e quindi $ds = \frac{u\,du}{\varphi} = -\frac{u\,du}{gK^2u^2} = -\frac{du}{gK^2u}$, $s = Cost - \frac{\log u}{gK^2}$,

$$dt = \frac{du}{\varphi} = -\frac{du}{gK^2u^2}, \quad t = \frac{1}{gK^2u} + Cost.$$

a $t=0$ dovendo corrispondere $s=0$, $u=c$ possiamo determinare

le costanti arbitrarie, ed abbiamo $s = \frac{\log c}{gK^2} - \frac{\log u}{gK^2} = \frac{1}{gK^2}\log\frac{c}{u}$,

$$t = \frac{1}{gK^2u} - \frac{1}{gK^2c} = \frac{1}{gK^2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{c}\right).$$

Per veder meglio l'andamento del moto ricaviamo u. s in funzion del tempo,

le equazioni risultanti $u = \frac{c}{1+gK^2ct}$, $s = \frac{1}{gK^2}\log(1+gK^2ct)$

ci dimostrano, che la velocità diminuisce al di là di ogni limite
col crescere del tempo, ma che non diventa nulla comunque grande si
supponga il tempo, purchè non si supponga infinito, e che lo spazio
cresce al di là di ogni limite col crescere del tempo.

Se la forza ritardatrice fosse proporzionale alla 1ª potenza della velocità,
e fosse $\varphi = -ghu$, sarebbe allora $dt = -\frac{du}{ghu} = -\frac{\log u}{gh}$

$t = \frac{1}{gh}\log\frac{c}{u}$, e $ds = \frac{-u\,du}{ghu} = -\frac{du}{gh}$, $s = \frac{1}{gh}(c-u)$,

donde ricavando u. s in funzion di t, $u = ce^{-ght}$, $s = \frac{c}{gh}(1-e^{-ght})$.

In questo caso la velocità diminuisce al di là di ogni limite col crescere
del tempo senza mai estinguersi, ma lo spazio avrà un limite, e sarà
sempre minore di $\frac{c}{gh}$.

abbiamo qui il caso di un mobile, che sempre cammina verso un punto fisso senza mai arrivarvi.

Lezione 3.ª

Quando un corpo cade verticalmente nell'aria, il valore ~~della~~ della forza, che sollecita ciascuna sua molecola è $\varphi = g - gK^2u^2 = g(1-K^2u^2)$, ora $\varphi dt = du$, $\varphi ds = u du$, dunque $dt = \frac{du}{g(1-K^2u^2)}$, $t = \frac{1}{2gK} \log \frac{1+Ku}{1-Ku} + \log t$.

e $ds = \frac{u du}{g(1-K^2u^2)}$, $s = -\frac{1}{2gK^2} \log (1-K^2u^2) + \frac{1}{2gK^2} \log \frac{1}{1-K^2u^2} + \log t$;

Se il mobile parte dalla quiete, allora per $u=0$, $s=0$, $t=0$, e

$s = \frac{1}{2gK^2} \log \frac{1}{1-K^2u^2}$, $t = \frac{1}{2gK} \log \frac{1+Ku}{1-Ku}$. Ricaviamo da queste equazioni

u per t, s per t, avremo le equazioni del moto dei gravi cadenti nell'aria

$$u = \frac{1}{K} \cdot \frac{e^{2gKt} - 1}{e^{2gKt} + 1}, \quad s = \frac{1}{gK^2} \log \frac{1}{2} \left(e^{gKt} + e^{-gKt} \right).$$

In queste equazioni, quando t cresce, u si approssima ad $\frac{1}{K}$, s cresce indefinitamente ~~il moto dunque~~ e dopo un certo tempo differisce pochissimo dal valore ~~E~~

$s = \frac{1}{gK^2} \log \frac{1}{2} e^{gKt} = \frac{1}{gK^2} \left\{ gKt - \log 2 \right\} = \frac{1}{K} t - \frac{\log 2}{gK^2}$, e trascurando il 2° termine a confronto della grandezza del 1° possiamo dire, che dopo un tempo piuttosto grande ~~Abbiamo~~ approssimativamente $s = \frac{1}{K} t$, dunque il mobile nei primi istanti si muove con moto uniformemente accelerato, ma passato un certo

tempo esso diventa sensibilmente eguabile. Ciò si vede anche esaminando il valore della forza anceleratrice $g(1-K^2u^2)$, il quale diventa pressochè insensibile perpoco, che cresca u; siccome per altra parte $1-K^2u^2$ non può diventar negativa, poichè la resistenza dell'aria è una di quelle forze, che sono capaci soltanto di distruggere il moto, e non mai di produrlo, ne segue che u non può mai diventar maggiore di $\frac{1}{K}$, e nemmeno $=\frac{1}{K}$.

Supponiamo, che il corpo, il quale si muove nel fluido sia una sfera omogenea di una data densità, e troviamo K.

Sia r il raggio della sfera, δ la densità del fluido, la forza motrice è proporzionale al peso di un cilindro di densità δ, di raggio r, e di altezza eguale a quella, che è dovuta alla velocità u, ossia eguale ad $\frac{u^2}{2g}$, se dunque la chiamiamo R abbiamo $R = m\frac{\pi r^2 u^2 \delta}{2}$, m essendo un coefficiente costante, il quale dipende dalla viscosità del fluido, e dall'ampiezza del vaso, che lo contiene. Se M sia la massa della sfera, Δ la sua densità, sarà $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta$. Dividendo R per M abbiamo l'espressione della forza ritardatrice $\frac{R}{M} = \frac{3m\pi r^2 u^2 \delta}{8\pi r^3 \Delta} = \frac{3}{8} m \frac{u^2 \delta}{r\Delta}$, ~~Dunque~~ ma essa è $= gK^2u^2$, dunque $gK^2 = \frac{3}{8} m \frac{\delta}{r\Delta}$.

Per l'aria atmosferica, che è estesa indefinitamente si assume generalmente $m = \frac{1}{2}$, dunque per l'aria atmosferica $gK^2 = \frac{3}{16}\frac{\delta}{r\Delta}$.

La resistenza dell'aria è dunque inversamente proporzionale alla densità del corpo, che in essa si muove, ed al raggio, se questo è una sfera.

Cerchiamo adesso le leggi del moto dei gravi lanciati verticalmente all'insù nell'aria. Il moto è ritardato, e l'espressione della forza ritardatrice è

$\varphi = -g - gK^2u^2 = -g(1+K^2u^2)$, ora $dt = \frac{du}{\varphi}$, $ds = \frac{u\,du}{\varphi}$, dunque

$$dt = -\frac{du}{g(1+K^2u^2)}, \quad t = -\frac{1}{gK}\,arc\,(tang = Ku) + Cost,$$

$$ds = -\frac{u\,du}{g(1+K^2u^2)}, \quad s = -\frac{1}{2gK^2}\log(1+K^2u^2) + Cost,$$

Sia c la velocità impressa al mobile inizialmente, dovremo determinare le costanti arbitrarie in modo, che a $u = c$ corrisponda $t = 0$, $s = 0$; fatta questa determinazione risulta $t = \frac{1}{gK}\,arc\,(tang = \frac{K(c-u)}{1+K^2cu})$, $s = \frac{1}{2gK^2}\log\frac{1+K^2c^2}{1+K^2u^2}$, e ricavando quindi u ed s in funzione di t hassi

$$u = \frac{1}{K}\cdot\frac{Kc - tang.\,gKt}{1+Kc\,tang.\,gKt}, \quad s = \frac{1}{gK^2}\log\{cos\,gKt + Kc\,sen\,gKt\}.$$

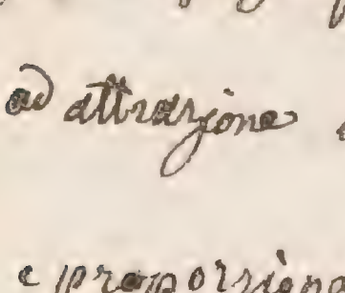
Da queste formole vediamo, che, crescendo t, u diminuisce, e che dopo un certo tempo $u = 0$; questo tempo è $t = \frac{1}{gK}\,arc\,(tang = Kc)$, e lo spazio corrispondente è $s = \frac{1}{2gK^2}\log(1+K^2c^2)$. In questi valori di s, e t, facendo $K = 0$, dovremmo trovare $t = \frac{c}{g}$, $s = \frac{c^2}{2g}$, ma troviamo invece $t = \frac{0}{0}$, $s = \frac{0}{0}$; noi non ci sgomenteremo per l'apparizione di questi $\frac{0}{0}$, bensì differenzieremo ~~il valore di s~~, ~~a questo di t~~ il numeratore ed il denominatore di ~~ciascuno~~ rispetto a K, faremo il rapporto dei differenziali, troveremo, che esso è $\frac{c}{g(1+K^2c^2)}$, faremo quivi $K = 0$, e concluderemo, che $t = \frac{c}{g}$ come deve essere realmente; facendo la stessa cosa

per s, troveremo $s = \frac{c^2}{2g}$.

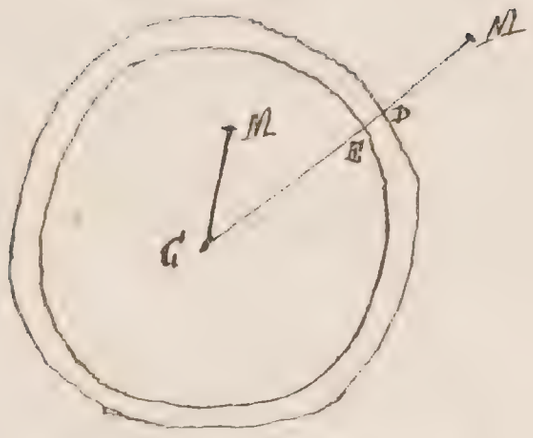
Lezione 8.ª

Ciascun elemento di un corpo esercita una attrazione su ciascun elemento di un'altro corpo, quindi tutti i corpi, se non vi fossero altre forze, che agissero su di essi, attirandosi a vicenda, verrebbero a riunirsi in un sol corpo; questa forza per cui i corpi si attraggono l'un l'altro è detta gravitazione od attrazione universale. L'attrazione è proporzionale alle masse attraenti, e proporzionale inversamente ai quadrati delle loro distanze; quest'attrazione deve distinguersi da una altra attrazione, che si esercita soltanto a distanze insensibili tra le molecole dei corpi, ed è detta attrazione molecolare. Noi non ci occuperemo di questa attrazione.

Se ho due masse attraenti, le cui masse sieno dm, dm_1 e la cui distanza sia r, l'attrazione è dunque proporzionale a $\frac{dm \cdot dm_1}{r^2}$; dividendo questa espressione per la massa dm, ho l'espressione della forza acceleratrice della massa dm, quando questa è attratta dalla massa dm_1; questa espressione è $\frac{dm_1}{r^2}$, reciprocamente la forza acceleratrice della massa dm_1, quando questa è attratta dalla massa dm, è espressa dalla formola $\frac{dm}{r^2}$.



Si dimostra, e noi non la dimostreremo, ma la accetteremo come vera, le due proposizioni seguenti;

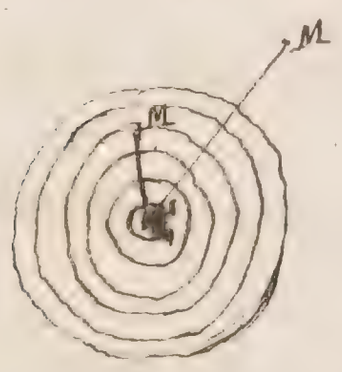


1ª Uno strato sferico omogeneo esercita sopra un punto esterno M una stessa attrazione come se tutta la massa fosse al centro.

Se dunque r sia il raggio interno CE, r' il raggio esterno CD, δ la densità dello strato, f l'attrazione dell'unità di massa all'unità di distanza, l la distanza CM, l'attrazione sarà la stessa, come se tutta la massa $\frac{4}{3}\pi(r'^3 - r^3)\delta$ fosse al centro; moltiplicando questa massa per f avremo l'attrazione di tutto lo strato all'unità di distanza; dividendo questa per l^2 avremo l'attrazione alla distanza l, il punto M è dunque attratto verso C da una forza eguale

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{f\pi(r'^3 - r^3)\delta}{l^2}.$$

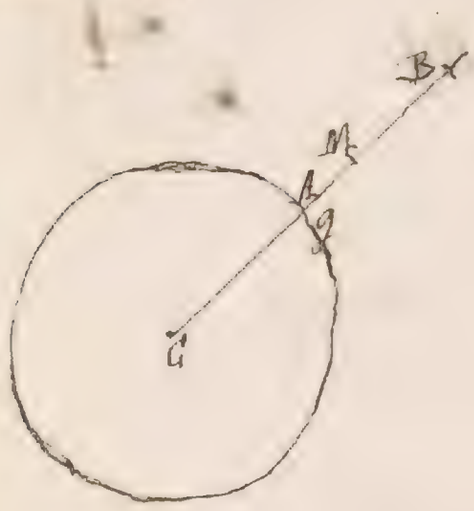
2ª Proposizione. Uno strato sferico omogeneo attrae egualmente per ogni parte un punto collocato dovunque nel suo interno, ossia la risultante delle attrazioni degli elementi dello strato sarà un punto M posto nel suo interno è nulla.



Dalla 1ª Propᵉ risulta, che una sfera od omogenea, o composta di strati sferici omogenei e concentrici attrae un punto esterno come se tutta la sua massa fosse raccolta nel centro.

Per avere l'espressione dell'attrazione consideriamo uno strato di spessore dr, ~~dico~~ r il raggio ~~della sfera~~ di questo strato, δ la densità dello stesso strato, il suo volume sarà $4\pi r^2 dr$, la massa $4\pi\delta r^2 dr$; integrando quest'espressione tra i limiti 0, R raggio della sfera, abbiamo la massa totale della sfera $4\pi\int_0^R r^2\delta\,dr$, moltiplicandola per $\frac{f}{l^2}$ attrazione dell'unità di massa alla distanza $l = CM$, abbiamo l'espressione cercata dell'attrazione della sfera sul punto esterno M $\dfrac{4f\pi\int_0^R r^2\delta\,dr}{l^2}$, una sfera composta di strati sferici concentrici ed omogenei attrae dunque un punto esterno in ragione inversa del quadrato della distanza del punto dal centro, ~~ora~~ il globo terrestre è presso a poco una sfera composta di strati sfer-

omogenei e concentrici, dunque la terra attrae i corpi, che sono esterni ad essa in ragione inversa dei quadrati delle distanze loro dal centro, dunque i corpi cadenti non sono realmente sollecitati da forze costanti; come già abbiamo avvertito altra volta, per le distanze piccole, che ci occorre di considerare alla superficie terrestre possiamo riguardare i corpi come sollecitati da forze costanti, questa supposizione non avendo più luogo per distanze sensibili rispetto al raggio terrestre, cerchiamo quali sieno le leggi del moto di un corpo attratto dalla terra.



abbiamo esperimentato, che in A la gravità è g, sappiamo che R è il raggio terrestre, portiamo un grave in B alla distanza $AB = h$, e lo lasciamo quindi cadere senza velocità iniziale, dopo un certo tempo t avrà il grave descritto uno spazio $BM = x$, ed acquistata una velocità v, domandasi questo spazio, e questa velocità.

L'attrazione essendo proporzionale inversamente ai quadrati delle distanze, abbiamo, chiamando φ la forza acceleratrice, che opera sul grave,

$$\varphi : g :: \overline{AC}^2 : \overline{CM}^2 :: R^2 : (R+h-x)^2, \text{ donde } \varphi = g \cdot \frac{R^2}{(R+h-x)^2},$$

data φ, abbiamo subito $\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi = g \cdot \frac{R^2}{(R+h-x)^2}$.

Per fare l'integrazione, facciamo per un momento $R + h - x = z$, sarà $dx = -dz$, $d^2x = -d^2z$, e $-\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{gR^2}{z^2}$; quindi integrando abbiamo $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gR^2 \int \frac{dz}{z^2} = \frac{2gR^2}{z} + Cost = u^2$, e poichè ad $a = o$ deve corrispondere $z = R + h$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = u^2 = \left(2gR^2\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R+h}\right)$.

integrando ancora l'equazione $\frac{dz}{dt} = R\sqrt{2g}\sqrt{\frac{R+h-z}{z(R+h)}}$, abbiamo

$$t - Rt\sqrt{2g} = \int \sqrt{\frac{z(R+h)}{R+h-z}}\, dz \,,$$ e introducendo di nuovo x,

$$Rt\sqrt{2g} = \sqrt{R+h}\int \sqrt{\frac{R+h-x}{x}}\, dx = \sqrt{R+h}\int \frac{z\, dz}{\sqrt{(R+h)z-z^2}}$$

$$= \frac{+1}{2}\sqrt{R+h}\int \frac{d.[(R+h)z-z^2] - (R+h)dz}{\sqrt{(R+h)z-z^2}}$$

$$= +\sqrt{R+h}\left\{\sqrt{(R+h)z-z^2} + \frac{R+h}{2}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{2z-R-h}{R+h}\right)\right\} + Cost.$$

e volendo, che a $z = R+h$ corrisponda $t=0$, abbiamo

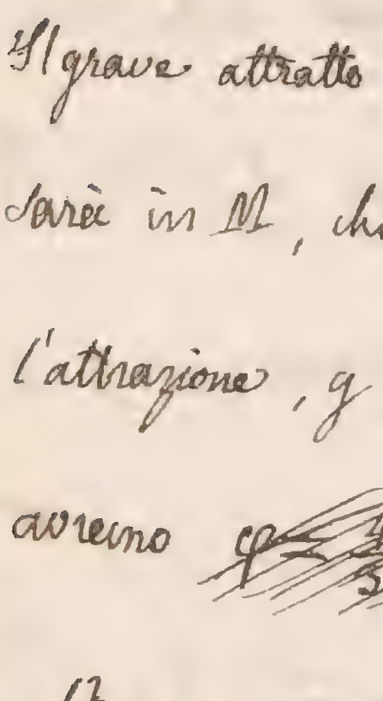
$$Rt\sqrt{2g} = +\tfrac{1}{2}\sqrt{R+h}\left\{2\sqrt{(R+h)z-z^2} + (R+h)\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{2z-(R+h)}{R+h}\right)\right\},$$

in questa formola e nell'altra $u = R\sqrt{2g}\sqrt{\frac{R+h-z}{z(R+h)}}$ facendo $z = R$ si avrà il tempo e la velocità del grave alla fin del moto $\begin{cases} t = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}} \\ u = \sqrt{\frac{2ghR}{R+h}} \end{cases}\Bigg\} 2\sqrt{Rh} + (R+h)\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{R-h}{R+h}\right)$.

Dalla 2ª Proposizione risulta, che un punto M della massa della Terra è attratto verso il centro C, come se nel centro fosse raccolta la massa della sfera di raggio CM, l'attrazione esercitata dalla terra sul punto M è dunque $\frac{4f\pi\int_0^r r^2\delta\, dr}{r^2}$, se sia $CM = r$; per poter eseguire questa integrazione bisognerebbe conoscere δ in funzione di r.

Supponiamo ciò, che non è, ossia supponiamo, che la Terra sia omogenea; sarà allora l'attrazione del punto M della terra eguale $\frac{4}{3}\frac{\pi r^3\delta f}{r^2} = \frac{4}{3}f\pi\delta r$, se dunque la Terra

fosse omogenea, per un punto della sua massa l'attrazione sarebbe proporzionale alla distanza del punto dal centro.



In questa ipotesi cerchiamo come si muoverebbe un grave abbandonato a se stesso in O ad una distanza dal ~~piano~~ centro terrestre $OC = a$, se nella terra si fosse praticato un foro AB entro a cui potesse muoversi il corpo.

N.B. Così in questo problema, che nel precedente facciamo astrazione dalla resistenza dell'aria.

Il grave attratto dalla massa terrestre si muoverà verso C, dopo un certo tempo t sarà in M, chiamiamo x la distanza OM, u la velocità acquistata, φ l'attrazione, g la gravità, che supponiamo cognita, la quale ha luogo in A, avremo ~~$\varphi = \frac{4}{3}\pi x dr$~~ $\varphi : g :: CM : CA :: a-x : R$, donde $\varphi = g\frac{a-x}{R}$,

$\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{a-x}{R}$; facciamo per facilitare l'integrazione $a-x = r$, sarà $dx = -dr$, $d^2x = -d^2r$, e $-\frac{d^2r}{dt^2} = g\frac{r}{R}$. Questa è una equazione lineare di 2° ordine, possiamo dunque scrivere subito il suo integrale $r = A \operatorname{sen} t\sqrt{\frac{g}{R}} + B \operatorname{cos} t\sqrt{\frac{g}{R}}$. In questa formola A, B sono le costanti arbitrarie, e si determinano facendo in modo, che ad $r = a$ corrisponda $t = 0$, $u = -\frac{dr}{dt} = 0$, troveremo, così determinandole, $A = 0$, $B = a$, ora $\frac{dr}{dt} = A\sqrt{\frac{g}{R}} \operatorname{cos} t\sqrt{\frac{g}{R}} - B\sqrt{\frac{g}{R}} \operatorname{sen} t\sqrt{\frac{g}{R}} = -u$, dunque

$r = a \operatorname{cos} t\sqrt{\frac{g}{R}}$, $u = a\sqrt{\frac{g}{R}} \operatorname{sen} t\sqrt{\frac{g}{R}}$;

Per avere il tempo totale della caduta e la velocità acquistata in questo tempo, facciamo nelle formole trovate or ora $v=0$, e ricaviamo quindi t, u;
troveremo $t=\frac{i\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$, $u=a\sqrt{\frac{g}{R}}$, i essendo un numero intero ed impari;
t può dunque avere una infinità di valori, ai quali corrisponde sempre $v=0$, ciò significa, che il grave giunto in C non si ferma, ma si muove da C verso B con velocità iniziale $a\sqrt{\frac{g}{R}}$, oltrepassato C la sua velocità diminuirà, passando per tutti i valori, per cui è passata quando il mobile andava verso C, fino a diventar zero, allora il mobile sarà alla distanza a dal centro, e sarà nello stesso stato, in cui era al principio del movimento, si muoverà per conseguenza di nuovo verso il centro, lo oltrepasserà, e giungerà in A con velocità zero, giunto in A cadrà di nuovo verso C per ritornare poi in A, e così si muoverà sino alla fine dei secoli.

Nella formola $t=\frac{i\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$ facendo $i=1$, $i=3$, $i=5$, ... avremo i tempi

$t'=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$, $t''=\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$, $t'''=\frac{5\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$, ... dei diversi passaggi del mobile al centro, dai quali valori si vede, che il tempo che passa da un passaggio del mobile all' altro è sempre lo stesso, $=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$; in questi valori di t non entra la distanza a dal punto di partenza del mobile al centro, se dunque esistesse un pianeta omogeneo, e fosse possibile in esso di fare un foro, che lo traversasse da parte a parte lanciando due corpi uno dalla superficie del pianeta, l'altro da ~~un altro~~ punto del interno, essi nello stesso tempo giungerebbero al centro del pianeta.

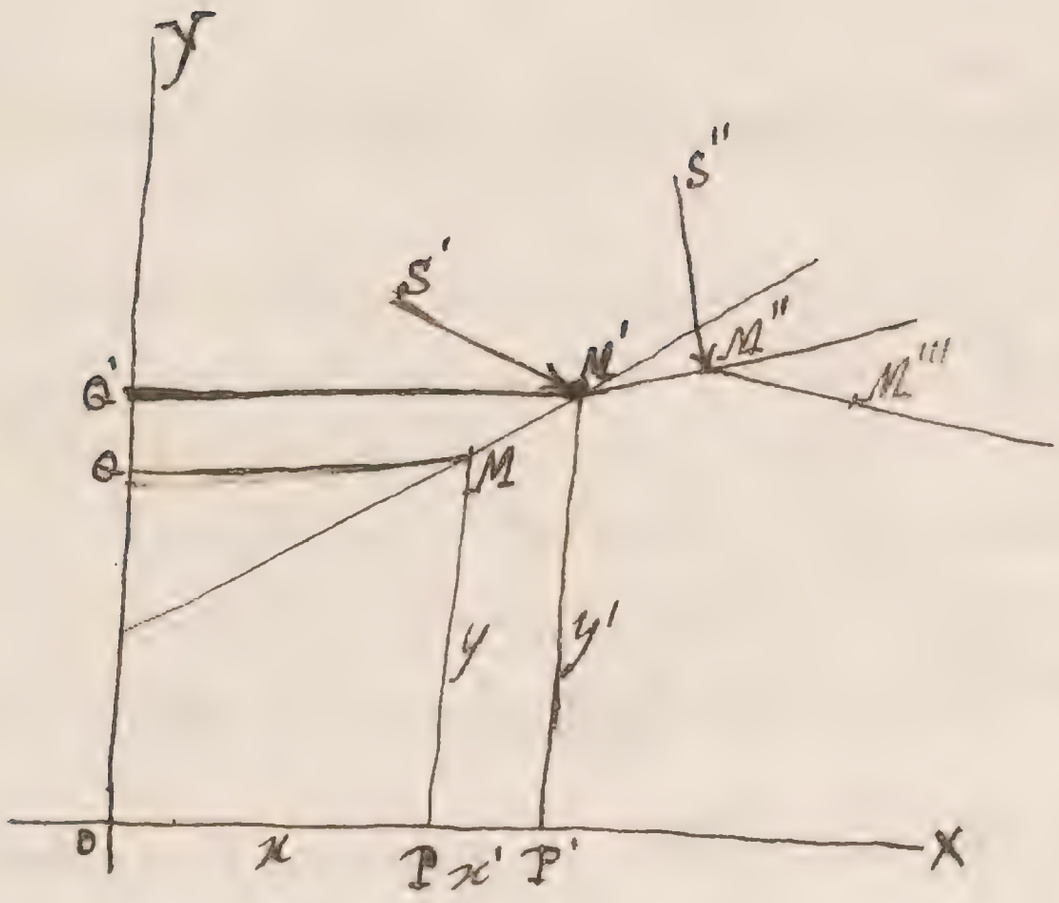
Lezione 9ª

Abbiam trattato finora del moto rettilineo, vediamo ora come si generi il moto curvilineo, e quali sieno le leggi e gli accidenti di un tal moto.

~~affinchè~~ Vi abbia ha moto curvilineo quando la forza producente il moto agisce continuamente sul mobile, e la sua direzione fa angolo con la direzione del movimento.

La piena determinazione di un moto consiste nel sapere dove è il mobile in un'istante qualunque; nel moto rettilineo una equazione tra il tempo e lo spazio è bastante per determinare il moto, poichè la posizione del mobile è determinata quando è determinato lo spazio; volendo nel moto curvilineo fissare la posizione del mobile per mezzo di tre coordinate rettilinee, e, come il più sovente si usa, ortogonali, per determinare queste coordinate x, y, z del mobile dopo un tempo t non basta più una equazione, ma ce ne vogliono tre, che ci dieno x, y, z, il problema della determinazione del moto curvilineo consiste dunque nel trovare tre equazioni fra x, y, z, t, e si può enunciare così:

Dato il punto, le cui coordinate sono a, b, c, da cui parte il mobile, dati gli angoli α, β, γ della direzione del movimento (con tre assi ortogonali) all'istante della partenza, data la velocità iniziale c del mobile, date in grandezza e direzione le forze operanti sul mobile, che generalmente varieranno col variare della posizione del mobile, trovare tre equazioni tra il tempo t, e le coordinate x, y, z del mobile alla fin di questo tempo.



Cominciamo a considerare un mobile che cammina sopra un piano in linea retta, riferiamo la retta a due assi ortogonali posti nel suo piano, sieno x, y le coordinate del mobile M alla fine di un tempo t, sia il moto uniforme, e sia c la velocità costante del mobile, dopo un tempo θ suppo-sto al tempo t, il mobile avrà descritto uno spazio $MM' = c\theta$, per ottenere le coordinate x', y' della posizione M' del mobile, osserviamo, che ~~le proj~~ $x'-x$, $y'-y$ sono le proiezioni dello spazio MM' sugli assi, e che però, se chiamiamo α, β gli angoli, che la retta MM' dire-zione del moto fa cogli assi, $\begin{cases} x'-x = c\theta\cos\alpha \\ y'-y = c\theta\cos\beta \end{cases}$.

Le proiezioni P.Q del mobile sugli assi sono un puro concetto matematico, possiamo tuttavia riguardarle come due mobili, che, mentre il mobile M descrive lo spazio MM', descrivono gli spazi PP', QQ', ora gli spazii PP', QQ' sono proporzionali al tempo in cui sono descritti, le proie-zioni dunque di un mobile, che si muove equabilmente in linea retta, si muovono anche esse con moto equabile sugli assi. Nelle formole superiormente scritte facendo $\theta = 1$, abbiamo gli spazii percorsi dalle proiezioni P.Q nell'unità di tempo, ora lo spazio descritto nell'u-nità di tempo misura la velocità, dunque la velocità con cui si muovono le proiezioni di un mobile, quando questo si muove equabilmente secondo una retta, che fa cogli assi gli angoli α, β, e con la velocità c, sono $c\cos\alpha$, $c\cos\beta$.

Le velocità concuri si muovono le projezioni di un punto M le chiamiamo velocità del punto M secondo gli assi, o le componenti parallele agli assi della velocità del punto M; ~~quindi~~ da questa definizione risulta, che le velocità si compongono e si scompongono secondo le stesse leggi concui si compongono e si scompongono le forze.

Dopo il tempo θ concepiamo, che venga ad agire sul mobile una forza diretta diversamente, che MM' e sia S'M' questa forza, il mobile non camminerà più secondo MM', ma prenderà un'altra direzione per es. M'M'', secondoui si muoverà con una certa velocità C' diversa da C; M'M'' sarà per es cogli assi gli angoli α', β' e le projezioni P', Q' cammineranno ognibilmente con le velocità C'cosα', C'cosβ', sinchè non venga un terzo impulso a cangiarne il moto; supponiamo, che ciò avvenga, e sia S''M'' la direzione di questo 3° impulso, il mobile cangierà di nuovo di direzione movendosi secondo una certa retta M''M''', che farà cogli assi due angoli α'', β'', e con una certa velocità C'', e durante questo 3° stato del suo moto le projezioni si muoveranno con le velocità C''cosα'', C''cosβ''; succedendo altri impulsi in direzioni diverse cangierà di nuovo la direzione e la velocità del mobile, Dunque, quando un mobile è sollecitato da forze intermittenti, a ciascun impulso cangia la direzione del suo moto se cangia la direzione dell'impulso, ed il mobile descrive un poligono.

Se ora immaginiamo, che le intermittenze siano infinitamente brevi,

il mobile invece di un poligono di ~~un numero finito~~ lati finiti descriverà un poligono di lati infinitamente piccoli, e le velocità varieranno per gradi infinitamente piccoli; ~~e~~ ora le forze continue si possono considerare come forze intermittenti, che ad ogni intervallo infinitesimo di tempo danno un impulso al mobile, dunque un mobile sollecitato da forze continue la cui direzione varia ad ogni istante, descrive un poligono infinito-latero, ossia una curva.

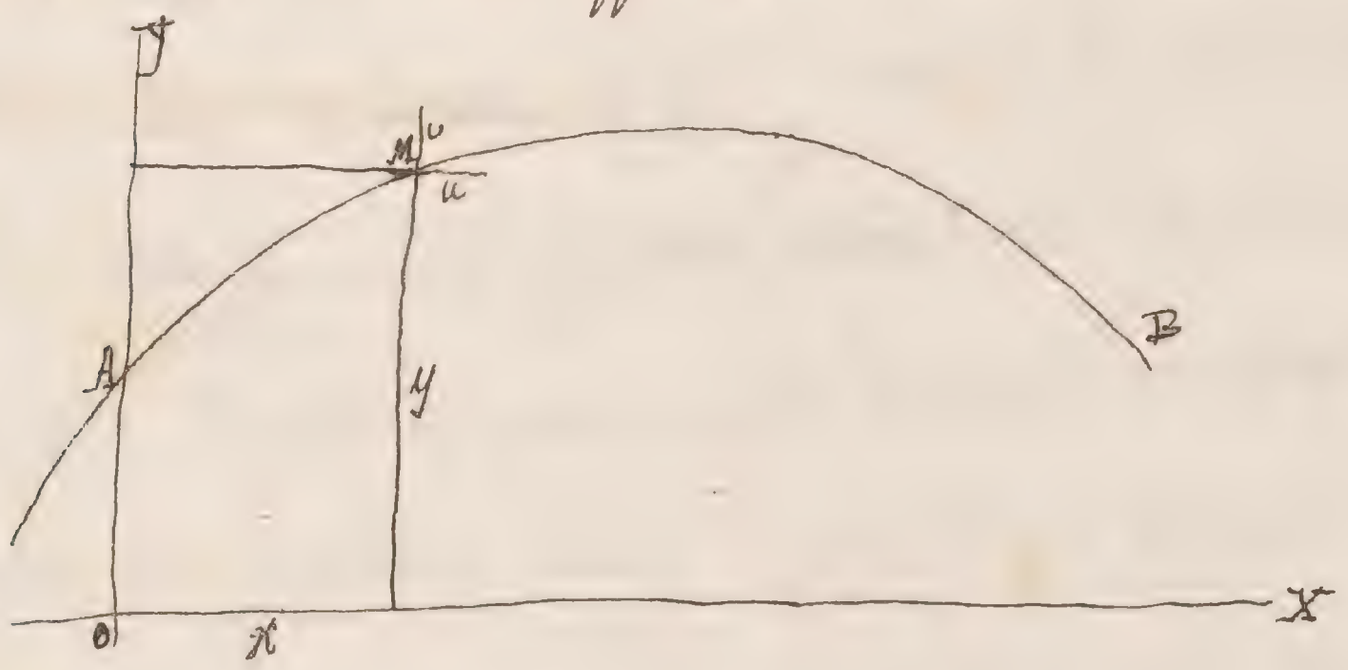
Esaminiamo ora le variazioni di velocità e direzione del mobile in ciascun istante.

Quando un mobile percorre con moto eguabile una retta MM' con la velocità c, poi supponiamo che la forza, la quale gli comunicò la velocità c abbia agito al principio del ~~secondo~~, o che abbia agito nel momento in cui il mobile si ~~mosse~~ da M verso M', ~~da M verso M'~~, insomma che abbia agito in un tempo qualunque, ~~poichè cessata l'azione di una forza su di un mobile prolungata~~ per legge d'inerzia il mobile si muove eguabilmente secondo la direzione della forza con la velocità che gli comunicò; ciò premesso aggiungiamo in M' al mobile la forza S'M' capace di produrre nello stesso tempo in cui la forza S è capace di produrre la velocità c la velocità K, ~~la quale~~ che faccia cogli assi gli angoli λ, μ; ~~ossia, il che è lo stesso~~ aggiungere S'M' farà lo stesso che aggiungere al mobile le componenti parallele agli assi S'cosλ, S'cosμ di S'M', ma ad S possiamo sostituire anche Scosα, Scosβ, dunque a partire da M' il mobile può considerarsi come sollecitato dalle forze Scosα, Scosβ, S'cosλ, S'cosμ, ossia dalle forze Scosα + S'cosλ, Scosβ + S'cosμ, ora le forze Scosα, S'cosλ imprimono alla proiezione sull'asse x del mobile le velocità ccosα, Kcosλ, parimente le forze Scosβ, S'cosμ imprimono alla proiezione del mobile sull'asse delle y le velocità ccosβ, Kcosμ; le proiezioni dunque del mobile sugli assi si muovono eguali per l'azione delle due forze S, S' con le velocità

$C\cos\alpha + K\cos\lambda$, $C\cos\beta + K\cos\mu$, quindi il seguente teorema fondamentale;

Quando un corpo si muove in un piano secondo una certa retta con una certa velocità, se sul mobile viene ad agire una forza novella capace di produrre una certa velocità, e sieno X, Y le componenti parallele agli assi di questa nuova forza, gl'incrementi delle velocità delle projezioni del mobile sono precisamente le velocità, che le forze X, Y sarebbero capaci di produrre da se.

Stabiliti questi principii la determinazione del moto curvilineo non presenta più alcuna difficoltà.



Sia M la posizione del mobile alla fin del tempo t, sieno x, y le coordinate di M, sieno u, v le velocità parallele agli assi corrispondenti alla posizione M del mobile, sieno X, Y le componenti parallele agli assi delle forze a cui è soggetto il mobile, le quali possiamo concepire come funzioni implicite del tempo t, non farà errore il supporre, che le forze agiscano per intermittenza brevissime dopo intervalli di tempo brevissimi dt, ora X, Y esprimono le forze, che agiscono sul mobile, ed altresì le velocità, che queste sono capaci di produrre nell'unità di tempo, dunque le velocità prodotte nel tempo dt sono espresse da Xdt, Ydt, e le velocità dopo il tempo $t+dt$, sono espresse da $u+Xdt, v+Ydt$, ora in lingua di Calcolo

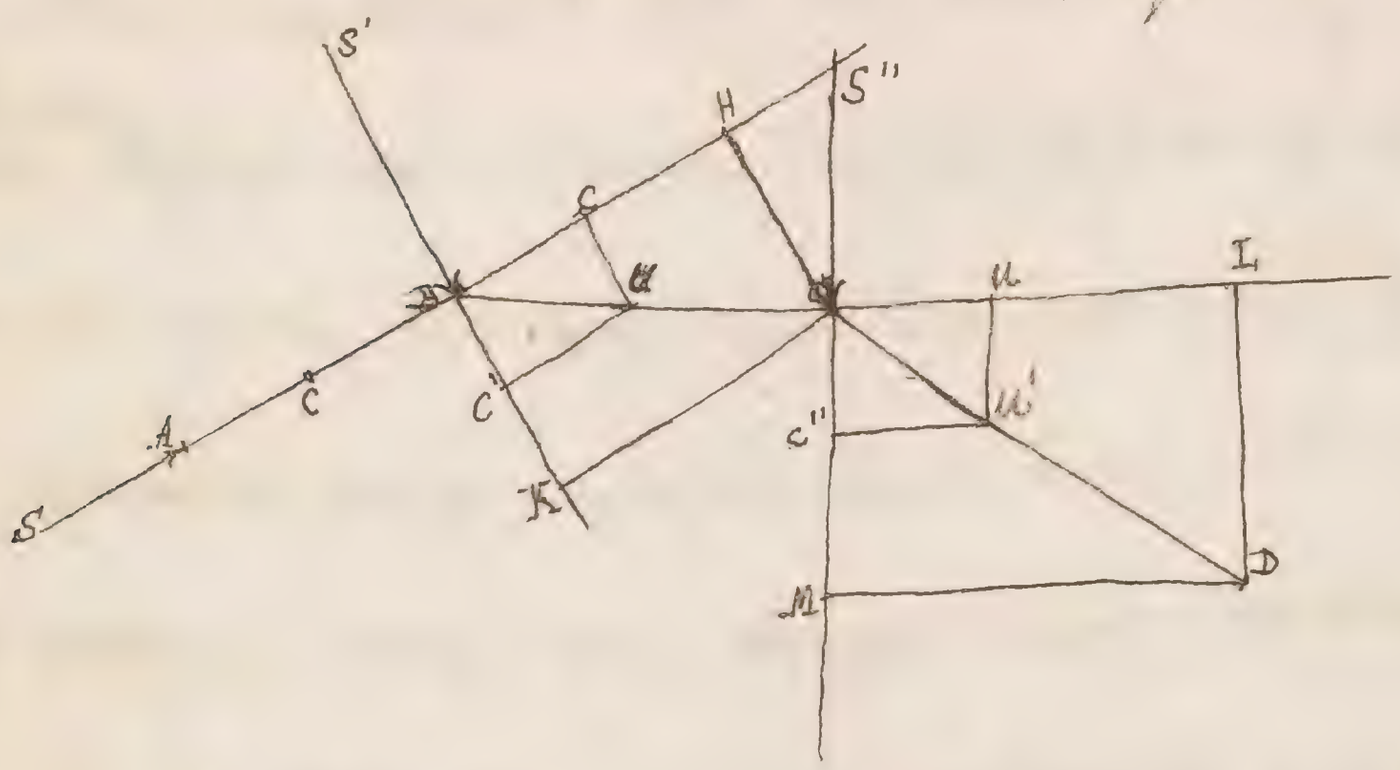
differenziale gli incrementi, che subiscono le quantità u, v variabili col variare di t, ~~dt~~ corrispondenti all' incremento dt di t, sono du, dv, dunque $du = x\,dt$, $dv = y\,dt$;

Da queste equazioni abbiamo $X = \frac{du}{dt}$, $Y = \frac{dv}{dt}$, che sono le espressioni delle forze acceleratrici di due mobili, che si muovono secondo due rette con le velocità u, v, dunque quando un mobile è sollecitato da due forze X, Y parallele agli assi le proiezioni si muovono l'una come se fosse sollecitata dalla forza X, l'altra come se fosse sollecitata dalla forza Y, ora gli spazii descritti dalle proiezioni nel tempo t sono x, y, dunque $u = \frac{dx}{dt}$, ed $X = \frac{d^2x}{dt^2}$; queste due ultime equazioni racchiudono in se la piena $v = \frac{dy}{dt}$ $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$ soluzione del problema della determinazione del moto curvilineo. Infatti perchè un moto sia determinato bisogna che si conoscano le intensità e le direzioni delle forze, che sono applicate al mobile, in ciascun istante, ossia bisogna, che si conoscano x, y in funzione del tempo t, ora, quando si conoscono queste funzioni, integrando le dette equazioni abbiamo subito x, y in funzione di t, e quindi u, v in funzione di t, ed eliminando t fra le due equazioni in x, t ed in y, t, abbiamo una equazione in x, y, che sarà l'equazione della curva descritta dal mobile.

L'integrazione introdurrà nelle equazioni del moto 4 costanti arbitrarie; quando sarà fissato il punto di partenza del mobile, e le sue velocità iniziali parallele agli assi potremo determinare. Infatti se a, b sieno le coordinate del punto di partenza, ~~d e~~ le velocità iniziali parallele agli assi, esprimendo che a $t = 0$ deve corrispondere $x = a$, $y = b$, $u = c$, $v = e$, avremo quattro equazioni di condizione fra le quattro costanti arbitrarie.

Lezione 10.ª

Prima d'analizzare il movimento curvilineo, e di ricercarne le proprietà generali per mezzo delle sue equazioni differenziali, vediamo come geometricamente si possa risolvere il problema della determinazione del moto curvilineo.



Sia un mobile in A sollecitato da una forza S, che tenda a fargli descrivere la retta AB con velocità c, dopo un tempo θ, durante il quale il mobile avrà percorso uno spazio AB e sarà venuto in B, venga una nuova forza S' ad agire su di esso tendendo a farlo muovere nella direzione B C' con una velocità C', per l'azione di questa novella forza il mobile cangierà direzione.

Per l'azione della forza S tendendo il mobile nell'unità di Tempo ~~il mobile~~ a descrivere lo spazio Bc, che misura la velocità c, e per l'azione di S' tendendo a descrivere lo spazio BC', che misura la velocità C', nell'unità di tempo, per l'azione simultanea delle due forze nell'unità di tempo percorrerà la diagonale B u del parallelogramma BC'uc. Le forze S, S' noi le supponiamo istantanee, il mobile si muoverà dunque secondo B u con moto equabile e con la velocità u rappresentata da Bu, se non verrà altra forza di impulso a farnelo deviare. Dopo un tempo θ' nel quale il mobile sarà venuto in C supponiamo, che una forza S'' gli dia un'impulso nella direzione S''C imprimendogli secondo questa direzione una velocità C'',

per quest'impulso nell'unità di tempo tenderà a descrivere lo spazio C c'' rappresentante la velocità c'', per legge d'inerzia conservando la velocità u nella direzione C u nello stesso tempo tenderà a descrivere lo spazio C u = B u, esso dunque percorrerà nell'unità di tempo la diagonale C ù del parallelogramma C c'' ù u, secondo la quale continuerà a muoversi con velocità ù rappresentata da C ù finchè non verrà alcuna nuova forza a turbarlo nel suo moto.

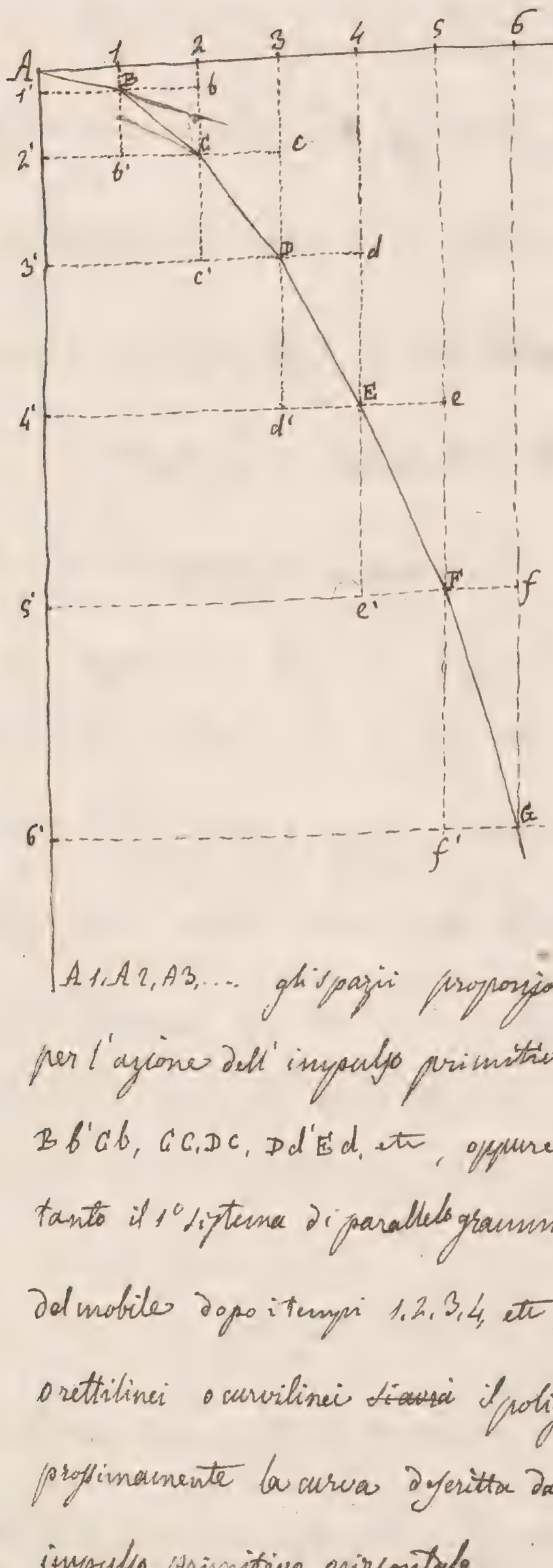
Se qualche nuova forza dopo un tempo qualunque gli darà un nuovo impulso, operando nello stesso modo con cui abbiamo operato, quando venivano ad agire le forze S', S'', potremo determinare la novella direzione del mobile; quando dunque più forze agiscono per impulsi sopra un mobile, possiamo graficamente senza il soccorso dell'analisi segnare il poligono, che il mobile descriverà, e considerando le forze continue come forze intermittenti, che ad ogni intervallo piccolissimo di tempo danno impulsi piccolissimi al mobile potremo anche con un po' di fatica segnare per punti la curva, o traiettoria di un mobile sollecitato da forze continue.

Vi ha un'altra maniera di descrivere il poligono o la curva percorsa da un mobile, e consiste nella ricerca immediata dei vertici del poligono, o dei punti della curva, mentre col metodo antecedente trovavamo ad ogni le posizioni del mobile dopo l'unità di tempo dall'azione delle forze.

Per costruire il poligono descritto da un mobile come del caso precedente, cerchiamo dopo il tempo θ' dove sarà il mobile per l'azione del solo impulso S, e dove sarà per l'azione del solo impulso S, prendendo B H = θ'c, B K = θ'c', e facciamo il parallelogramma B H C K, il mobile dopo il tempo θ' dalla sua posizione B sarà venuto in C al momento, in cui viene ad agire su di esso la forza S''. Supponiamo, che ricevuto l'impulso S'' non venga altra forza ad agire sul mobile fino dopo un tempo θ'', costruiamo il parallelogramma C L D M co' lati C L = θ''u = $\frac{\theta''}{\theta'}$ B G, C M = θ''c'', sarà D la posizione del mobile al momento, che gli viene il nuovo impulso. Continuando gli stessi

continueremo ad operare in guisto modo, e segneremo così tutto il poligono descritto dal mobile.

Facciamo subito una applicazione di questi principii.



Una palla è gettata orizzontalmente nella direzione AM con velocità rappresentata da A1, la gravità, che agisce continuamente sulla palla la faderiare dalla AM, si domanda qual curva le farà descrivere.

Sieno A1', A2', A3', ... gli spazii verticali, che la gravità farebbe percorrere dalla sola alla palla nei tempi 1, 2, 3...., i quali spazii sono per conseguenza :: 1 : 4 : 9 : ...., sieno

A1, A2, A3, ... gli spazii proporzionali ai tempi, che il mobile descriverebbe per l'azione dell'impulso primitivo, costruiamo i parallelogrammi A1'B1, Bb'Cb, CC.DC, Dd'Ed, etc, oppure i parallelogrammi A1'B1, A2'C2, A3'D3, A4'E4, etc, tanto il 1° sistema di parallelogrammi come il 2° ci daranno le posizioni B, C, D, E, etc del mobile dopo i tempi 1, 2, 3, 4, etc, unendo i punti A, B, C, D, E, etc con tratti o rettilinei o curvilinei avremo il poligono o la curva risultante ABCDE.... sarà prossimamente la curva descritta dal mobile per l'azione della gravità, e dell'impulso primitivo orizzontale.

Prendendo come assisse le distanze A1, A2, A3, ecc., che sono proporzionali ai tempi, le verticali A1', A2', A3', ecc. saranno le ordinate della curva, ora

gli spazii descritti da un grave che cade verticalmente sono come i quadrati dei tempi, e le ordinate sono come i quadrati delle ascisse, dunque la curva è una parabola.

Il parametro di questa parabola è facile ad ottenersi, sia c la velocità del mobile nel suo primitivo, dopo un tempo t sarà $x = c\,t$, $y = \frac{1}{2} g t^2$; eliminando t tra queste equazioni abbiamo $y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{c^2}$, e quindi $x^2 = \frac{2c^2}{g} y = 4 \cdot \frac{c^2}{2g} y^2$, il parametro è dunque $4 \cdot \frac{c^2}{2g}$, $\frac{c^2}{2g}$ è ~~lo spazio~~ l'altezza dovuta alla velocità c, dunque la curva descritta da un grave lanciato orizzontalmente è una parabola, che ha l'asse verticale, e che ha il parametro eguale al quadruplo dell'altezza dovuta alla velocità di projezione.

Nello stesso modo, con cui abbiamo dimostrato, che le equazioni differenziali del moto curvilineo di un mobile, che si muove in un piano sono $X = \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$, ~~si dimostrerebbe~~ essendo X, Y le componenti parallele agli assi di tutte le forze, che agiscono sul mobile, si dimostrerebbe facilmente che, essendo X, Y, Z le componenti parallele a tre assi ortogonali delle forze che sollecitano il mobile, le equazioni differenziali del moto del mobile, che si muove allora nello spazio sono

$$x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

prendendo t per variabile indipendente, ossia costante; quando vorremo lasciar libera la scelta della variabile indipendente scriveremo

$$x\,dt = d \cdot \frac{dx}{dt}, \quad y\,dt = d \cdot \frac{dy}{dt}, \quad z\,dt = d \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Se denominiamo colle lettere u, v, w le velocità parallele agli assi del mobile, avremo

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

e chiamando V la velocità assoluta del mobile, avremo

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \frac{ds}{dt}.$$

Per avere la direzione di questa velocità, chiamiamo λ, μ, ν gli angoli, che essa fa cogli assi, avremo

$$\cos\lambda = \frac{u}{V} = \frac{dx}{ds}, \quad \text{ora questo}$$

$$\cos\mu = \frac{v}{V} = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos\nu = \frac{w}{V} = \frac{dz}{ds}$$

sono precisamente i coseni degli angoli, che la tangente alla curva fa cogli assi, dunque la direzione della velocità assoluta V del mobile è la tangente alla curva, che esso descrive, quindi nel moto curvilineo intendiamo per direzione del movimento la direzione della tangente alla curva, e per velocità del mobile la velocità, ~~con cui~~ ~~esso avrebbe~~ si muoverebbe dalla tangente se cessasse l'azione delle forze.

Eliminando t fra le equazioni generali del moto curvilineo avremo due equazioni fra x, y, z, che determineranno la curva, o traiettoria del mobile; nella maggior parte dei casi le integrazioni non si possono effettuare, ~~vediamo~~ alcune proprietà generali del moto curvilineo in alcuni casi agevolano la soluzione del problema della determinazione di questo moto, vediamo di scoprire tali proprietà.

Moltiplichiamo la 1ª delle equazioni generali per dx, la 2ª per dy, la 3ª per dz, e sommiamole, abbiamo $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = \frac{1}{2}\,d.\frac{ds^2}{dt^2}$,

considerando t come variabile indipendente; ora $\frac{ds^2}{dt^2} = V^2$, dunque

$$(a). \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = V\,dV,$$

ma $X\frac{dx}{ds}$ è la componente tangenziale della forza X, $Y\frac{dy}{ds}$, $Z\frac{dz}{ds}$ sono parimenti le componenti tangenziali delle forze Y, Z, dunque $\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{ds}$ è la somma delle componenti tangenziali di tutte le forze, che operano sul mobile, chiamando I questa somma, l'equazione (a) diventa

$$I\,ds = V\,dV,$$

Questa equazione ci insegna, che nel moto curvilineo le sole forze capaci di far variare la velocità sono le componenti tangenziali, e ci somministra

perciò un mezzo per riconoscere quando il moto è accelerato o ritardato, è di vedere se T è diretta nella direzione del movimento od in senso contrario; nel 1° caso il moto è accelerato, nel 2° è ritardato, in altri termini se la risultante delle forze operanti sul mobile fa angolo acuto colla tangente il moto è accelerato, se fa angolo ottuso il moto è ritardato.

L'equazione $T ds = V dV$ sarà differenziale del 1° ordine, quando potremo integrare $X dx + Y dy + Z dz$, ossia quando questo trinomio sarà un differenziale esatto di una funzione $\Phi(x,y,z)$ differenziata senza stabilire nessuna relazione fra le variabili x, y, z; quando ciò sarà, avremo $V^2 = 2\Phi(x,y,z) + Cost.$, volendo, che al principio del moto le coordinate del mobile sieno a, b, c, e la sua velocità C, dovrà essere $C^2 = 2\Phi(a,b,c) + Cost$, sottraendo questa equazione dall'altra la costante sparisce e resta

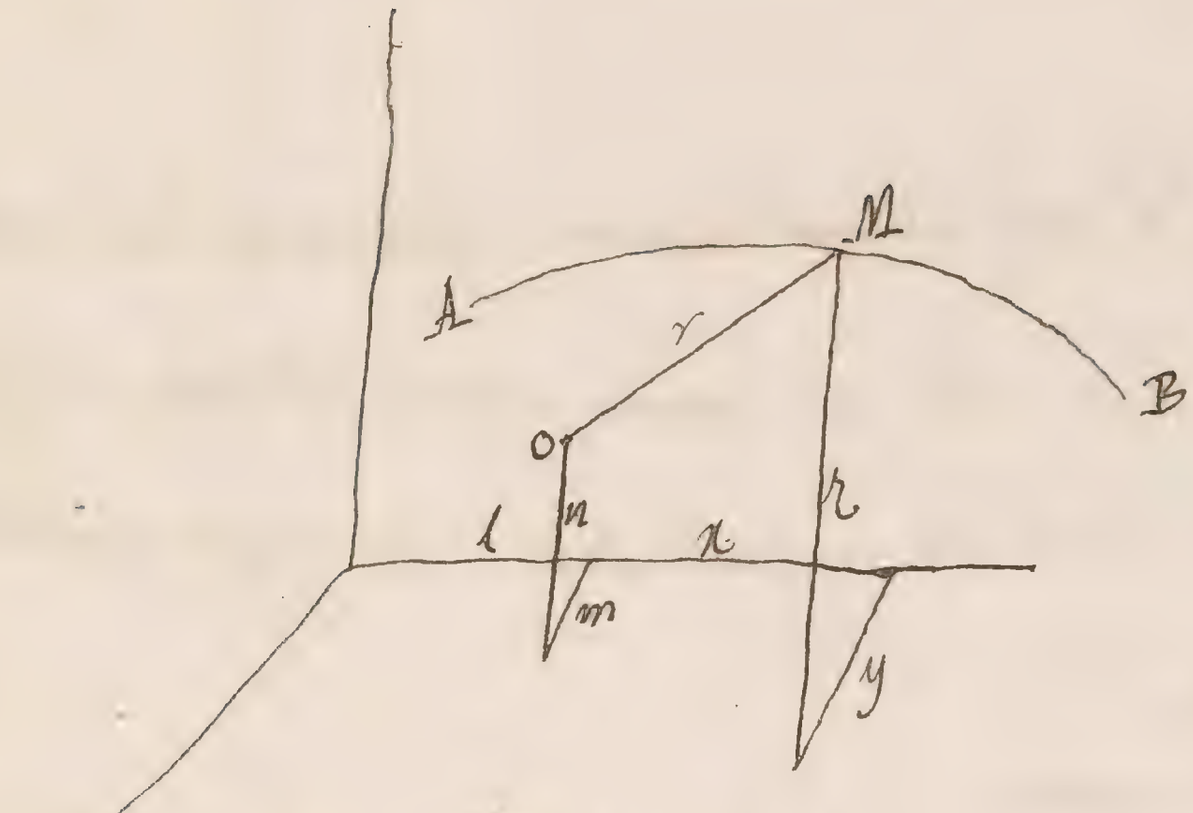
$$V^2 - C^2 = 2\Phi(x,y,z) - 2\Phi(a,b,c).$$

Lezione 11.ª

La resistenza dei mezzi, e l'attrito sono funzioni della velocità, dunque quando un mobile si muove in un mezzo resistente, od avviene qualche attrito ad alterare il suo movimento le Componenti X, Y, Z parallele agli assi di Tutte le forze sollecitanti il mobile sono funzioni anche della velocità, e il trinomio $X dx + Y dy + Z dz$ non è un differenziale esatto.

Le forze X, Y, Z risultino dall'attrazione di un punto fisso, esaminiamo se in questo caso il trinomio sia un differenziale esatto.

Sieno b, m, n le coordinate del centro attraente, sia R l'intensità dell'attrazione, sia AB



la traiettoria, M una posizione qualunque del mobile avente per coordinate x, y, z, r la distanza OM da M al centro attraente, i coseni degli angoli di OM cogli assi saranno $\frac{x-l}{r}$, $\frac{y-m}{r}$, $\frac{z-n}{r}$, e sarà per conseguenza $X = R\frac{x-l}{r}$, $Y = R\frac{y-m}{r}$, $Z = R\frac{z-n}{r}$. Sostituendo questi valori nel trinomio, esso diventa $\frac{R}{r}\{(x-l)dx+(y-m)dy+(z-n)dz\}$, epoichè $r = \sqrt{(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2}$, abbiamo

$$X dx + Y dy + Z dz = R\, d.\sqrt{(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2} = R\, dr;$$

nel caso che il punto O respingesse il mobile sarebbe $X dx + Y dy + Z dz = -R dr$, da queste formole si scorge, che quando un mobile è attratto o respinto da un punto fisso il trinomio $X dx + Y dy + Z dz$ è differenziale esatto se l'attrazione R è funzione della distanza r.

Se invece di un centro solo ve ne fossero parecchi, le cui coordinate fossero $\left.\begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} l' \\ m' \\ n' \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} l'' \\ m'' \\ n'' \end{matrix}\right\}$, ----, e le cui attrazioni fossero $R, R', R'', \ldots$, allora X, Y, Z sarebbero la somma delle componenti parallele agli assi di queste attrazioni, e chiamando $r, r', r'', \ldots$ le distanze dal mobile ai centri attraenti, sarebbe

$$X dx + Y dy + Z dz = R\, dr + R' dr' + R'' dr'' + \ldots,$$

dunque quando un mobile è attratto da più punti fissi il trinomio è differenziale esatto se l'attrazione R è funzione di r, se R' è funzione di r', se R'' è funzione di $r'', \ldots$

Se il centro attraente, od uno dei centri attraenti si muove col muoversi del mobile, ossia col variare del tempo, allora l, m, n, X, Y, Z saranno funzioni del tempo, e il trinomio non è più un differenziale esatto. Similmente se il punto di sfa in un mezzo resistente il trinomio non è più differenziale esatto.

Vediamo ora come l'equazione $\int_{V}^{V=V} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = V^2 - C^2$ si possa enunciare con parole ordinarie; moltiplichiamo $\int_{V}^{V=C}$ i due membri di essa per la massa del mobile, che diameremo M, avremo allora $MV^2 - MC^2 = 2\int [MX\,dx + MY\,dy + MZ\,dz] = 2\left\{\int MX\,dx + \int MY\,dy + \int MZ\,dz\right\}$.

Il 1° membro di questa equazione è l'incremento di forza viva tra le posizioni del mobile determinate dalle coordinate $\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$; nel 2° membro MX è la forza motrice che sollecita il mobile parallelamente all'asse delle x, $MX\,dx$ è la quantità elementare d'azione parallelamente all'asse delle x, $\int MX\,dx$ è la quantità d'azione sviluppata parallelamente all'asse delle x da tutte le forze sollecitanti il mobile tra le posizioni $\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$, parimente $\int MY\,dy$, $\int MZ\,dz$ sono le quantità d'azione sviluppate parallelamente agli assi delle y, e delle z da tutte le forze tra le posizioni $\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$, il 2° membro è dunque il doppio della quantità d'azione sviluppata tra le posizioni $\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$ da tutte le forze. Dunque l'equazione si può tradurre con parole ordinarie:

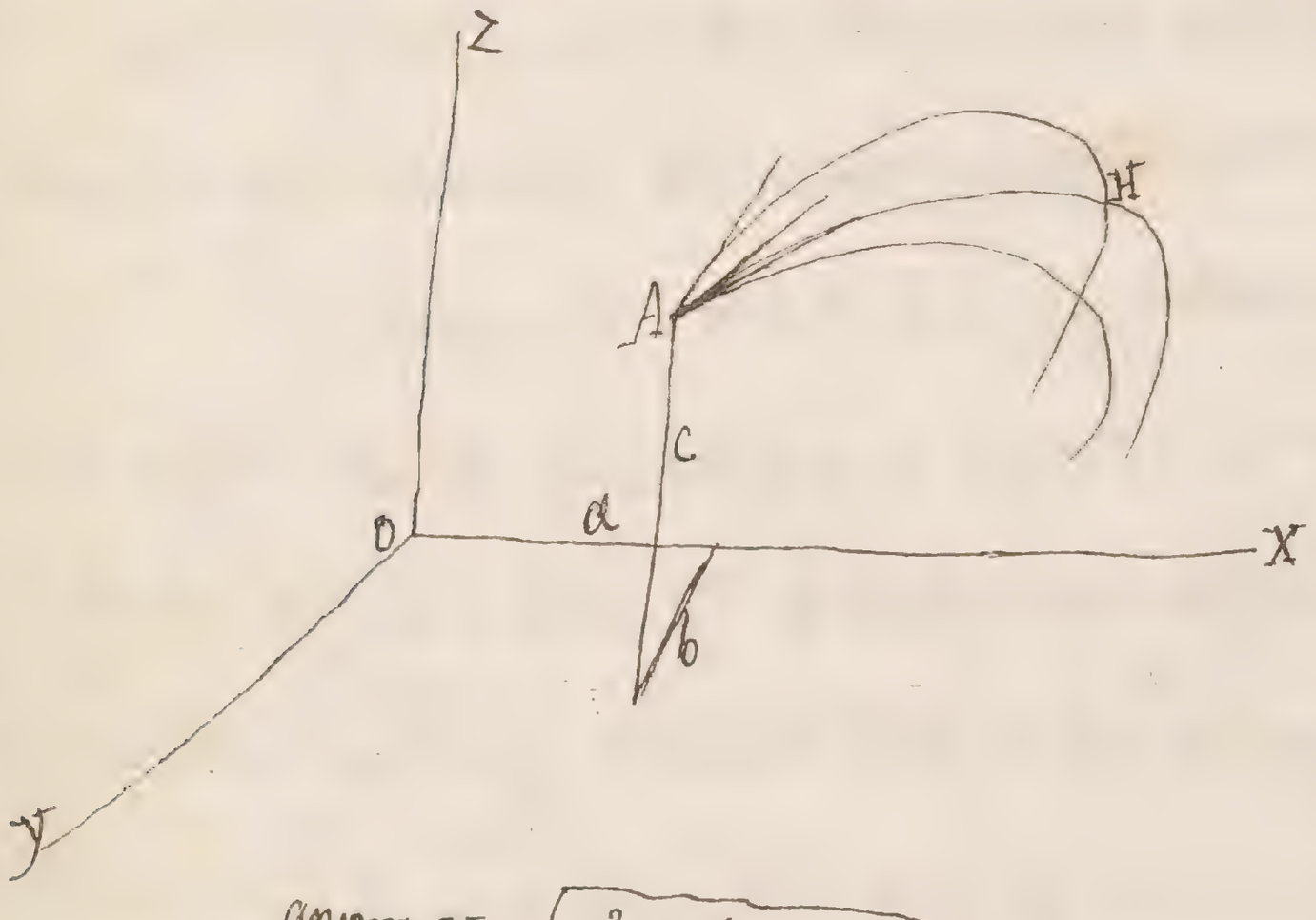
L'incremento di forza viva sviluppata tra due posizioni qualunque di un mobile sollecitato da un numero qualunque di forze comunque dirette è eguale al doppio della quantità d'azione sviluppata tra le medesime posizioni da tutte le forze.

Alla medesima equazione possiamo dare un' altra interpretazione, che è anche utile di conoscere.

La traiettoria di un mobile lanciato con velocità iniziale c da un punto a, b, c, secondo una

direzione, che fa cogli assi gli angoli λ, μ, ν varia col variare di $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$, le quali quantità entrano come parametri nelle sue equazioni; tutte queste varie trajettorie appartengono però ad una ~~stessa~~ famiglia di curve, intendendosi per famiglia di curve ~~tutte le~~ un complesso di curve, le cui equazioni differiscono soltanto nei valori dei coefficienti delle variabili x, y, z.

La equazione $V^2 - C^2 = 2\{\varphi(x,y,z) - \varphi(a,b,c)\}$, in cui $\varphi(x,y,z) = \int(X dx + Y dy + Z dz)$ non contiene λ, μ, ν, essa dunque appartiene a tutte le trajettorie, che si hanno facendo variare λ, μ, ν; fra questa famiglia di trajettorie alcune si taglieranno, Supponiamo, che due si taglino in H, si



per la 1ª che per la 2ª la velocità in H sarà, essendo $\left.\begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \end{matrix}\right\}$ le coord.e di H,

$V = \sqrt{C^2 + 2(\varphi(a',b',c') - \varphi(a,b,c))}$;

Se altre trajettorie venissero a passare per H, nel punto H la velocità sarebbe ancora $V = \sqrt{C^2 + 2(\varphi(a',b',c') - \varphi(a,b,c))}$, concludiamo quindi, che se un mobile percorre più trajettorie diverse in grazia della diversa direzione della sua velocità iniziale sotto l'azione delle stesse forze acceleratrici, esso arriva nel punto d'intersezione delle trajettorie colla stessa velocità, ogniqualvolta che $Xdx + Ydy + Zdz$ è differenziale esatto. Se la trajettoria è una curva chiusa, il mobile passa una infinità di volte per uno stesso punto, e vi passa sempre colla stessa velocità ogniqualvolta, che il trinomio è un diff.le esatto.

I pianeti descrivono curve chiuse; per essi il trinomio è un differenziale esatto, poichè è l'attrazione, che li fa muovere, la quale varia in ragion inversa dei quadrati delle distanze; Se si movessero in una mezzo resistente ciò non sarebbe più vero, e oltre a ciò non descriverebbero sempre la stessa curva, ma bensì la loro orbita si restringerebbe sempre più sino a che cadrebbero nel Sole, che è il punto attraente; egli è ~~perciò, che~~ per riconoscere se vi sia un mezzo resistente, che occupi tutto lo spazio, che gli astronomi mettono tanta cura nel determinare le orbite dei Pianeti e delle Comete, poichè come abbiano scoperto qualche cambiamento notevole in tali orbite sarà tosto data la questione se vi sia un'etere o aria sottilissima empiente tutti gli spazii, o no.

Abbiamo conchiuso poco fa, che un mobile, il quale si muove sotto l'azione di forze acceleratrici, arriva in un punto H descrivendo una traiettoria colla stessa velocità, che se avesse percorsa un'altra traiettoria per giungervi, purchè d'altra traiettoria l'avesse descritta sotto l'azione delle stesse forze, partendo dallo stesso punto e con velocità iniziale istessa ma diretta diversamente; non vi sono però i soli punti d'intersezione di più traiettorie, per cui la velocità è la medesima;

Infatti ogniqualvolta, che $\varphi(x,y,z)$ è lo stesso, la velocità V è anche la stessa, dunque tutte le volte, che $\varphi(x,y,z)$ prende uno stesso valore costante K il mobile ha la stessa velocità, ora i valori di x,y,z che fan riprendere alla funzione il valore K, sono le coordinate dei punti della superficie $\varphi(x,y,z)=K$, dunque se da uno stesso punto A con la stessa velocità iniziale si lanciano tanti mobili in direzioni diverse ogniqualvolta che essi vanno ad incontrare la superficie, la cui equazione è $\varphi(x,y,z)=K$, hanno la stessa velocità.

Supponiamo, che X, Y, Z provengano dalla forza di gravità, prendendo gli assi due in un piano orizzontale, e quello delle z verticale e volto all'insù, avremo $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$,

donde sostituendo nel trinomio si ricava $\varphi(x,y,z) = -g\xi$; eguagliando questa funzione alla costante K abbiamo l'equazione della superficie, per i punti della quale la velocità è la stessa, $z = -\frac{K}{g}$. Questa equazione appartiene ad un piano orizzontale, dunque se lanciamo diversi mobili con la stessa celerità iniziale da uno stesso punto A, ma in direzioni differenti, giungono a ferire un piano orizzontale qualunque con la stessa velocità.

Nello stesso caso della gravità l'equazione, che ci da V. diventa $V^2 - C^2 = 2\{cg - gz\}$, $V^2 - C^2 = 2g(c-z)$; nel moto dei gravi cadenti o salienti verticalmente abbiamo $V^2 - C^2 = \pm 2g(c-z)$, essendo V la velocità del grave, C la velocità iniziale, c l'altezza contata al disopra di un piano orizzontale dalla quale il grave discende, o dalla quale parte per salire, z l'altezza al disopra dello stesso piano corrispondente alla velocità V, e corrispondendo il segno + al moto dei gravi cadenti, il segno — a quello dei gravi salienti; la coincidenza di questa equazione coll'altra conduce al seguente teorema;

Quando un grave cade o sale secondo una qualsivoglia curva egli ha ad ogni altezza la stessa velocità, che le fosse disceso o salito verticalmente alla stessa altezza con la stessa velocità iniziale.

Lezione 12ª.

Vediamo qualche altra proprietà appartenente a moti curvilinei particolari. Supponiamo che X, Y, Z provengano dalle attrazioni o repulsioni di un punto fisso; mettiamo l'origine degli assi nel punto fisso, chiamiamo R ed r l'intensità dell'attrazione, e la distanza a cui questa si esercita, sarà $X = -\frac{Rx}{r}$, $Y = -\frac{Ry}{r}$, $Z = -\frac{Rz}{r}$,

e per conseguenza le equazioni del moto saranno $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Rx}{r}, \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ry}{r}, \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{Rz}{r}$;

moltiplichiamo la 1ª per y, la 2ª per x, e sottraggiamo la 2ª dalla 1ª, moltiplichiamo la 1ª per z, la 3ª per x, e sottraggiamo questa dalla 1ª, finalmente moltiplichiamo la 2ª per z, la 3ª per y, e sottraggiamole avremo le tre seguenti equazioni

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Inquieste equazioni non entra R, esse sono dunque vere qualunque sia la legge dell'attrazione ma i primi membri di queste equazioni sono differenziali esatti; infatti $\frac{d\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}$,

$$\frac{d\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)}{dt} = z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}, \quad \frac{d\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right)}{dt} = z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Le tre equazioni precedenti integrate prendono dunque la forma

$$(a), \quad y\,dx - x\,dy = \varepsilon\,dt, \quad z\,dx - x\,dz = \varepsilon'dt, \quad z\,dy - y\,dz = \varepsilon''dt.$$

A queste equazioni possiamo dare una chiara e facile interpretazione.

La 1ª equazione non contiene z, essa dunque si riferisce alla proiezione fatta sul piano xy della traiettoria del mobile, cioè le altre due equazioni si riferiscono la 2ª alla proiezione della traiettoria sul piano xz, la 3ª alla proiezione della traiettoria sul piano yz, ora

N. B.
Le aree sono contate sul piano xy da x verso y, sul piano yz da y verso z, sul piano xz da x verso z.

$y\,dx - x\,dy$ geometricamente esprime il doppio dell'area del settore compreso tra due raggi vettori corrispettivi della curva, le cui coordinate correnti sono x, y, e dalla curva stessa, nel nostro caso $y\,dx - x\,dy$ è dunque il doppio dell'area del settore che la proiezione del raggio vettore r sul piano xy genera sopra questo piano, similmente i binomii $z\,dx - x\,dz$, $z\,dy - y\,dz$ esprimono i doppii delle aree dei settori generati dalle proiezioni del raggio vettore sui piani xz, yz, ma le tre equazioni precedenti ci dicono che queste binomii sono proporzionali all'tempetto dt, dunque

anche le aree sono proporzionali al tempetto dt, in cui furono descritte, ora le quete aree elementari sono proporzionali al tempo dt, in cui furono descritte, anche le aree generate in un tempo t sono proporzionali al tempo t, dunque quando un mobile si muove in virtù di una velocità iniziale e di una forza centrale qualunque le aree descritte in tempi finiti dalle tre projezioni del raggio vettore sui tre piani coordinati sono proporzionali ai tempi.

Questo teorema è conosciuto sotto il nome di Teorema della Conservazione delle aree, come il teorema somministratoci dall'equazione $v^2 - c^2 = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ è conosciuto sotto il nome di Teorema della Conservazione delle forze vive.

Moltiplicando la 1ª delle equazioni (a) per z, la 2ª per y, la 3ª per x, sommando la 1ª con la 3ª, e dalla somma sottraendo la 2ª ricavasi

$\varepsilon'' x - \varepsilon' y + \varepsilon z = 0$. Questa equazione ci apprende, che ogniqualvolta un mobile si muove in grazia di una velocità iniziale, e di una forza centrale esso descrive una traiettoria che è tutta contenuta in un piano il quale passa pel centro di attrazione.

Date le coordinate a, b, c della posizione del mobile al principio dei tempi, data la velocità iniziale c, e la direzione di questa per mezzo degli angoli λ, μ, ν, che essa fa cogli assi, si ha subito

$\varepsilon = bc\cos\lambda - ac\cos\mu$, $\varepsilon' = cc\cos\lambda - ac\cos\nu$, $\varepsilon'' = cc\cos\mu - bc\cos\nu$, e quindi l'equazione del piano in cui si muove il mobile

$$x\{c c\cos\mu - b c\cos\nu\} + y\{a c\cos\nu - c c\cos\lambda\} + z\{b c\cos\lambda - a c\cos\mu\} = 0,$$ che dividendo per c diventa

$$x\{c\cos\mu - b\cos\nu\} + y\{a\cos\nu - c\cos\lambda\} + z\{b\cos\lambda - a\cos\mu\} = 0,$$

Resta a determinarsi la figura dell'orbita descritta da un punto soggetto ad una forza centrale.

L'orbita di cui cerchiamo le equazioni essendo una curva piana possiamo intenderla riferita a due assi ortogonali contenuti nel suo piano, allora le equazioni generali del moto saranno $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Rx}{r}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ry}{r}$, l'equazione delle forze vive sarà $V^2 - C^2 = 2\varphi(x,y) - 2\varphi(a,b)$, ed avremo delle tre equazioni (a) solamente la 1ª $y\,dx - x\,dy = \varepsilon\,dt$; Essendo $V = \frac{ds}{dt}$, $\varphi(x,y) = -\int R\,dx$, vogliamo scrivere l'equazione delle forze vive sotto quest'altra forma $\frac{ds^2}{dt^2} - C^2 = -2\int R\,dx$, sostituendo in questa equazione a dt il suo valore $dt = \frac{y\,dx - x\,dy}{\varepsilon}$, abbiamo

$$\frac{\varepsilon^2 ds^2}{(y\,dx - x\,dy)^2} - C^2 = -2\int R\,dx.$$

Riferendo il movimento alle coordinate polari questa equazione, che è l'equazione differenziale del 1° ordine dell'orbita ogni volta che R è funzione di r, si semplifica e diventa $\frac{\varepsilon^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{r^4 d\varphi^2} - C^2 = 2\int R\,dr$ (φ essendo l'angolo del raggio vettore r col 1° raggio vettore $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$).

Supponiamo $R = \frac{K}{r^2}$, allora $-\int_\rho^r R\,dr = \frac{K}{r} - \frac{K}{\rho}$, ed abbiamo l'equazione differenziale dell'orbita $\varepsilon^2 dr^2 + \varepsilon^2 r^2 d\varphi^2 - C^2 r^4 d\varphi^2 = 2K\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) r^4 d\varphi^2$, donde si ricava

$$\frac{d\varphi^2}{dr^2} = \frac{\varepsilon^2}{2K\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) r^4 + C^2 r^4 - \varepsilon^2 r^2} = \frac{\varepsilon^2 \rho}{r^4(C^2\rho - 2K) + 2K\rho r^3 - \varepsilon^2 \rho r^2}.$$

Integrando questa espressione pra i limiti ρ r abbiamo,

$$\varphi = \arccos \frac{1 - \frac{K}{\varepsilon^2} r}{\sqrt{\varepsilon^2\left(C^2 - \frac{2K}{\rho}\right) + K^2}} \qquad \varphi = \arccos \frac{\varepsilon^2 - Kr}{r\sqrt{\varepsilon^2\left(C^2 - \frac{2K}{\rho}\right) + K^2}} + \theta$$

essendo $\theta = -\arccos \frac{\varepsilon^2 - K\rho}{\rho\sqrt{\varepsilon^2\left(C^2 - \frac{2K}{\rho}\right) + K^2}}$.

Da questa equazione ricavando r abbiamo

$$r = \frac{\frac{\varepsilon^2}{K}}{1 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2/d^2 \; \frac{2K}{\rho}) + K^2}}{K} \cos(\varphi - \theta)}$$

, ora questa è l'equazione generale delle curve di 2° ordine, ossia delle sezioni coniche riferite al foco ed a coordinate polari, dunque ~~i pianeti~~ un ~~loro ritenuti~~ pianeta sollecitato da una forza centrale, la cui intensità varia in ragione inversa dei quadrati delle distanze, e da cui l'impulso primitivo descrive nel suo moto una sezione conica, che ha per foco il centro attraente

Keplero trovò coll'osservazione, che i pianeti descrivono ellissi, delle quali un foco occupa il Sole, e che i raggi vettori descrivono aree proporzionali ai tempi; altri astronomi determinarono le orbite di diverse ~~delle~~ comete, e trovarono sempre, che esse descrivono sezioni coniche. D'altronde l'Analisi dimostra, che, ammettendo nel Sole un'attrazione inversamente proporzionale ai quadrati delle distanze, i pianeti dovrebbero e le comete dovrebbero descrivere sezioni coniche, e le aree generate dai raggi vettori sarebbero proporzionali ai tempi, siamo dunque forzati a concludere, che i pianeti sono ritenuti sulle loro orbite da una attrazione, che è quella del Sole, la quale si esercita in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

I vertici delle ~~delle~~ sezioni coniche descritte dai pianeti e dalle comete ~~sono rappresentati~~ le supponiamo, che sieno i punti donde questi

prefero le mosse, aremo $\varepsilon = cp$, $\theta = \text{arc}(\cos = 1) = 0$, e l'equazione ~~delle~~ generale delle orbite dei corpi celesti è dunque

$$r = \frac{\frac{C^2 p^2}{K}}{1 + \frac{C^2 p - K}{K} \cos \varphi}$$

, C essendo la loro velocità nei vertici delle orbite, K l'attrazione del sole all'unità di distanza, p la distanza dal sole al vertice.

Lezione 13.ª

Applichiamo le leggi generali del moto curvilineo [illegible] a casi non meno facili di quelli, che già abbiam trattato.

Quando un grave è lanciato in una certa direzione e con una certa velocità nel vacuo o nell'aria in ambi i casi descrive una curva, che è tutta contenuta evidentemente in un piano verticale; Volendo determinare questa curva la riferiremo dunque a due assi contenuti nel suo piano, che supporremo uno orizzontale ox, l'altro verticale e diretto all'insù oy.

Supponiamo in primo luogo, che il grave sia lanciato nel vacuo.

Sia la velocità iniziale del grave C eguale a quella, che è dovuta all'altezza h, cosicchè sia $C = \sqrt{2gh}$, sia φ l'angolo, che la sua direzione fa coll'orizzonte ox, sia l'origine delle coordinate nel punto donde è lanciato il

mobile, sieno x, y le coordinate di questo dopo un tempo t, sia v la sua velocità in quest'istante, le equazioni della sua trajettoria saranno $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-g$; integrandole una prima volta, e determinando convenientemente le costanti, abbiamo $\frac{dx}{dt}=C\cos f$, $\frac{dy}{dt}=C\operatorname{sen} f - gt$; integrando queste, e determinando le costanti in modo, che $t=0$ renda $x=0, y=0$, abbiamo

$$x=Ct\cos f,\quad y=Ct\operatorname{sen} f-g\frac{t^2}{2}$$

; fra queste equazioni eliminando t abbiamo l'equazione della trajettoria $y=\tan f.x-\frac{gx^2}{2C^2\cos^2 f}$, e poichè $v^2-C^2=-2gy$, abbiamo $v^2=C^2-2gCt\operatorname{sen} f+g^2t^2$, ed $v^2=C^2-2g\tan f.x+\frac{g^2x^2}{C^2\cos^2 f}$.

L'equazione trovata per la trajettoria è quella di una parabola ordinaria, il cui asse è parallelo ad OY, ossia verticale, poichè basta cangiare x in $x'+\alpha$, y in $y'+\beta$, e determinare convenientemente α, β per averne l'equazione sotto la forma $x^2=py$; se eseguiamo questo calcolo troviamo che il coef^te di x^2 non cangia, l'equazione della trajettoria al vertice è dunque $x^2=-\frac{2C^2\cos^2 f}{g}y=-4\frac{C^2\cos^2 f}{2g}y$; ora $\frac{C^2\cos^2 f}{2g}$ è l'altezza dovuta alla velocità orizzontale di projezione, la trajettoria di un grave lanciato nel vacuo è dunque una parabola il cui asse è verticale, ed il cui parametro è quadruplo dell'altezza dovuta alla velocità orizzontale di projezione. Inoltre questa parabola essendo concava verso l'asse delle x, poichè la differenza

$y - tang f . x = MP - N'P$ è negativa, il vertice della parabola è un massimo, possiamo dunque ottenerne le coordinate OB, BA, ossia α, β senza far la sostituzione indicata più sopra; perciò basta che formiamo il $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = tang f - \frac{g x}{c^2 \cos^2 f}$, eguagliandolo a zero abbiamo $\alpha = \frac{c^2 \cos^2 f \, tang f}{g} = 2h \sin f \cos f = h \sin 2f$, e quindi ancora

$$\beta = h \sin 2f . tang f - \frac{h^2 \sin^2 2f}{4h \cos^2 f} = h \sin^2 f$$, prendendo il doppio di α avremo l'

ampiezza orizzontale del tiro $OE = 2h \sin 2f$.

Se il terreno sarà inclinato per es. come la retta OI, che fa l'angolo i coll'orizzonte, allora sarà OI l'ampiezza orizzontale del tiro, ed avremo $OI = 4h \cos^2 f [tang f - tang i]$.

Possiamo ora proporci varii problemi. Il più importante si è quello — Data la velocità iniziale e determinare l'inclinazione primitiva, affinchè la traiettoria vada a passare per un punto G le cui coordinate sono b, a.

Per risolverlo basta che nella equazione della traiettoria facciamo $y = \frac{b}{a} x = a$, e che ricaviamo quindi f; facendo tale sostituzione abbiamo $tang f = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hb - a^2}}{a}$.

Per f attiva $tang f$ abbiamo due valori; ognivolta che b è positivo, questi due valori sono positivi. quando b è negativo abbiamo $tang f = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 + 4hb - a^2}}{a}$, donde si vede che allora i due valori di $tang f$ sono uno positivo, l'altro negativo.

Il problema che abbiam risolto è il problema generale dell'artiglieria — Determinare l'inclinazione del cannone perchè la palla vada a ferire lo scopo G — La soluzione, che ne abbiamo data ci dimostra, che ognivolta che lo scopo è al disopra del piano orizzontale OX vi sono

due inclinazioni ON. OI al disopra concui si può ferire lo scopo t, e che se lo scopo è al disotto in t vi sono due inclinazioni ON, OR una al disopra l'altra al disotto del piano orizzontale concui si può imberciare.

Se tirerò contro un muro, o contro uomini sceglierò la direzione più inclinata, se contro una volta od un edificio sceglierò la direzione meno inclinata all' orizzonte.

Non vi sarà tiro possibile quando sarà $4bh+a^2>4h^2$, perchè dunque vi sia tiro possibile bisogna che sia $4h^2-4hb-a^2>0$, ora

$$4h^2-4hb-a^2=\left\{2h-b-\sqrt{a^2+b^2}\right\}\left\{2h-b+\sqrt{a^2+b^2}\right\}$$, dunque deve essere $\left\{2h-b-\sqrt{a^2+b^2}\right\}\left\{2h-b+\sqrt{a^2+b^2}\right\}>0$; questa condizione è evidentemente soddisfatta ognivolta che i fattori del 1° membro son dello stesso segno, ora negativi nello stesso tempo non possono esserlo, positivi lo sono nello stesso tempo ognivolta, che $2h>b+\sqrt{a^2+b^2}$, dunque perchè il tiro sia possibile bisogna che sia $h>\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

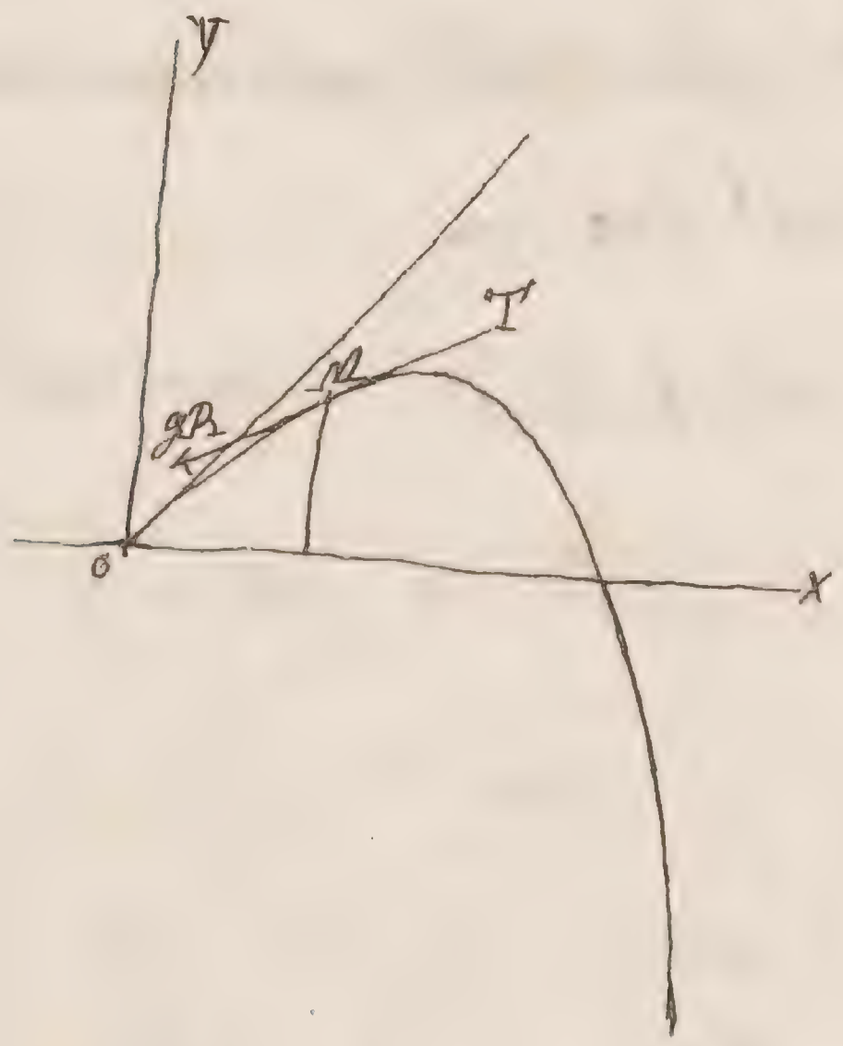
Se il tiro si fa nell' aria, come si fa realmente, le equazioni trovate nel caso del vuoto non servono più, e servono soltanto a darci una primitiva approssimazione quando la velocità iniziale è molto piccola.

Lezione 14ª

La resistenza dell'aria poco sensibile nei moti molto lenti è di grandissima energia nei moti molto celeri, non è quindi permesso nella teoria dei projetti, che è la teoria dell' artiglieria di trascurare la resistenza dell' aria, e non

solo non è permesso di trapandarla, ma è cosa indispensabile l'introdurre nelle equazioni differen-
-ziali del movimento dei projetti oltre alla gravità la forza ritardatrice proveniente dalla
resistenza dell'aria.

La resistenza dell'aria è una forza diretta in senso contrario a quello del moto del projetto, in
un punto qualunque M della trajettoria del mobile ma è dunque diretta secondo il prolun-
-gamento della tangente MT; se dunque
decomponiamo questa forza col prodotto gR, saranno
$-gR\frac{dx}{ds}$, $-gR\frac{dy}{ds}$ le sue componenti
parallele agli assi OX, OY; supponendo



ancora OX orizzontale e OY verticale, le
equazioni differenziali del moto saranno

$$\text{dunque}\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=-gR\frac{dx}{ds}\\ \frac{d^2y}{dt^2}=-g-gR\frac{dy}{ds}\end{cases};$$

In queste equazioni R essendo una funzione della velocità, non è possibile l'integrazione se non per mezzo delle quadrature. Volendo avere l'equazione della trajettoria possiamo eliminare t prima di integrare. Per fare questa elimi-
-nazione non bisogna più considerare t come variabile indipendente, scriviamo perciò le equazioni sotto quest'altra forma,

$$\left.\begin{aligned} d.\frac{dx}{dt}&=-gR\frac{dx}{ds}dt\\ d.\frac{dy}{dt}&=-gdt-gR\frac{dy}{ds}dt\end{aligned}\right\}\ \text{variabile indipendente,}$$

Prendiamo per es.° x per variabile indipendente, e eseguiamo le differenziazioni indicate nei due membri, senza di cui non possiamo fare l'eliminazione, avremo

$$-\frac{dx\,d^2t}{dt^2}=-gR\frac{dx}{ds}dt,\qquad \frac{dt\,d^2y-dy\,d^2t}{dt^2}=-g\,dt-gR\frac{dy}{ds}dt,$$

dalla 1ª equazion

abbiamo $ds\,d^2t = g R\,dt^3$, ricavando quindi d^2t e sostituendolo nell'altra rigatta l'equazione $dt\,d^2y - g R \frac{dy}{ds} dt^3 = -g\,dt^3 - g R \frac{dy}{ds} dt^3$ che riducendo diventa $d^2y + g\,dt^2 = 0$.

Fra le equazioni $ds\,d^2t = g R\,dt^3$ } bisogna che eliminiamo dt e d^2t, per poter ciò fare $d^2y + g\,dt^2 = 0$ } differenziamo la 2ª di queste equazioni, l'equazione risultante $d^3y + 2g\,dt\,d^2t = 0$ aggiunta alle due ci darà il mezzo di far l'eliminazione. Facendola abbiamo finalmente l'equazione differenziale della traiettoria $ds\,d^3y + 2R(d^2y)^2 = 0$.

Mettendo in questa equazione per R una costante si avrebbe la traiettoria di un grave lanciato su di un piano inclinato, che cui attrito oppone al moto una resistenza dappertutto la stessa.

La resistenza dell'aria abbiam già detto altra volta essere proporzionale al quadrato della velocità, sia $R = K^2 v^2$, poichè $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = -\frac{g\,ds^2}{d^2y}$, sarà $R = -K^2 g \frac{ds^2}{d^2y}$; sostituendo questa funzione nell'equazione della traiettoria essa diventa $\frac{d^3y}{d^2y} = 2gK^2\,ds$.

Questa equazione si può integrare una prima volta, poichè $\frac{d^3y}{d^2y} = \frac{d \cdot \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = d \log \frac{d^2y}{dx^2}$, ed abbiamo $\frac{d^2y}{dx^2} = A e^{2gK^2 s}$, A essendo la costante arbitraria

A si determina in modo, che all'origine la velocità orizzontale sia eguale alla velocità orizzontale della velocità iniziale data all'altezza H; Dall'equazione $d^2y + g\,dt^2 = 0$, abbiamo $dt^2 = -\frac{A e^{2gK^2 s}}{g} dx^2$, e quindi $\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{g}{A e^{2gK^2 s}}$, ora perchè sia soddisfatta la detta condizione

bisogna, che ad $ds=0$ corrisponda $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2gH}\cos f$ { f indicando l'angolo dalla direzione della velocità iniziale fa coll'orizzonte }, dunque dovrà essere

$$-\frac{g}{A} = 2gH\cos^2 f, \text{ ed } A = -\frac{1}{2H\cos^2 f}; \text{ dunque } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{e^{2gK^2}}{2H\cos^2 f}.$$

Per integrare questa equazione facciamo $\frac{dy}{dx} = p$, avremo $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, $dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}}$, e quindi l'equazione in p ed s, (in cui $h = 2gK^2$)

$$dp.\sqrt{1+p^2} = -\frac{e^{hs}ds}{2H\cos^2 f}, \text{ che contenendo le variabili separate è integrabile,}$$

ed integrata diventa $p\sqrt{1+p^2} + \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = Cost - \frac{e^{hs}}{Hh\cos^2 f}$. Per determinar la costante osserviamo che ad $s=0$ deve corrispondere $\frac{dy}{dx}$ ossia $p = \tan f$, ed avremo

$$Cost = \tan f\,\frac{1}{\cos f} + \log\left(\tan f + \frac{1}{\cos f}\right) + \frac{1}{Hh\cos^2 f} = \frac{1+Hh\sin f}{Hh\cos^2 f} + \log\left\{\tan\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}f\right)\right\}$$

per abbreviare chiamiamola C, e rappresentiamo colla lettera P il binomio $p\sqrt{1+p^2} + \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$, l'ultima equazione da integrarsi sarà $C - P = \frac{e^{hs}}{Hh\cos^2 f}$.

Disgraziatamente nello stato attuale della scienza questa equazione non è da integrare, vediamo perciò come si possa applicare il metodo delle quadrature alla costruzione della trajettoria.

Dividendo quest'ultima equazione per l'equazione $\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{hs}}{2H\cos^2 f}$, abbiamo

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-2}{h(C-P)}, \text{ ora } dy = p\,dx, \text{ abbiamo dunque per calcolare le diverse coordinate dei diversi punti della trajettoria le formole}$$

$$dx = \frac{2\,dp}{Ph - Gh}$$

$$dy = \frac{2p\,dp}{Ph - Gh}$$

. Integrando per serie queste due espressioni potrassi avere x in funzione di p ed y in funzione di p; col metodo del regresso delle serie potrassi avere p in funzion di x e di y; sostituendo questo valore di p in y od in x avrassi l'equazione della trajettoria che conterrà un numero infinito di termini, ma vi hanno altri mezzi per risolvere la stessa questione. Uno di questi mezzi consiste nel costruire per punti la curva $q = \frac{2}{Ph - Gh}$ calcolandone le diverse ordinate q, corrispondente a $p = tang\,f$, e nel calcolare della curva la cui equazione è $r = \frac{2p}{Ph - Gh}$ le ordinate r, corrispondente a $p = tang\,f$

q_2 ---------- $tang\,f - w$ $\qquad$ r_2 ---------- $tang\,f - w$

q_3 ---------- $tang\,f - 2w$ $\qquad$ r_3 ---------- $tang\,f - 2w$

---------- $\qquad$ ----------

$q_{(m+1)}$ ---------- $tang\,f - mw$ $\qquad$ $r_{(m+1)}$ ---------- $tang\,f - mw$,

avremo (w essendo quantità molto piccola) avremo allora colla formola ordinaria delle quadrature i valori delle coordinate della trajettoria

$$x = \frac{w}{2}\left[q_1 + 2q_2 + 2q_3 + \cdots + q_{(m+1)}\right]$$

$$y = \frac{w}{2}\left[r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \cdots + r_{(m+1)}\right].$$

Volendo le coordinate del punto in cui la tangente fa un angolo coll'asse delle x ossia coll'orizzonte, la cui tangente è π basterà prendere m abbastanza grande perchè $w = \frac{\pi - tang\,f}{m}$

sia sufficientemente piccolo, calcolare quindi $q_1\ q_2\ q_3 \cdots r_1\ r_2\ r_3 \cdots x_{(m+1)}$ e sostituirle nelle formole dei valori di x e di y.

È da avvertirsi, che quando sono calcolate $q_1\ q_2 \cdots r_1\ r_2 \cdots r_{(m+1)}$ non solo si possono calcolare x, y corrispondenti a $p=\pi$, ma si possono calcolare anche le coordinate $\left.\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}x_3\\y_3\end{matrix}\right\} \cdots \left.\begin{matrix}x_{(m+1)}\\y_{(m+1)}\end{matrix}\right\}$ ~~corrispondenti~~ dei punti pei cui $p = tang f - \omega$, $p = tang f - 2\omega$, $\cdots\cdots$ $p = tang f - m\omega$, e si avranno

$$x_1 = \frac{\omega}{2}\left[q_1 + q_2\right] \qquad y_1 = \frac{\omega}{2}\left[r_1 + r_2\right]$$

$$x_2 = \frac{\omega}{2}\left[q_1 + 2q_2 + q_3\right] \qquad y_2 = \frac{\omega}{2}\left[r_1 + 2r_2 + r_3\right]$$

$$x_3 = \frac{\omega}{2}\left[q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4\right] \qquad y_3 = \frac{\omega}{2}\left[r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4\right]$$

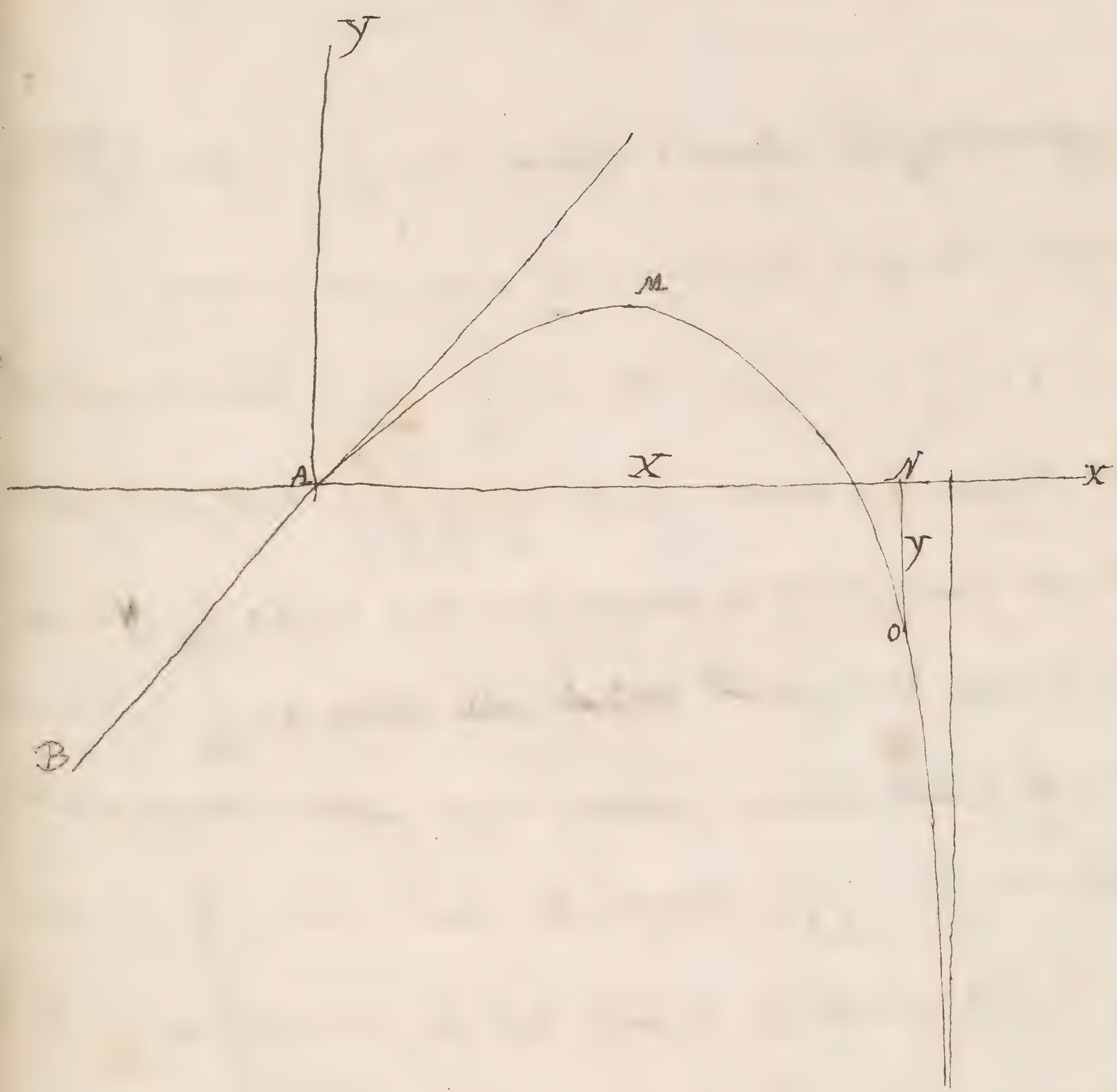
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_{(m+1)} = \frac{\omega}{2}\left[q_1 + 2q_2 + 2q_3 + \cdots + q_{(m+1)}\right], \qquad y_{(m+1)} = \frac{\omega}{2}\left[r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \cdots + r_{(m+1)}\right].$$

Lezione 15.ª

$dp = -\dfrac{e^{ks}}{2H\cos^2 f}\,dx$, ora dx è positivo, dp è dunque sempre negativo, ma dpè l'incremento di p ossia della tangente dell'angolo, che la tangente alla traiettoria fa coll'~~asse~~ orizzonte, la traiettoria è dunque concava verso l'orizzonte, ~~diventa~~ avrà per conseguenza un punto, pei cui $p=0$, ossia un punto di massimo, oltrepassato il quale p sarà negativo, e crescerà indefinitamente.

Consideriamo un punto o della curva dove p sia negativo e grandissimo; supponiamo che



si sieno calcolate col metodo indicato precedentemente le coordinate AN, ON di questo punto, le quali per brevità chiamerò X, Y, dico, che facile sarà il calcolare le coordinate dei punti più bassi del punto O.

Nel punto O prenda $-q$, per lo stesso punto sarà $P = -q\sqrt{1+q^2} + \log\{-q+\sqrt{1+q^2}\}$, ossia $P = -q\sqrt{1+q^2} - \log\{q+\sqrt{1+q^2}\}$; q essendo molto grande, $\sqrt{1+q^2}$ non differisce sensibilmente da q, potremo dunque ancora scrivere $P = -q^2 - \log 2q$, ed osservando, che q^2 è enormemente più grande, che $\log 2q$, potremo dire senza tema di errare, che $P = -q^2$, e che per i punti successivi della curva $P = -p^2$, indicando ora con p il valore assoluto di p.

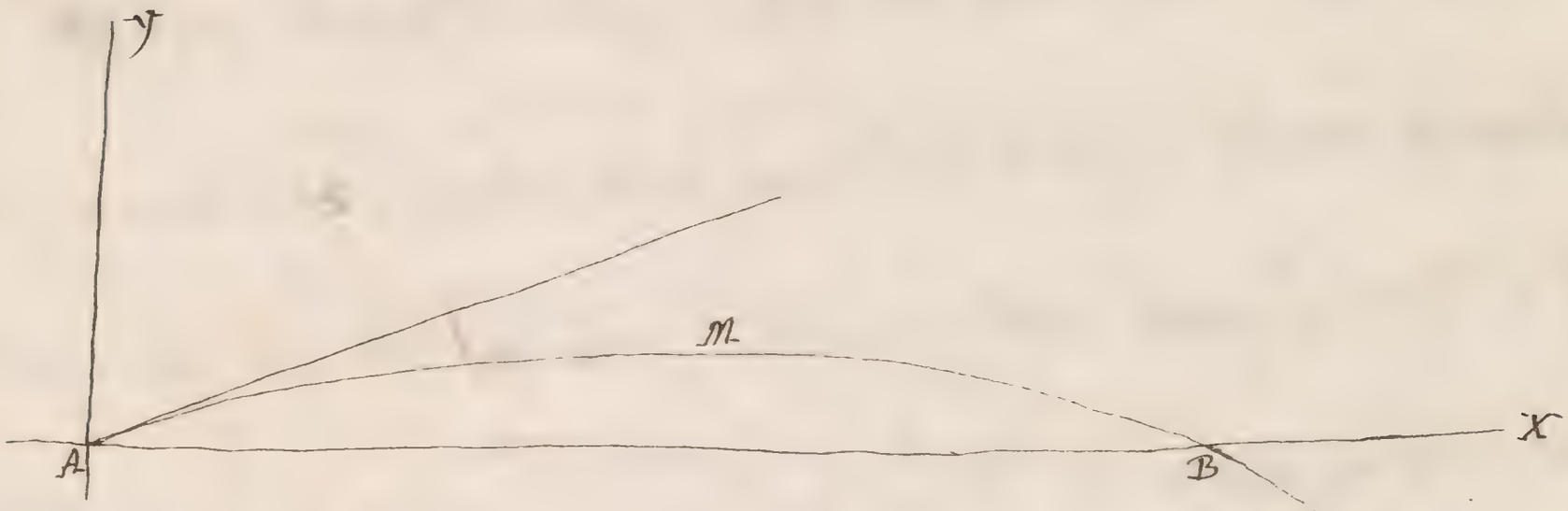
Ciò posto avremo per calcolare le coordinate dei punti successivi ad O le formole $dx = \frac{2\,dp}{h\,p^2}$, $dy = -\frac{2\,dp}{h\,p}$ } trascurando 6 a fronte di p^2.

Queste formole si possono integrare, integrando troviamo $x=-\frac{2}{hp}+C, y=-\frac{2\log p}{h}+C'$.
Esprimendo la condizione, che $ap=q$ deve corrispondere $x=X, y=Y$ troviamo
$C=X+\frac{2}{hq}$, $C'=Y+\frac{2\log q}{h}$, dunque $x=X+\frac{2}{hq}-\frac{2}{hp}$, dando in queste for-
-mole a p dei valori maggiori di q avremo $y=Y-\frac{2}{h}\log\frac{p}{q}$ tanti punti quanti
vorremo, al limite, ossia quando $p=\infty$ le formole diventano $x=X+\frac{2}{hq}$, $y=-\infty$,
e ci dimostrano, che la curva ha un' assintoto verticale alla distanza $X+\frac{2}{hq}$ dal punto
A. Dell'esistenza di questo assintoto potevamo persuaderci senza passare attraverso i tanti cal-
-coli. Infatti la formola $\frac{dx^2}{dt^2}=-\frac{g}{Ae^{hs}}$ dimostra, che quando $s=\infty$, $\frac{dx}{dt}=0$, ora
$\frac{dx}{dt}$ è la velocità orizzontale, d'altronde la velocità verticale non diventa mai nulla, dopo
un certo tempo il mobile prende dunque a muoversi con moto rettilineo e verticale.

La curva o trajettoria, di cui l'equazione è $p\sqrt{1+p^2}+\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=C-\frac{e^{hs}}{Hh\cos^2 f}$ oltre al ramo
meccanico AMO ha un altro ramo AB che si estende a sinistra del punto A e al disotto del piano
orizzontale AX. Per i punti di questo ramo x, y, s sono negativi, se nell'equazione facciamo
$s=-\infty$ essa diventa $p\sqrt{1+p^2}+\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=C$, equazione numerica, che ci da il valore di p
conveniente ad $s=-\infty$, ora se risolviamo questa equazione per approssimazione abbiamo un
valore di p finito, dunque il ramo della curva a sinistra del punto A ammette un' assintoto
inclinato, la cui inclinazione è data da questa equazione.

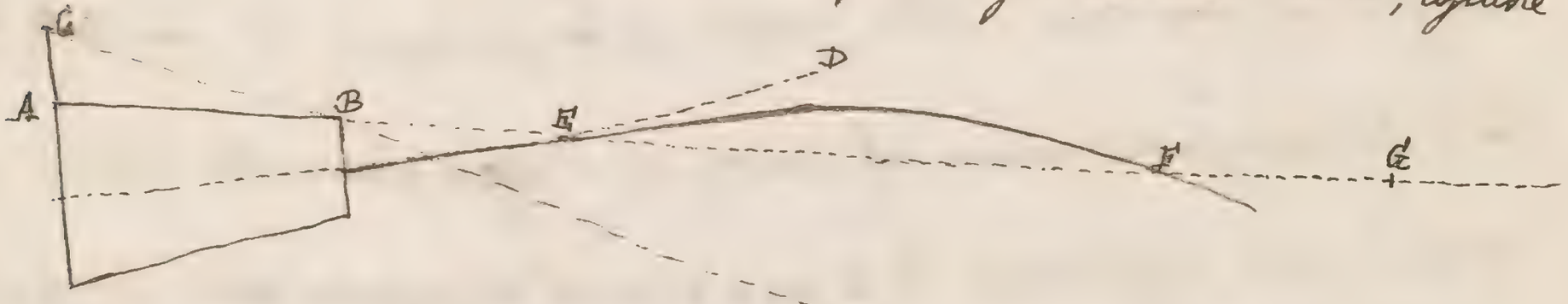
Per determinare la posizione di questo assintoto bisognerebbe supporre, che si fosse calcolato un punto,
per cui s fosse grandissimo, allora scrivendo l'equazione della retta, che passa per quel punto,
e che fa coll'orizzonte l'angolo determinato dal valore di p corrispondente ad $s=-\infty$, essa si potrà con-
-siderare come l'equazione dell' assintoto.

Quando l'inclinazione del tiro è molto ~~grande~~ grande, la parte di curva AMB che è al



di sopra dell'orizzontale AX ha per ogni suo punto p molto piccola, ora $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ per la parte AMB di curva x si confonde dunque sensibilmente con s, e possiamo sostituire x ad s nell'equazione $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{e^{hs}}{2H\cos^2 f}$ - Sostituendo avremo l'equazione $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{e^{hx}}{2H\cos^2 f}$, che integrata una volta diventa $\frac{dy}{dx} = Cost - \frac{e^{hx}}{2Hh\cos^2 f}$, e poichè ad $x=0$, ~~$\frac{dy}{dx}$~~ corrisponde $\frac{dy}{dx} = \tan f$, $\frac{dy}{dx} = \tan f + \frac{1-e^{hx}}{2Hh\cos^2 f}$. Integrando una seconda volta, e determinando la costante in modo, che ad $x=0$ corrisponda $y=0$ abbiamo finalmente l'equazione finita della curva AMB. $y = x\tan f + \frac{1+hx-e^{hx}}{2Hh^2\cos^2 f}$, equazione che non servirà che a calcolare il tratto della curva dove l'inclinazione sarà molto grande. Applichiamo questa equazione alla ricerca del punto in bianco dei pezzi d'artiglieria.

La parete esterna della canna delle armi da fuoco è generalmente conica, cosicchè



quando un artigliere mira secondo la parete esterna AB del cannone ~~non mira~~ la linea di mira non coincide colla direzione iniziale della palla; questa linea però taglia la curva descritta dal projetto in due punti E, F. Il punto E coincide sensibilmente

col punto d'incontro della linea di mira colla direzione iniziale della palla, perchè questo non è molto discosto dalla bocca del cannone, il punto F si chiama punto in bianco, e BF si chiama la distanza di punto in bianco. L'angolo DEF essendo assai piccolo il tratto EF della trajettoria si può calcolare colla equazione che abbiamo trovata poco fa considerando, che la palla parta da E, supposizione che possiamo fare senza pericolo di errore sensibile, è quindi facile il calcolare BF. Quando lo scopo a cui si mira sarà in F alla distanza BF dal cannone puntando secondo la linea naturale di mira AB saremo certi di ferirlo, ma se lo scopo è al di là del punto F in un'altro punto G puntando secondo la linea AB la palla non andrà a ferirlo.

Perchè la palla vada a ferir lo scopo G bisognerà alzar di più la linea di mira, se lo scopo G sarà più vicino al cannone del punto in bianco bisognerà abbassare la linea di mira.

Per alzar la linea di mira nella culacia del cannone in A è piantata una riga detta alzo, quando si vuole alzar la linea di mira si punta per un punto di questa riga convenientemente più alto del punto A e pel punto B; volendo abbassar la linea di mira si pianta l'alzo in B o, come si dice, nella gioja del cannone, e si mira quindi per A ed un punto conveniente dell'alzo.

È d'uopo all'artigliere d'aver una tavola, che dia l'alzo necessario per colpire uno scopo qualunque, vediamo come si debba procedere per la formazione di una tale tavola.

Sia l la lunghezza dell'anima del cannone, r il raggio esterno alla culacia, r' il raggio esterno alla gioja, supponiamo, che la carica ordinaria del pezzo sia tale, che la velocità con cui esce la palla sia eguale a quella che è dovuta all'altezza H, sia f l'angolo della linea naturale di mira coll'asse del cannone, sia D il diametro della palla, Δ la densità di questa, δ la densità dell'aria, sarà $\operatorname{tang} f = \frac{r-r'}{l}$, $h = 2gK^2$ in cui K si può trovare conoscendo Δ, δ, r, e si ha dalla formola $gK^2 = \frac{3}{16}\frac{\delta}{r\Delta}$. (V. D. pag.a 23).

Chiamando x la distanza EF, avremo per determinare x l'equazione

$$x\,\mathrm{tang}\,f + \frac{1+hx-e^{hx}}{2Hh^2\cos^2 f} = 0$$, che non ti può risolvere che per approssimazione.

La densità dell'aria è maggiore d'inverno, che d'estate, h è dunque maggiore d'inverno, che d'estate, ma crescendo h diminuisce x, la distanza di punto in bianco è dunque minore d'inverno, che d'estate.

Questa stessa equazione serve a determinare l'alzo della linea di mira necessario per ferire un dato scopo G. Infatti in questo caso è cognita x, e l'incognita è l'altezza dell'alzo; chiamando R il nuovo raggio alla culaccia AC abbiamo l'altezza dell'alzo $= R-r$, ora l'equazione sovrascritta ci da $\mathrm{tang}\,f$, avuta $\mathrm{tang}\,f$ l'equazione $\mathrm{tang}\,f = \frac{R-r'}{l}$ ci da R.

Per compiere la determinazione del moto dei projetti nell'aria restano a determinarsi il tempo e la velocità. Come le coordinate x,y dei diversi punti della trajettoria le abbiamo dando dei valori a p, cerchiamo di esprimere anche v, t per ~~mezzo di~~ p.

Dall'equazione $v^2 = -g\frac{ds^2}{dy}$ abbiamo $v^2 = -g\,\frac{dx(1+p^2)}{dp} = \frac{1+p^2}{K^2(G-P)}$,

Dall'equazione $dt^2 = -\frac{dy}{g}$ abbiamo $dt^2 = \frac{dp^2}{g^2K^2(G-P)}$, e quindi $dt = \frac{dp}{gK\sqrt{G-P}}$;

mediante queste due formole per ciascun valore di p avremo il tempo t e la velocità v.

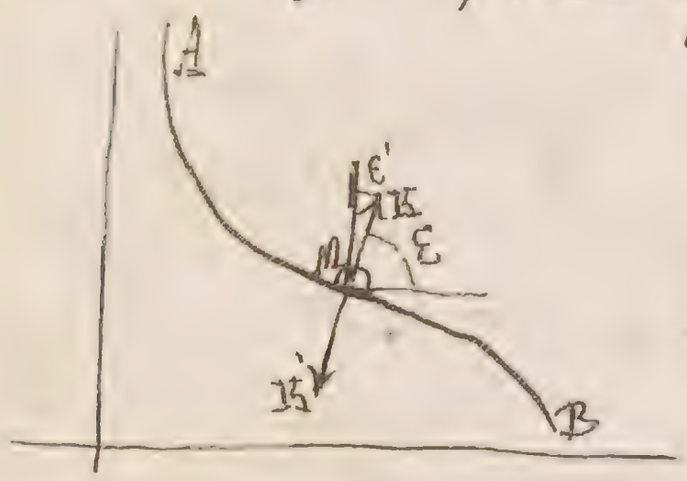
Lezione 16.ª

Passiamo ora ad un altro problema di somma importanza.

Consideriamo un punto materiale sollecitato da un sistema qualunque di forze e costretto a star sopra una curva determinata o sopra una superficie determinata.

Supponiamo, che la curva su cui è ritenuto il mobile sia una curva piana, dire, che il mobile è costretto a star sopra la curva è dire, che vi ha una forza, che impedisce il mobile di descrivere la trajettoria che descriverebbe se fosse libero, ora [illegible] il mobile e la curva si eserciti una reazione pressione, oltre alle forze date e alla pressione della ~~curva~~ sul mobile non vi è alcun'altra forza, che agisca su di esso, ~~[illegible]~~ la forza, che impedisce il moto libero del corpo è dunque la pressione della curva sul mobile, ~~la~~ ~~quale~~ pressione si esercita normalmente alla curva stessa.

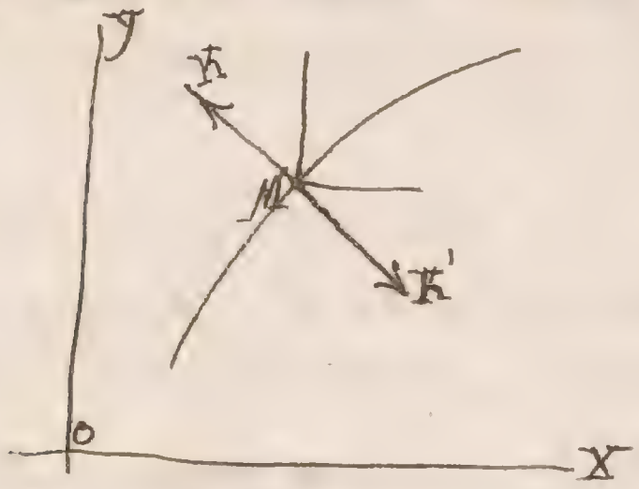
Supponiamo conosciuta l'intensità della pressione della curva sul mobile dividendola per la sua massa avremo la forza acceleratrice proveniente dalla resistenza della curva, e potremo intendere applicata una forza eguale a questa forza acceleratrice in luogo della resistenza della curva. Questa forza denotiamola con la lettera K, chiamiamo ε. ε' gli angoli, che la sua direzione fa cogli assi, X, Y le componenti parallele agli assi di tutte le altre forze, le equazioni differenziali generali del moto saranno $\frac{d^2x}{dt^2} = X + K\cos\varepsilon$, $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + K'\cos\varepsilon'$, dove, poichè $\cos\varepsilon = -\frac{dy}{ds}$, $\cos\varepsilon' = -\frac{dx}{ds}$, quando si suppongono positivi i coseni degli angoli, che MK' fa cogli assi,



$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X - K\frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - K\frac{dx}{ds} \end{aligned}\right\}.$$

In queste equazioni K è incognita ma conosciamo a priori la relazione che passa tra y ed x ossia l'equazione della trajettoria.

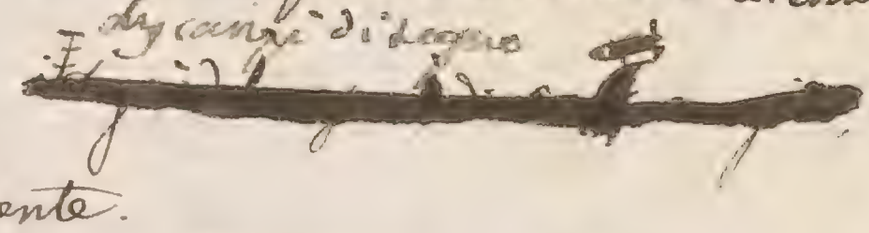
Consideriamo particolarmente una curva di ordinata crescente, allora i coseni degli angoli



di MK' cogli assi sono $\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dx}{ds}$, e per conseguenza le equazioni generali diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X - K\frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + K\frac{dx}{ds} \end{aligned}\right\}.$$

Possiamo prendere queste equazioni per tipo generale delle equazioni del movimento di un punto materiale ritenuto sopra una curva piana · intendendo che



girando la curva sarà d'ordinata decrescente.

Moltiplicando la 1ª equazione per dx, la 2ª per dy e sommando le abbiamo

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = X\,dx + Y\,dy, \text{ ora } \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}d\cdot\frac{dy^2}{dt^2} = v\,dv,$$

dunque $v\,dv = X\,dx + Y\,dy$. K non influisce dunque sulla velocità del mobile, ed avremo come nel moto libero, quando $X\,dx + Y\,dy$ è differenziale esatto, e $\int(X\,dx + Y\,dy) = \varphi(x,y)$,

$$v^2 - c^2 = 2\varphi(x,y) - 2\varphi(a,b)$$

c essendo la velocità iniziale, a, b le coordinate del punto di partenza. ~~Effet~~ Ripetendo lo stesso ragionamento, che abbiam fatto nel caso del moto libero, dimostriamo, che ad ogni istante l'incremento della forza viva è eguale al doppio della quantità d'azione sviluppata dalle forze motrici applicate al corpo nello stesso tempo.

La stessa equazione dimostra, che se facciamo due o più curve, che partano tutte dallo stesso punto, e gettiamo su ~~dette~~ ciascuna di esse un mobile, ed assoggettiamo tutti questi mobili alle stesse forze, essi arrivano su di una

stessa curva $\varphi(x,y)=K$, ove K è una costante, colla stessa velocità $v=\sqrt{c^2-2(K-\varphi(a,b))}$, benchè in tempi differenti.

Se $X=0, Y=0$, l'equazione delle forze vive dà $v=c$, dunque quando si getta un mobile sopra una curva senza assoggettarlo a veruna forza, esso si muove sulla curva con moto uguabile.

Se il piano della curva è verticale, e la gravità sola agisce sul mobile, l'equazione antecedente diventa $v^2-c^2=2g(b-y)$; quindi ricavasi $b-y=\frac{v^2-c^2}{2g}$, ma $b-y$ l'altezza del mobile sopra il punto la cui altezza dal piano orizzontale è b, $\frac{v^2-c^2}{2g}$ è l'altezza a cui il mobile salendo verticalmente acquistando la velocità iniziale c ~~donde~~ la velocità v, dunque ancora in questo caso il mobile ha in ciascun istante la stessa velocità, che se fosse salito o disceso verticalmente alla stessa altezza in grazia della stessa velocità iniziale.

Tutto ciò è facilmente applicabile ad un mobile costretto a muoversi sopra una curva a doppia curvatura.

Fra tutte le normali che si possono tirare alla curva supponiamo che quella secondo cui si esercita la pressione sia quella che fa gli angoli $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ cogli assi, le equazioni differenziali del movimento saranno

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=X+K\cos\varepsilon\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=Y+K\cos\varepsilon'\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=Z+K\cos\varepsilon''\end{aligned}\right\}$$

Moltiplicando la 1ª di queste equazioni per dx, la 2ª per dy, la 3ª per dz, e sommandole abbiamo

$$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

poichè, la normale essendo perpendicolare alla tangente che fa cogli assi gli angoli i cui cogeni sono $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ si ha la relazione $dx\cos\varepsilon+dy\cos\varepsilon'+dz\cos\varepsilon''=0$, ora $\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=v\,dv$,

Dunque $v\,dv = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$. Dagnesta equazione, quando $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è differenziale esatto, hassi l'equazione delle forze vive $v^2 - c^2 = 2\varphi(x,y,z) - 2\varphi(a,b,c)$, la quale ci insegna, che anche quando il mobile è costretto a star sopra una ~~superficie~~ a doppia curvatura curva, l'incremento della forza viva è eguale al doppio della quantità d'azione sviluppata dalle forze che agiscono sul mobile.

Se la forza operante sul mobile è la sola gravità, quest'equazione diventa $\frac{v^2 - c^2}{2g} = c - \zeta$, dunque quando un grave si muove sopra una curva a doppia curvatura ha in ogni istante la stessa velocità, che avrebbe se fosse salito o disceso verticalmente alla stessa altezza.

Le medesime proprietà hanno ancora luogo nel moto di un corpo sopra una superficie qualunque. Per dimostrarlo procederemo nello stesso modo. Chiamando $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ gli angoli che la normale alla superficie fa cogli assi, abbiamo le equazioni generali del movimento $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X + K\cos\varepsilon \\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y + K\cos\varepsilon' \\ \frac{d^2z}{dt^2} = Z + K\cos\varepsilon'' \end{cases}$.

Moltiplicando la 1ª equazione per dx, la 2ª per dy, la 3ª per dz, e sommandole, abbiamo

$$v\,dv = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + K\{dx\cos\varepsilon + dy\cos\varepsilon' + dz\cos\varepsilon''\};$$ ma la normale è perpendicolare al piano tangente, dunque $dx\cos\varepsilon + dy\cos\varepsilon' + dz\cos\varepsilon'' = 0$, e $v\,dv = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$; ora un punto nello spazio non può muoversi che o liberamente o sopra una curva determinata o sopra una superficie data, dunque comunque si muova un punto materiale nello spazio ha sempre luogo l'equazione $v\,dv = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, e tutte le conseguenze che quindi ne derivano.

Vediamo adesso come proviamo determinare K e qual sia il suo valore.

Troviamoci prima nel caso, che il mobile è costretto a muoversi sopra una curva piana.

In questo caso le equazioni differenziali del movimento sono $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X - K\frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y + K\frac{dx}{ds} \end{cases}$.

Moltiplicando la 1ª per $\frac{dy}{ds}$, la 2ª per $\frac{dx}{ds}$ e sottraendo questa dalla 1ª abbiamo

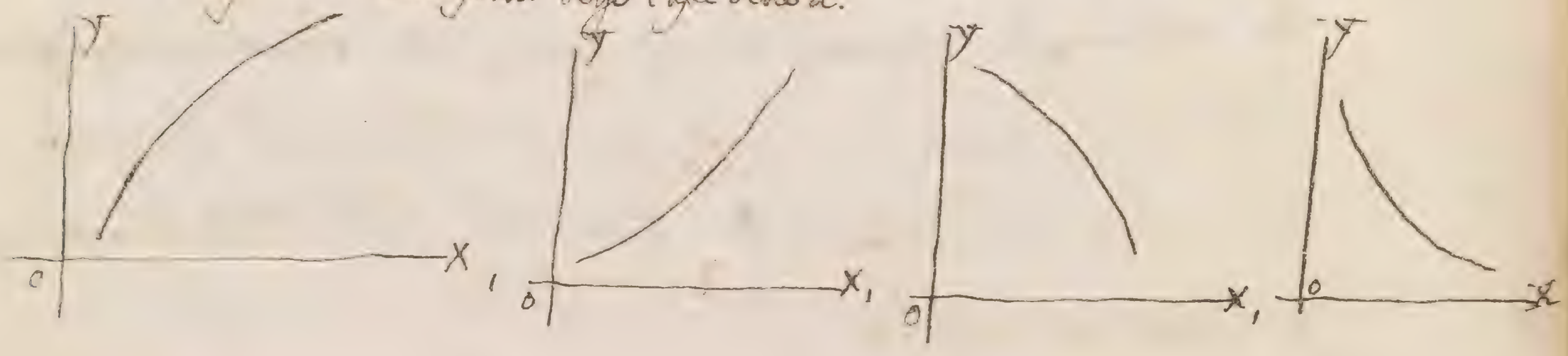
$$\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds\,dt^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} - K\frac{dy^2+dx^2}{ds^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} - K, \text{ donde}$$

$$K = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} - \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds\,dt^2}$$ eliminando da questa equazione dt per mezzo della equazione $v = \frac{ds}{dt}$, abbiamo ancora $K = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} - \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^3}v^2$.

ora, r essendo il raggio di curvatura della curva, abbiamo $\frac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y} = \pm r$ secondochè la curva volta la concavità o la convessità all'asse delle x, dunque finalmente

$K = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} \mp \frac{v^2}{r}$. Questa formola sta pel caso dell'ordinata crescente, è però facile il passaggio da questo caso quello della curva d'ordinata decrescente, basta infatti cangiare il segno di K. Comprendendo le due formole per i due casi in una sola formola proviamo scrivere

$\pm K = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} \mp \frac{v^2}{r}$. Questa equazione può presentare quattro combinazioni differenti di segno corrispondenti ai quattro casi — 1° Ordinata crescente e concavità verso l'asse delle x, 2° Ordinata crescente e convessità verso l'asse delle x, 3° Ord.ª decrescente e concavità verso l'asse delle x, 4° Ord.ª decrescente e convessità verso l'asse delle x.



12ª Lezione

Nella formola $\pm K = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} \mp \frac{v^2}{r}$, il termine $\frac{v^2}{r}$ è quantità necessariamente positiva, $\frac{x\,dy - y\,dx}{ds}$ può essere positivo o negativo, quindi in alcuni casi K è positivo, in altri negativo, in altri zero, e può esser zero o per un punto della ~~tutta la~~ curva, o per ~~un punto della~~ tutta la curva secondochè la somma $\frac{x\,dy - y\,dx}{ds} \mp \frac{v^2}{r}$ è zero per valori particolari di x, y, ~~[illegible]~~ oppure è nulla indipendentemente da ogni valore particolare di x, y.

Ricerchiamo quale sia l'origine ed il significato di ciascuno dei due termini onde è composta la pressione K.

Il 1° termine è la somma delle componenti normali alla curva delle forze applicate al mobile, ossia è la forza acceleratrice corrispondente alla pressione statica, poichè quando un mobile è in equilibrio sopra una curva abbiam veduto che la pressione ~~della~~ esercitata ~~dal mobile sulla curva~~ è eguale alla somma delle forze normali; sappiamo onde provenga la pressione $\mp \frac{v^2}{r}$ che si ferma sopra ~~il mobile~~ la curva indipendentemente dalle forze acceleratrici.

Ogni curva è un poligono infinitilatero, per comprender bene ciò che succede nel movimento di un punto sopra una curva cominciamo a comprender bene ciò che succeda nel moto di un'atomo materiale su di un poligono.

Sia il mobile lanciato da A con velocità v, il mobile in grazia di questa velocità percorre AB, giunto in B se non fosse il lato BC percorrerebbe BF con velocità v,

ora la velocità v poffiamo intenderla risoluta in due, e poffiamo intendere il mobile animato dalle velocità BS. Bℓ, una perpendicolare a BC, l'altra diretta secondo BC, per la refistenza di BC la 1ª Bd sarà elisa, e Bℓ continuerà a subsistere, il mobile dunque giunto in B prenderà a muoversi sul lato BC con velocità Bℓ < v, esso avrà per conseguenza perduta per la refistenza del lato BC perduta una parte della sua velocità.

Ora dicasi percossa l'azione di due corpi, che si incontrano, perdendo una parte della loro velocità, vi ha quindi in B percossa del mobile contro il poligono.

Il mobile giunto su BC percorre questo lato con la velocità Bℓ, ma giunto in C viavrà di nuovo percossa contro CD, e prenderà a muoversi sopra CD con velocità minore, giunto in D di nuovo percorrerà il poligono incaminandosi nella direzione DE, ed in questo modo percorrerà tutto il poligono cangiando la sua velocità in ogni vertice del poligono.

Le percosse essendo fatte nel nostro caso sui lati del poligono dalla stessa massa sono proporzionali alle componenti BE perpendicolari ai lati. Se chiamiamo α, β, γ... gli angoli dei lati del poligono possiamo quindi fare la seguente tavola.

Velocità del mobile sui lati	percosse del mobile sui lati
su di AB ---- v	
in B ---- v	v sen α
BC ---- v cos α	
C ---- v cos α sen β	
CD ---- v cos α cos β	
D ---- v cos α cos β sen γ	
DE ---- v cos α cos β cos γ	

Supponiamo adesso gli angoli dei lati infinitamente piccoli, ed avremo la formula relativa al movimento su di una curva continua. Chiamando dφ l'angolo di contingenza nel punto dove il mobile ha la velocità v, ed offervando, che poffiamo fostituire dφ a sen dφ, e l'unità a cos dφ per essere dφ infinitesimo, avremo il valore della velocità normale perduta dal mobile nel pas-

-saggio da un lato retto al seguente $v\,d\varphi$. Il valore della velocità tangenziale, che sarà v. ora La velocità $v\,d\varphi$ normale alla curva non può estinguersi da se per legge d'inerzia, vi ha dunque una forza, che ha estinta questa velocità, ma questa forza non può provenire che dall'essere il mobile costretto a star sopra la curva, dunque la resistenza della curva fa perdere in ciascun istante al mobile la velocità $v\,d\varphi$ in senso normale alla curva.

Dividendo la velocità perduta pel tempo avremo la forza acceleratrice $\frac{v\,d\varphi}{dt}$ provenuta dalla resistenza della curva, ma abbiamo $dt = \frac{ds}{v}$, dunque la forza acceleratrice è $\frac{v^2 d\varphi}{ds} = \frac{v^2}{\frac{ds}{d\varphi}} = \frac{v^2}{r}$, ecco perchè nel valore di K havvi il termine $\mp \frac{v^2}{r}$.

Questa forza acceleratrice, che tende ad allontanare il mobile dal centro di curvatura si chiama *Forza Centrifuga*.

La teoria della forza Centrifuga fu data da Ugnio. Questi vi arrivò considerando il moto di un corpo su di una ~~curva~~ circolo. Un' elemento LM di una curva qualunque può senza errore sensibile considerare come un' arco di circolo, per l'intervallo dt in cui il mobile percorre LM il moto si può dunque considerare come circolare.

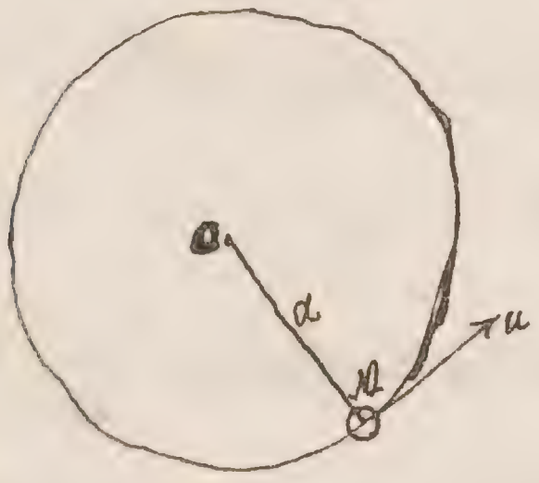
ciò posto quando il mobile è giunto in M esso tende a seguitare il suo moto lungo MH e percorrerebbe in un tempo dt lo spazio Mm = LM se la resistenza della curva non lo facesse deviare, ma questa lo fa andare in H facendogli percorrere lo spazio mH nel senso normale alla curva, la resistenza della curva si può dunque riguardare come equivalente all'azione di una forza acceleratrice capace di far descrivere lo spazio mH nel tempetto dt; e poichè nel tempetto dt essa si può considerare come costante dalla formula $g = \frac{2s}{t^2}$ abbiamo il valore di questa forza $= \frac{2 \cdot mH}{dt^2}$, ora mH considerata come parte esterna

di una secante al circolo ofcultatore di raggio r è terza continua proporzionale dopo ~~2r+mH~~ $\frac{Mm.+2r+mH}{}$, ed

opia dopo $\frac{Mm.+2r}{2r+mH}$ poichè mH si può trafurare afronte di 2r, dunque $mH=\frac{ds^2}{2r}$, ~~[illegible]~~ la

forza acceleratrice è $=\frac{2ds^2}{2rdt^2}=\frac{v^2}{r}$;

Facciamo una applicazione di tutto ciò.



Da un punto fisso O lego un filo di lunghezza $OM=a$, all'eſti-mità M di queſto filo attacco un corpo di peſo P, do un'im-pulſo al corpo capace di fargli prendere la velocità u, in virtù di queſto impulſo il corpo ſi muove con moto unifor-me circolare, ed il filo ſi tende. La tenſione del filo proviene dalla forza centrifuga; ora in queſto ca-ſo la forza centrifuga è eſpreſſa dalla formola $\frac{u^2}{a}$, ſe dunque chiamo Q la forza che tende il filo, ſarà $Q=$ maſſa $M.\frac{u^2}{a}=\frac{Pu^2}{ag}$. Queſta eſpreſſione poſſiamo renderla più ſemplice ſcrivendo $Q=\frac{2P}{a}.\frac{u^2}{2g}$, e chiamando h l'altezza dovuta alla velocità u, allora abbiamo $Q=\frac{2Ph}{a}$, donde $Q:P::2h:a$. Nel moto circolare la forza motrice centrifuga ſta dunque al peſo del mobile come il doppio dell'altezza dovuta alla velocità del mobile ſta al raggio del circolo.

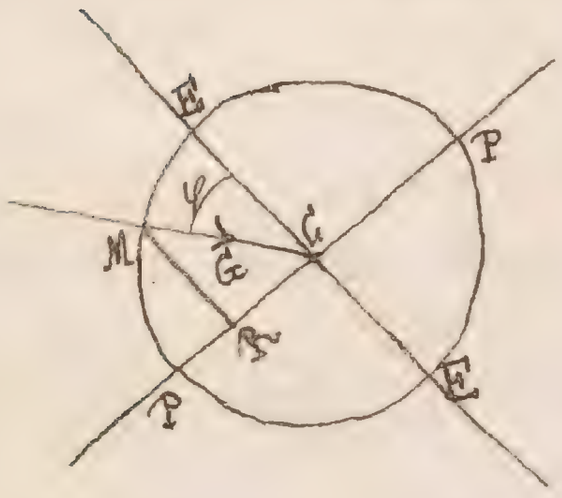
Poſſiamo dare a queſta ſteſſa formula un'altra eſpreſſione introducendo il tempo, che il mobile impiega a far una rivoluzione; Chiamando T queſto tempo abbiamo $T=\frac{2a\pi}{u}$, donde $u=\frac{2a\pi}{T}$, e $\frac{u^2}{a}=\frac{4a^2\pi^2}{aT^2}=\frac{4\pi^2a}{T^2}$, la forza acceleratrice centrifuga nel moto circolare è dunque direttamente proporzionale al raggio deſcritto, ed inverſamente proporzionale al quadrato del tempo impiegato a deſcriverlo.

Nel moto aſſolutamente libero $K=0$, e per conſeguenza la forza centrifuga è eguale e direttamente contraria alla ſomma delle componenti normali delle forze acceleratrici.

Lezione 16.ª

In 24 ore di tempo sidereo la terra fa un giro intorno al suo asse; la figura della terra essendo poco diverso da una sfera e potendosi perciò riguardare come una sfera, ogni corpo alla superficie della terra in 24 ore descrive un circolo minore di questa. Per questo moto ogni corpo alla superficie della terra tende ad allontanarsi dal centro terrestre con una forza centrifuga acceleratrice espressa dalla formola $\frac{4\pi^2 a}{T^2}$, in cui a è il raggio del circolo, che il corpo descrive, e T è il numero dei secondi contenuti nel giorno sidereo.

Se i corpi non si staccano dalla terra vi è perchè sono pesanti, e la ~~forza~~ forza centrifuga che li sollecita è molto piccola rispetto alla gravità.



Rappresenti MEPEP una sezione fatta pel centro della terra perpendicolarmente al piano dell'equatore, sia EE la traccia dell'equatore su questo piano, sia PP la linea dei poli, rappresenti MG l'intensità della gravità in M, da M si abbassi su PP la perpendicolare MR, sarà MR il raggio del circolo descritto dal punto M.

Dalle osservazioni fatte (pag.ª 71) sul moto di un punto sovra un poligono risulta, che la forza centrifuga opera su di un mobile, che si muove sopra una curva, nel piano oscillatore, la forza centrifuga opera dunque sul punto M secondo il prolungamento di RM. Chiamando φ l'angolo MGE o la latitudine geografica del punto M, r il raggio terrestre, abbiamo MR = r cos φ, e quindi dalla formula ... forza centrifuga nel moto circolare = $\frac{4\pi^2 a}{T^2}$ abbiamo il valore della forza centrifuga in M, ossia alla latitudine φ, = $\frac{4\pi^2 r \cos\varphi}{T^2}$, esprimendo T il

numero di secondi contenuto nel giorno siderco . all'equatore $\varphi = 0$. ai poli $\varphi = 90°$, dunque ai poli la forza centrifuga è nulla, all'equatore è massima $\vartheta = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

Se g rappresenti la gravità in M, e G il valore della gravità se non esistesse la forza centrifuga, nel punto M abbiamo $g = G - \frac{4\pi^2 r \cos^2 \varphi}{T^2}$; la forza centrifuga diminuisce dunque la forza di gravità, e la diminuisce all'equatore più che in ogni altro luogo essendo all'equatore $g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

Lo schiacciamento della terra ai poli, ed il rilevamento all'equatore sono una conseguenza immediata di questa diminuzione della gravità all'equatore, supposto però che la sfera terrestre da principio fosse allo stato liquido.

Dividendo la gravità all'equatore g per la forza centrifuga $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ troviamo $\frac{g}{\frac{4\pi^2 r}{T^2}} = 288$, la forza centrifuga all'equatore è dunque $\frac{1}{288}$ della gravità g ossia $\frac{1}{289}$ della gravità G che avrebbe luogo se la terra non si muovesse, ma $289 = 17^2$, dunque all'equatore la forza centrifuga sta alla gravità :: $1 : 17^2$.

La luna fa un giro intorno alla terra circa in 28 giorni, ed è ritenuta nella sua orbita dalla gravità terrestre. L'orbita della Luna non è un circolo, ma se ne approssima tanto che possiamo supporla un circolo. La distanza della Luna alla terra contata in raggi terrestri sia L, chiamando g la gravità alla superficie terrestre sarà $\frac{g}{L^2}$ la gravità della Luna verso la terra, e $\frac{4\pi^2 L}{(28T)^2}$ sarà la forza centrifuga operante sulla Luna. Questa forza essendo diretta secondo il prolungamento della direzione della gravità, dovrà essere $\frac{g}{L^2} = \frac{4\pi^2 L}{(28T)^2}$. Da questa equazione ricavasi $L = 60$ raggi terrestri circa; ora l'osservazione della parallasse ci da per L lo stesso valore, è quindi vero, che la Luna non è altro, che un corpo, il quale si muove in grazia di una velocità iniziale, e della gravità terrestre ad attrazione della Terra.

Le orbite dei pianeti sono ellissi ; sia r il raggio vettore del pianeta, θ l'anomalia dell'astro o l'angolo del raggio vettore col grand'asse, a la metà del grand'asse, e l'eccentricità, T la durata di una rivoluzione intera intorno al Sole l'equazione polare della curva sarà $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, e sarà $r^2 d\theta = \varepsilon\, dt$ (pag^a 46); ora l'area di tutta l'orbita è $2\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, dunque $2\pi a^2\sqrt{1-e^2} = \varepsilon T$, quindi $\varepsilon = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$.

Dall'equazione $r^2 d\theta = \varepsilon dt$ ricavando dt e sostituendolo in v^2, abbiamo

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2}\varepsilon^2 = \varepsilon^2\left[\frac{\left(\frac{dr}{r^2}\right)^2}{d\theta^2} + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$v^2 = \varepsilon^2\left[\left(\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right], \text{ donde poichè } \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{a(1-e^2)}, \text{ e } \frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{e\operatorname{sen}\theta}{a(1-e^2)},$$

ricavasi $v^2 = \varepsilon^2\left[\frac{e^2\operatorname{sen}^2\theta}{a^2(1-e^2)^2} + \frac{(1+e\cos\theta)^2}{a^2(1-e^2)^2}\right] = \frac{\varepsilon^2}{a^2(1-e^2)^2}\left\{1+e^2+2e\cos\theta\right\}$

$$v^2 = \frac{\varepsilon^2}{a^2(1-e^2)^2}\left\{2+2e\cos\theta+e^2-1\right\} = \frac{\varepsilon^2}{a^2(1-e^2)}\left\{\frac{2(1+e\cos\theta)}{1-e^2} - 1\right\} = \frac{\varepsilon^2}{a^2(1-e^2)}\left\{\frac{2a}{r} - 1\right\},$$

Ciò posto, chiamando R l'attrazione del Sole, abbiamo $\frac{1}{2}d\cdot v^2 = -R\,dr$ (pag^a 50),

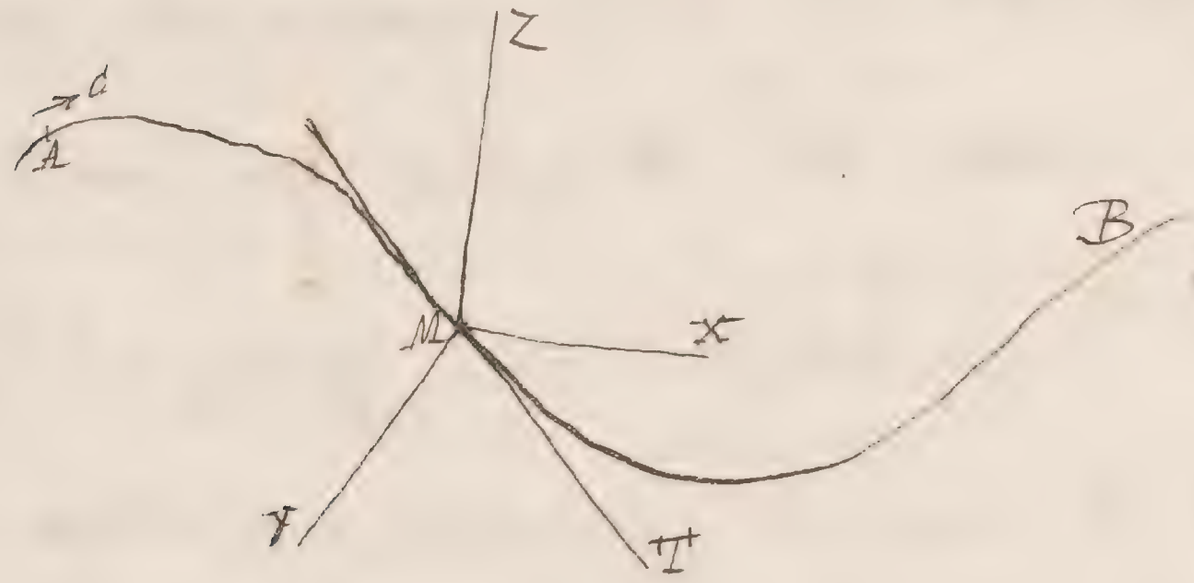
dunque $R = -\frac{1}{2}\frac{d\cdot v^2}{dr} = \frac{\varepsilon^2}{2a^2(1-e^2)}\cdot\frac{2a}{r^2} = \frac{\varepsilon^2}{a(1-e^2)r^2} = \frac{4\pi^2 a^4(1-e^2)}{a(1-e^2)r^2T^2}$

$$R = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}, \text{ dunque } R \text{ ossia l'attrazione solare è inversamente}$$

proporzionale al quadrato della distanza ; ora secondo Keplero $\frac{a^3}{T^2}$ è quantità costante per ogni pianeta, i pianeti sono dunque attratti egualmente dal Sole quando sono a distanze eguali da questo.

Lezione 19.ª

Consideriamo ora il moto sovra una curva a doppia curvatura e ricerchiamo la pressione del mobile contro la curva in ciascun punto del suo cammino.



Sia MB la curva a doppia curvatura sulla quale è costretto a muoversi il mobile; sia M una posizione di esso dopo il tempo t dalla sua partenza da A, sieno X, Y, Z le forze parallele agli assi, che lo sollecitano in ogni istante, ed v la sua velocità; la pressione del mobile sulla curva eserciterà essa normalmente alla curva stessa, ossia nel piano normale, e risolviamo MX parallela all'asse delle x in due forze una diretta secondo la tangente MT, l'altra diretta nel piano normale, la componente diretta nel piano normale farà parte della pressione; similmente risolvendo MY ed MZ ciascuna in due forze di cui una diretta secondo la tangente e l'altra nel piano normale, le componenti tangenziali non influiranno sul valore della pressione.

Le componenti tangenziali di MX, MY, MZ sono espresse da $\frac{X\,dx}{ds}$, $\frac{Y\,dy}{ds}$, $\frac{Z\,dz}{ds}$, la risultante di queste, ossia la componente tangenziale totale delle forze X, Y, Z sarà dunque $\frac{X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}{ds}$

ora abbiam veduto che il valore della velocità dipende soltanto dal trinomio $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$

Dunque $\frac{X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}{ds}$ è la sola forza acceleratrice del movimento, come abbiam visto avvenire nel moto libero.

Le componenti normali delle forze X, Y, Z hanno per valore $\frac{X\sqrt{ds^2-dx^2}}{ds}$, $\frac{Y\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds}$, $\frac{Z\sqrt{ds^2-dz^2}}{ds}$, la loro risultante è dunque $N=\sqrt{X^2\frac{ds^2-dx^2}{ds^2}+Y^2\frac{ds^2-dy^2}{ds^2}+Z^2\frac{ds^2-dz^2}{ds^2}-2XY\frac{dx\,dy}{ds^2}-2XZ\frac{dx\,dz}{ds^2}-2YZ\frac{dy\,dz}{ds^2}}$

ossia $N=\frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)ds^2-(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)^2}}{ds}$, ed i coseni degli angoli, che essa fa cogli assi sono

rispettivamente espressi dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{X(ds^2-dx^2)-Ydxdy-Zdxdz}{N\,ds^2}\\
\cos\beta &= \frac{-Xdxdy+Y(ds^2-dy^2)-Zdydz}{N\,ds^2}\\
\cos\gamma &= \frac{-Xdxdz-Ydydz+Z(ds^2-dz^2)}{N\,ds^2}
\end{aligned}\right\}$$

Resta a trovarsi l'altra parte della pressione dipendente dalla forza centrifuga; lo stesso ~~ragionamento~~ fatto nella pag.ª 72.ª vale a dimostrare, che la forza centrifuga dipende dall'angolo di due elementi consecutivi della curva, e che per conseguenza opera nel piano osculatore, è diretta secondo la normale principale, e la sua intensità è espressa dalla formola $\frac{v^2}{r}$, in cui v è la velocità, r è il raggio di curvatura; se dunque chiamiamo Δ, μ, ν gli angoli che la direzione della forza centrifuga fa cogli assi avremo $\cos\Delta = r\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}$, $\cos\mu = r\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}$, $\cos\nu = r\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}$. componendo la pressione N colla forza centrifuga avremo la forza totale acceleratrice corrispondente alla pressione del mobile contro la curva, le componenti parallele agli assi di questa forza sono dunque

$$\left.\begin{aligned}
N\cos\alpha+\frac{v^2}{r}\cos\Delta &= \frac{X(ds^2-dx^2)-Ydxdy-Zdxdz}{ds^2} - \frac{ds\,d.\frac{dx}{ds}}{dt^2}\\
N\cos\beta+\frac{v^2}{r}\cos\mu &= \frac{-Xdxdy+Y(ds^2-dy^2)-Zdydz}{ds^2} - \frac{ds\,d.\frac{dy}{ds}}{dt^2}\\
N\cos\gamma+\frac{v^2}{r}\cos\nu &= \frac{-Xdxdz-Ydydz+Z(ds^2-dz^2)}{ds^2} - \frac{ds\,d.\frac{dz}{ds}}{dt^2}
\end{aligned}\right\};$$

Queste formole ci somministrano subito il valore e la direzione della pressione del mo-bile sulla curva.

Chiamando K l'intensità di questa forza, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ gli angoli, che essa fa cogli assi abbiamo le relazioni

$$\left.\begin{aligned} K\cos\varepsilon &= X - \frac{d^2x}{dt^2} \\ K\cos\varepsilon' &= Y - \frac{d^2y}{dt^2} \\ K\cos\varepsilon'' &= Z - \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\}, \text{ ma } \left.\begin{aligned} X &= N\cos\alpha + \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} \\ Y &= N\cos\beta + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} \\ Z &= N\cos\gamma + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}\right\}.$$

Sostituendo questi valori nelle prime equazioni abbiamo

$$K\cos\varepsilon = N\cos\alpha - \frac{ds\, d.\frac{dx}{ds}}{dt^2} = N\cos\alpha + \frac{v^2}{r}\cos\mu$$

$$K\cos\varepsilon' = N\cos\beta - \frac{ds\, d.\frac{dy}{ds}}{dt^2} = N\cos\beta + \frac{v^2}{r}\cos\mu'$$

$$K\cos\varepsilon'' = N\cos\gamma - \frac{ds\, d.\frac{dz}{ds}}{dt^2} = N\cos\gamma + \frac{v^2}{r}\cos\mu''$$

Queste formole coincidono colle formole della pag.a antecedente, a cui siamo giunti ponendo che la ~~risultante della~~ pressione del mobile sulla curva sia eguale alla risultante della componente normale totale delle forze operanti sul mobile e della forza centrifuga; resta dunque così dimostrato coll'analisi che la pressione di un mobile, che si muove sopra una curva a doppia curvatura, è opposta alla pressione che questa curva fa sopra il mobile, e che questa è la risultante della forza centrifuga e della componente normale di tutte le forze applicate al mobile.

Consideriamo ancora il moto di un punto materiale sopra una data superficie curva.

Sia $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$ l'equazione differenziale della superficie, sia K la pressione del mobile sulla superficie, questa esercitandosi normalmente alla superficie farà cogli assi gli stessi angoli, che fa la normale alla superficie, ora, per brevità facciamo $\sqrt{l^2+m^2+n^2} = M$, i coseni di questi angoli sono $\frac{l}{M}, \frac{m}{M}, \frac{n}{M}$, dunque le componenti di K parallele agli assi sono $\frac{lK}{M}, \frac{mK}{M}, \frac{nK}{M}$;

ciò posto le equazioni differenziali del movimento sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{lK}{M}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{mK}{M}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{nK}{M}.$$

Moltiplicando la 1.a di queste equazioni per l, la 2.a per m, e la 3.a per n, e sommandole abbiamo

$$\frac{l\,d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z}{dt^2} = lX + mY + nZ - KM, \text{ donde ricaviamo}$$

$$M\,K = lX + mY + nZ - \frac{l\,d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z}{dt^2}$$, ed osservando che $dt = \frac{ds}{v}$,

$$M\,K = lX + mY + nZ - v^2\,\frac{l\,d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z}{ds^2}$$.

Ora la pressione del mobile sulla superficie è eguale alla risultante della forza centrifuga e della somma delle componenti normali delle forze applicate al mobile, da questa proprietà risulta, che la traiettoria del mobile ossia la linea che esso percorrerà sulla superficie ~~data~~ è quella per cui la ~~risultant~~ direzione della risultante fra le forze normali e la forza centrifuga, la quale è diretta secondo la normale principale della curva, coincide colla direzione della normale alla superficie.

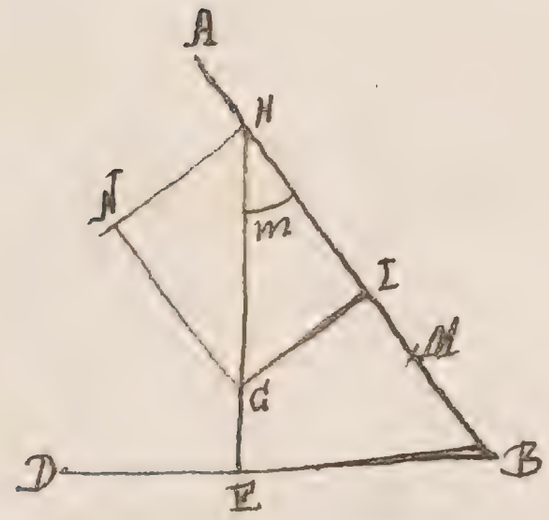
Se dunque il mobile non è sollecitato da altra forza, che dall'impulso primitivo, esso si muove sulla superficie secondo la curva, che gode della proprietà, che la normale principale ad essa curva coincide colla normale alla superficie; ora questa curva è la linea più breve o più lunga che si possa tirare tra due punti presi sulla superficie (V. Stat.ª pag.ª 275).

Lezione 20.ª

Non resta altro a dire sul movimento di un punto materiale; facciamo pertanto alcune applicazioni di tutto quel che fu detto finora, e passeremo quindi a considerare il movimento dei sistemi.

Movimento dei corpi pesanti sovra piani inclinati.

Sia il corpo semplicemente posato sul piano inclinato ossia gettato su di esso secondo la linea di massima pendenza, che è la perpendicolare all'intersezione del piano coll'orizzonte si in un caso, che nell'altro ~~caso~~ il movimento sarà rettilineo ed uniformemente accelerato.



Infatti rappresenti il piano della figura una sezione fatta perpendicolarmente all'interdezione del piano inclinato coll'orizzonte, sia AB l'intersezione di questa sezione col piano inclinato, essa sarà anche la linea di massima pendenza, sia BD l'intersezione coll'orizzonte, sia H il punto di partenza del mobile, e rappresenti HG l'intensità della ~~gravità~~ gravità; scompongiamo questa forza in due, una HN normale ad AB, l'altra HI diretta secondo AB, la prima HN essendo anche normale al piano inclinato sarà distrutta dalla resistenza di questo piano. La sola forza che contribuisca a far muovere il mobile è dunque la componente HI, il moto è dunque rettilineo, esiste secondo la linea di maggior pendenza AB.

HN esprime la pressione del mobile sul piano.

L'inclinazione del piano essendo costante, ed essendo costante anche la gravità, ne segue che in ciascun punto qualunque M della linea di caduta del mobile le componenti della gravità sono le stesse, e che perciò la forza acceleratrice del movimento è costante $d = HI$, come pure la pressione del corpo sul piano. Il moto è dunque uniformemente accelerato, ed è ancora uniformemente accelerato quando vi è attrito, poichè l'attrito è proporzionale alla pressione.

ora se chiamiamo m l'angolo del piano inclinato con la verticale sarà $\begin{cases} HI = g\cos m, \\ HN = g \operatorname{sen} m \end{cases}$ quindi la forza ~~di gravità~~ acceleratrice della gravità relativa sta alla gravità assoluta g come $HB \cdot \cos m : HB :: HE : HB$, ossia come l'altezza del piano alla sua lunghezza, e la pressione sta alla gravità assoluta come la base EB del piano sta alla sua lunghezza.

Chiamando P il peso assoluto del corpo, p il peso relativo del corpo sul piano inclinato, abbiamo $p = P\cos m$, il peso del corpo sul piano sta dunque al peso assoluto come l'altezza del piano sta alla lunghezza di questo.

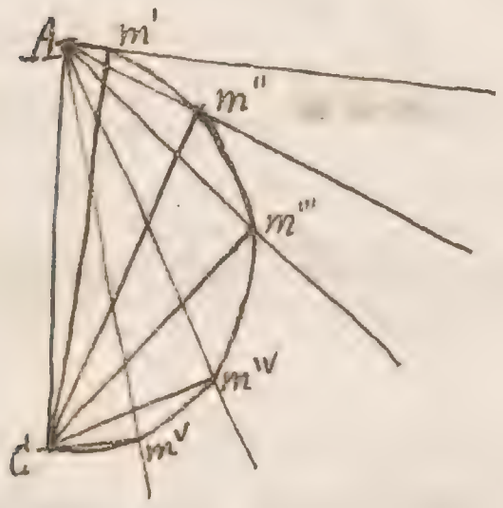
Chiamando x lo spazio HM, t il tempo impiegato a percorrerlo, v la velocità del mobile dopo questo tempo, le equazioni del movimento saranno

$$v = g\,\omega/m \cdot t \quad , \quad x = \frac{g\,\omega/m \cdot t^2}{2} \quad , \quad v^2 = 2\,g\,\omega/m \cdot x \quad .$$

Se il mobile nel tempo della linea di maggior pendenza AB ha una velocità iniziale G, il suo moto sarà ancora rettilineo ed uniformemente accelerato, e le due equazioni saranno $v = G + gt\,\omega/m$, $x = Gt + \frac{1}{2} g\,\omega/m \cdot t^2$. $\frac{v^2 - G^2}{2g} = x\,\omega/m$.

Quest'ultima equazione analoga all'altra $\frac{v^2}{2g} = x\,\omega/m$ si dimostra, che la velocità acquistata dal mobile cadendo pel piano inclinato è eguale a quella che avrebbe acquistata cadendo dalla stessa altezza verticalmente.

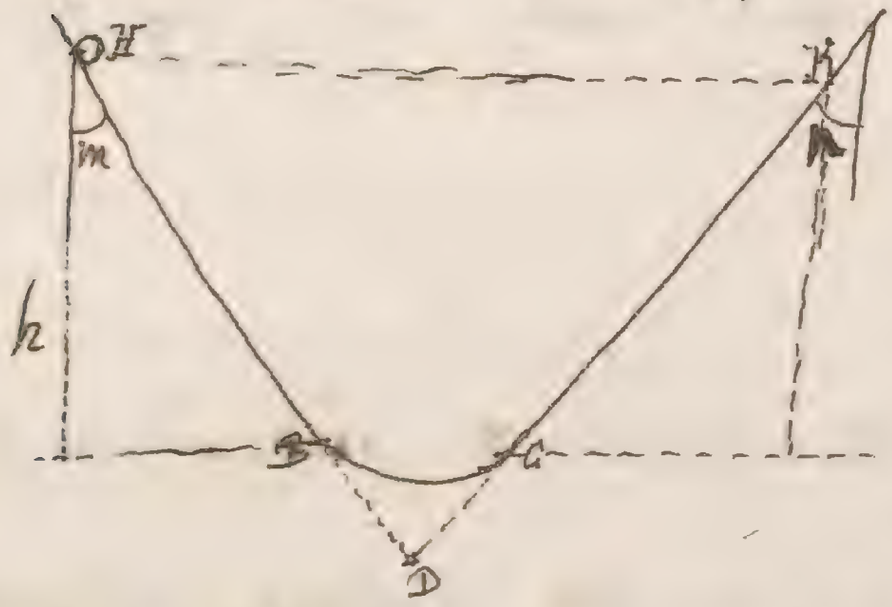
L'equazione $x = \frac{1}{2} gt^2 \cdot \omega/m$ dimostra, che mentre un grave cadendo per la verticale da H arriva in G, nello stesso tempo un altro grave cadendo pel piano inclinato arriva in I.



Quindi risulta un bel teorema;

Tutte le corde di un cerchio tirate da una delle estremità di un diametro verticale sono percorse da un grave nello stesso tempo, in cui percorrerebbe il diametro verticale.

Due piani inclinati di cui uno fa un angolo m colla verticale, e l'altro un angolo n sono posti dirimpetto uno all'altro, ed uniti prima della loro intersezione D continuamente per mezzo di una superficie cilindrica BG, un ~~grave~~ ~~è posto~~ posto sul 1° piano in H



all'altezza h al disopra di B si domandano tutti gli accidenti del movimento di un tal grave, supposto l'area BG trascurabile a fronte di HB.

Soluzione del Problema.

Il grave cadrà da H in B con moto uniformemente accelerato, ~~finito~~ dopo un tempo $t=\sqrt{\frac{2h}{g\cdot\cos^2 n}}$ sarà in B, e avrà acquistata la velocità $v=\sqrt{2gh}$, percorrerà quindi Bb e per essere Bb piccolissimo avendo in d la stessa velocità, che in B salirà dal secondo piano inclinato sino ad una altezza h dal punto b in un tempo $t=\sqrt{\frac{2h}{g\cos^2 n}}$, giunto in K alla altezza h cadrà di nuovo e verrà in b nello stesso tempo in cui da b è andato in K, ed avrà in b la stessa velocità che avea nel suo primo passaggio per b, quindi oltrepasserà b, e monterà sul piano inclinato BH sino in H nello stesso tempo nel quale era disceso da H in B; giunto in H trovandosi nello stesso stato, che al principio del movimento si muoverà con le stesse leggi con cui allora si mosse, e si muoverà così andando da H in K, e da K in H per tutti i secoli.

Supponiamo ora che il mobile in H sia gettato con una velocità iniziale c;

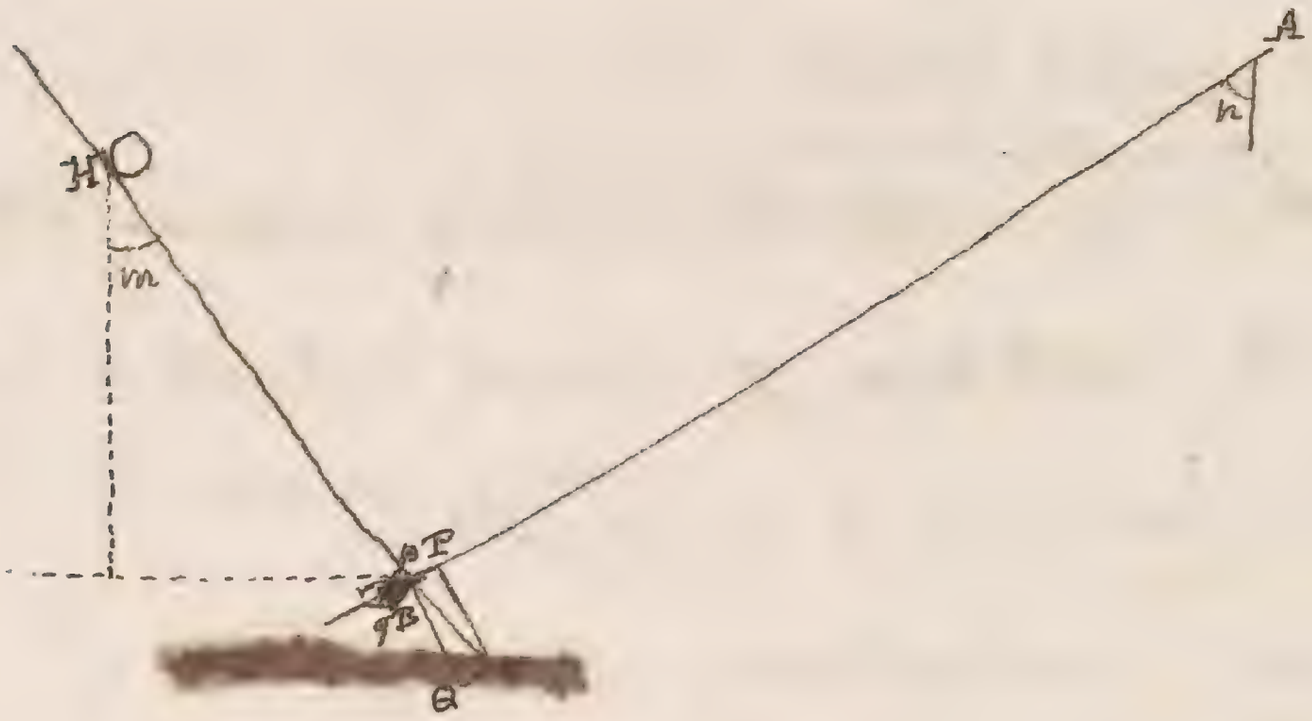
In questa ipotesi il mobile cadrà in un tempo $t=\frac{-c+\sqrt{c^2+2gh}}{g\cos n}$ da H in B acquistando una velocità $v=\sqrt{c^2+2gh}$, passerà da B in a, e salirà pel 2° piano inclinato sino ad una altezza $a=h+\frac{c^2}{2g}$ in un tempo t' somministrato dall'operazione $t'=\frac{\sqrt{c^2+2gh}}{g\cos n}$

$\frac{h+\frac{c^2}{2g}}{\cos n}=\sqrt{c^2+2gh}\,t'-\frac{1}{2}g\cos n\cdot t'^2$, donde il preciso tempo esso prenderà a muoversi come nel caso precedente, poichè allora la sua velocità è nulla, e cade lungo il piano KC come se si fosse posato sopra all'altezza $h+\frac{c^2}{2g}$.

Altro Problema.

I piani inclinati non tengono più unità continuamente, e domandano tutti gli accidenti del movimento di un grave posato in H sul piano HB all'altezza h al di sopra del punto B, facendo i piani inclinati gli angoli m, n colla verticale.

Soluzione:



Il mobile da H andrà in B nel tempo $\theta = \frac{\sqrt{2h}}{\cos m . \sqrt{g}}$, e avrà in B la velocità $V = \sqrt{2gh}$. Giunto in B percuote contro il piano AB, perde nel senso normale ad AB la velocità $BQ = V \sin(m+n) = \sqrt{2gh} . \sin(m+n)$, e monta sovra BA con velocità $BP = V \cos(180° - (m+n)) = -V \cos(m+n) = -\sqrt{2gh} . \cos(m+n)$. (Il segno − di cui è affetta BP ci dice, che il corpo monta su BA quando l'angolo HBA è ottuso, poichè HBA = m+n, e se HBA è ottuso, $\cos(m+n)$ è negativo, e BP diventa positivo). Su di BA salirà sino all'altezza espressa dalla formola $h \cos^2(m+n)$ in un tempo $\theta' = \sqrt{\frac{2h}{g}} . \frac{\cos(m+n)}{\cos n}$. Giunto a tale altezza cadrà e verrà in B nel tempo θ' passando per gli stessi stati che nella salita, di modo che in B avrà la stessa velocità BP che avea nel suo primo passaggio per B sul piano BA. Giunto in B il mobile percuote il piano BH, perde nel senso normale a BH la velocità $Bq = BP \sin(m+n) = -\sqrt{2gh} . \cos(m+n) \sin(m+n)$, e monta sul piano BH colla velocità $Bp = -BP \cos(m+n) = \sqrt{2gh} . \cos^2(m+n)$, salirà sino all'altezza espressa dalla formola $h \cos^4(m+n)$ nel tempo $\theta'' = \sqrt{\frac{2h}{g}} . \frac{\cos^2(m+n)}{\cos m}$, calerà quindi in B nel tempo θ'' acquistando la velocità Bp; giunto in B percuote il piano BA, perde nel senso normale a BA la velocità $Bp \sin(m+n) = \sqrt{2gh} . \cos^2(m+n) \sin(m+n)$, e monta su BA con velocità $-Bp \cos(m+n) = -\sqrt{2gh} \cos^3(m+n)$. Sale fino all'altezza $h \cos^6(m+n)$ nel tempo $\theta''' = \sqrt{\frac{2h}{g}} . \frac{\cos^3(m+n)}{\cos n}$, dopo il qual tempo discende per salire sull'altro piano e così di nuovo discendere ----. Così oscillerà il mobile sempre perdendo a ciascuna salita parte della sua velocità, finchè questa sarà [illegible] nulla.

V essendo la velocità acquistata dal mobile nella 1ª discesa, θ il tempo impiegato per acquistarla, h ~~lavoro~~ l'altezza ad essa dovuta, ed essendo i il numero delle discese fatte dal mobile sul 1° piano HB in un certo tempo, V_i la velocità, che il mobile ha in B dopo questo tempo, h_i l'altezza dovuta a questa velocità, θ_i il tempo, θ' il tempo impiegato nella 1ª salita sul 2° piano, impiegato a fare un numero i di oscillazioni sui due piani, abbiamo

$$V_i = V\cos^{2i}(m+n), \quad h_i = h\cos^{4i}(m+n), \quad [illegible]^{2i}.$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}\left[1+\cos^2(m+n)+\cos^4(m+n)+\cos^6(m+n)+\text{- - - -}+\cos^{2i}(m+n)\right]2(\theta+\theta')-\theta-2\theta'\cos^{2i}(m+n)$$

Questa formola ci somministra la durata totale del moto

$$t = \frac{2\theta+2\theta'}{1-\cos^2(m+n)} - \theta = \frac{2\theta+2\theta'-\theta\operatorname{sen}^2(m+n)}{\operatorname{sen}^2(m+n)} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{\cos n-\cos(m+n)}{\cos n\operatorname{sen}^2(m+n)} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{\operatorname{sen} m.\operatorname{tang} n}{\operatorname{sen}^2(m+n)};$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{\operatorname{tang} m}{\cos n\operatorname{sen}(m+n)} = \frac{\theta\cos^2(m+n)+\theta+2\theta'}{\operatorname{sen}^2(m+n)} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{\cos n-\cos m\cos(m+n)-\operatorname{sen} n\operatorname{sen}(m+n)}{\cos(m+n)}\cdot\frac{\cos(m+n)}{\cos m\cos n\operatorname{sen}^2(m+n)}$$

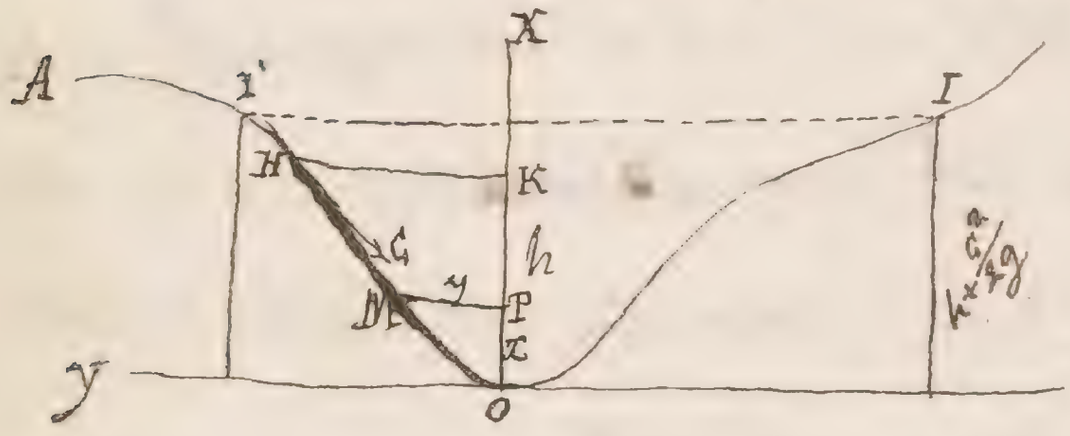
Lezione 21.ª

Sia il grave lanciato sul piano inclinato in una direzione qualunque ad angolo f colla linea di massimo pendio. A ciascun istante risolvendo la gravità in due forze, una normale al piano, l'altra contenuta in esso, questa sarà diretta secondo la linea di massimo pendio, ora le linee di massimo declività sono tutte parallele, il grave dunque si muove sul piano inclinato come se fosse sollecitato da una forza costante in intensità e direzione, esso dunque descrive sul piano una parabola tangente alla linea di projezione, e che ha l'asse parallelo alla linea di massimo pendio, ed il cui parametro è quadruplo dell'altezza dovuta alla velocità orizzontale di projezione e divisa per il seno dell'angolo che il piano facolla verticale. Sia m quest'angolo e sia f l'angolo della direzione iniziale del mobile colla linea di massimo declivio la componente normale della gravità la quale non è altro che la pressione del grave sul piano sarà $= g\operatorname{sen} m$, la gravità relativa ossia l'intensità della forza per cui il grave descrive la parabola sul piano sarà $g\cos m$, e l'equazione della parabola riferita a due assi passanti pel punto di partenza del grave e uno orizzontale (delle x) l'altro parallelo alla linea di massimo pendio (delle y), sarà $y = \operatorname{tang} f.x - \frac{g\cos m.x^2}{2c^2\operatorname{sen}^2 f}$.

La velocità del grave ad ogni istante essendo eguale a quella che esso acquisterebbe cadendo verticalmente dalla stessa altezza sarà la velocità espressa dalla formola $v=\sqrt{a^2+2gy\cos m}$. Il tempo t impiegato dal grave ad acquistar questa velocità è dato dalla formola $t=\frac{x}{a\operatorname{sen} f}$.

Se il mobile sia costretto a muoversi sovra più piani inclinati fatile sarà il determinare la via che esso percorre, ora una superficie qualunque si può considerare come composta di facili piani, non è quindi difficile la determinazione del corso di un fiume; se non che in questa determinazione bisognerebbe tener conto anche della diversa tenacità dei terreni.

Movimento di un corpo pesante sopra una curva situata in un piano verticale.



Sia AHMO la curva, riferiamola a due assi ortogonali OX, OY, uno verticale, l'altro orizzontale, essendo data la curva per la sua equazione avremo esplicitamente od implicitamente y espressa per x. Sia il mobile gettato sulla curva in H con velocità iniziale a, si domanda quale sarà la sua velocità, e che pressione eserciterà sulla curva quando sarà giunto in un punto qualunque M determinato dalle coordinate x, y, e quanto tempo impiegherà a giungervi.

In M il mobile avendo la stessa velocità, che le fosse disceso verticalmente dalla stessa altezza $OK-x=h-x$, la sua velocità è $v=\sqrt{a^2+2g(h-x)}$.

La pressione N del mobile sulla curva è eguale alla risultante della componente normale della gravità e della forza centrifuga, dunque $N=-g\frac{dy}{ds}+\frac{v^2}{r}$.

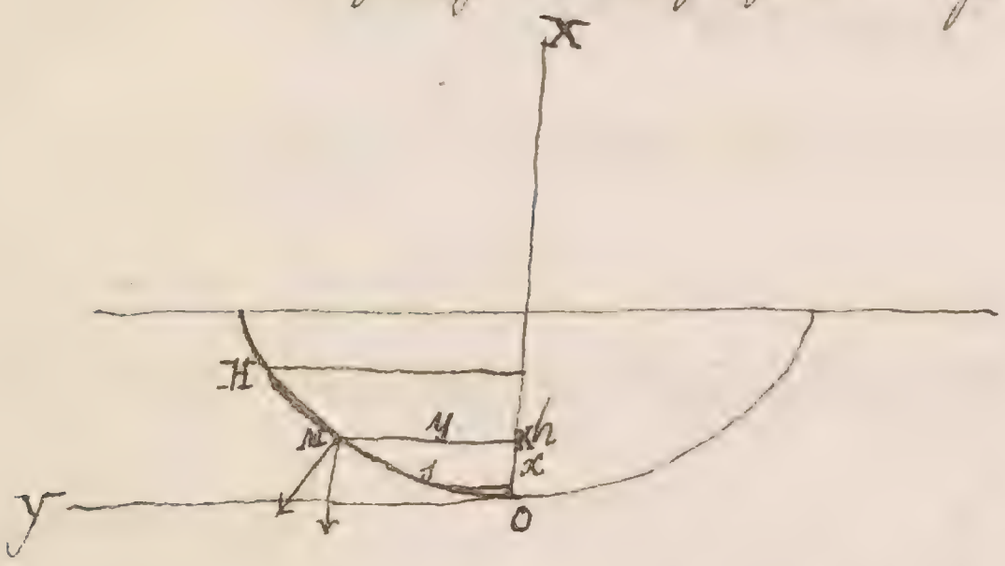
Collocando l'origine degli archi in O abbiamo $v=-\frac{ds}{dt}$, quindi $dt=-\frac{ds}{v}=-dx\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{a^2+2g(h-x)}}$;

Integrando questa espressione in modo, che $x=h$ renda $t=0$, abbiamo il valore di t.

In questo moto possono avvenire più casi; o la curva termina in O, allora il grave giunto in O continua a muoversi descrivendo la sua trajettoria parabolica; od in O vi ha un'ostacolo normale alla curva, allora il grave permute quest'ostacolo e si ferma; od in O vi ha un'ostacolo non normale alla curva, ossia incomincia in O un'altra curva, che fa colla prima un'angolo finito, allora il grave giunto in O percuote contro questa curva, perde in senso normale a questa una parte della sua velocità, e ascende sudi questa colla velocità rimanente; o finalmente la curva si continua al di là del punto O tangenzialmente ad OX, allora il corpo continua a muoversi su di essa, sale sin che la gravità gli ~~toglie~~ abbia tolta tutta la velocità, e scende sino all'altezza $h+\frac{c^2}{2g}$. Giunto a quest'altezza discende, oltrepassa il punto O, ed ascende quindi sino all'altezza $h+\frac{c^2}{2g}$ sul primo ramo di curva, donde di nuovo discende, e così continua per una eternità.

In quest'ultimo caso una escursione compiuta del mobile da I in I' all'altezza $h+\frac{c^2}{2g}$ si chiama una oscillazione intiera. Siccome il mobile impiega tanto tempo nella salita da O in I che nella discesa da I in O, ed impiega lo stesso tempo a salire da O in I' che a discendere da I' in O, perciò le oscillazioni di un grave ~~mobile~~ sudi una curva si dicono isocrone, ossia di egual durata.

Prendiamo a considerare il moto dei gravi sopra alcune curve particolari, ed in primo luogo sulla cicloide, la quale gode di una proprietà singolare, come vedremo.



Se $\frac{1}{n}a$ sia il diametro del circolo generatore, riferendo la cicloide a due assi tirati pel suo punto infimo O, uno orizzontale OY, l'altro verticale OX, la sua equazione differenziale è $sds=adx$.

Sia un grave gojato su questa curva in H all'altezza h dalla orizzontale OY, la velocità di esso quando sarà giunto nel punto M tale, che $MK=y$, $OK=x$, $OM=s$, sarà $v=\sqrt{2g(h-x)}$.

Dall'equazione $sds=adx$. ricaviamo $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{a-2x}{a}}$, ed il raggio di curvatura $r=\sqrt{a^2-2ax}$, sostituendo questi valori nel valore della pressione K del mobile sulla curva $K=-g\frac{dy}{ds}+\frac{v^2}{r}$, ed osservando, che in questo caso la gravità e la forza centrifuga hanno lo stesso

segno, abbiamo $K = -g\sqrt{\frac{a-2x}{a}} - \frac{2g(h-x)}{\sqrt{a(a-2x)}} = -\frac{g}{\sqrt{a}} \cdot \frac{a+2h-4x}{\sqrt{a-2x}}$.

Questo valore essendo sempre negativo dinota che la pressione spinge sempre il mobile contro la curva.

Finalmente dall'equazione $dt = -\frac{ds}{v}$ abbiamo $dt = -\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}$.

Integrando in modo questo valore che per $x=h$ si abbia $t=0$ troviamo

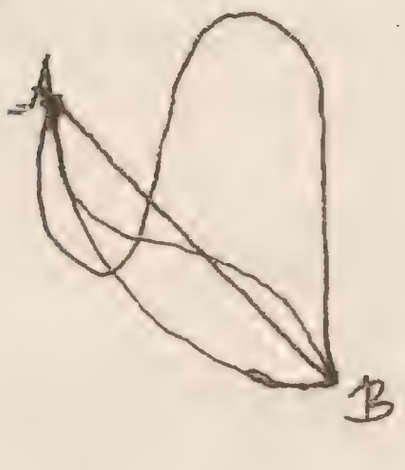
$t = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{2x-h}{h}\right)$.

In questa formula ponendo $x=0$, abbiamo la durata T della discesa del mobile da H in O $T = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$; questo valore non dipende da h, dunque la durata della discesa di un mobile per la cicloide è la stessa in qualunque luogo si metta il grave. Le oscillazioni di un grave su di una cicloide sono perciò dette Cautocrone.

Il Cautocronismo avviene sempre nei moti quando la forza acceleratrice del movimento è proporzionale alla distanza che resta a percorrere: nel nostro caso la forza acceleratrice è $g\frac{dx}{ds} = \frac{gs}{a}$.

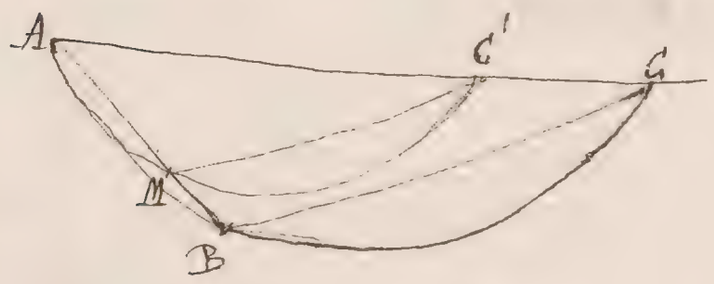
Lezione 22ª.

Un grave può andare da un punto A ad un'altro B in infinità modi, poichè infinito è il numero delle curve che possiamo far descrivere al mobile per farlo giungere in B. Qualunque curva esso descriva in questo tragitto arriverà sempre in B colla medesima velocità, ma non nello stesso tempo.



Il tempo può crescere indefinitamente, infatti basta che facciamo percorrere dal mobile una curva infinitamente lunga, perchè esso impieghi a giungere in B un tempo infinito, ma non può diminuire indefinitamente, poichè non potrà mai il mobile passare da A in B in un tempo nullo; possiamo quindi proporci il seguente problema;

trovare la curva che si deve far percorrere ad un grave, perchè esso giunga da A in B nel minor tempo possibile, ossia trovare la forma della curva Brachistocrona — La soluzione di ~~Questo~~ Questo problema appartiene al Calcolo delle Variazioni. Questo Calcolo ci dimostra, che la curva Brachistocrona è una cicloide descritta sopra la base orizzontale AC', e che parte dal punto A.



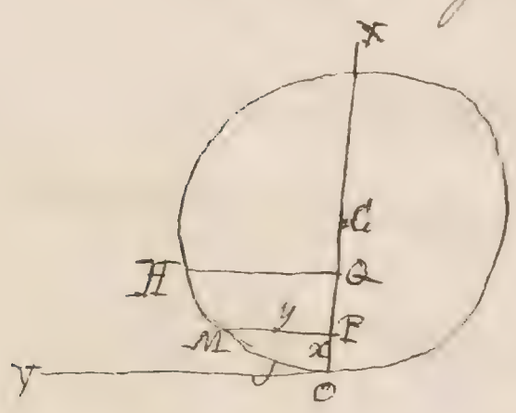
Il tale cicloide è facile a costruirsi graficamente. Si descriva una cicloide qualunque sulla base AC', e che parta dal punto A, si tiri AB, sia M il punto d'incontro di questa retta colla cicloide. Tutte le cicloidi essendo curve simili perchè contenenti un solo parametro, che è il diametro del circolo generatore dovrà essere, se chiamiamo a il doppio del diametro del circolo generatore della cicloide AMC', a il para-metro corrispondente nella cicloide che cerchiamo, AM : AB :: a : x. Questa proporzione ci da a, e quindi possiamo descrivere facilmente la cicloide.

Possiamo proporci un altro problema. Descrivere sopra una superficie cilindrica verticale la curva Brachistocrona.

La durata della discesa del grave sopra la superficie cilindrica non dipendendo dalla curvatura della superficie, poichè $t=\int \frac{ds}{v}$, se sviluppiamo la superficie cilindrica, vi descriviamo sopra una cicloide, e quindi la arrotoliamo di nuovo, la cicloide arrotolata sarà la curva Brachi-stocrona.

Il problema è molto più difficile se vogliamo tener conto dell'attrito.

Movimento di un grave sulla circonferenza di un circolo verticale.



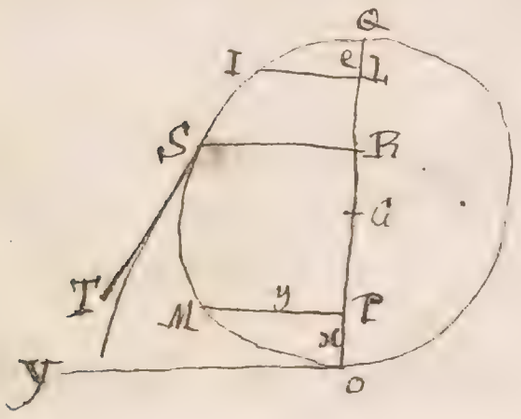
Riferiamo il circolo a due assi uno orizzontale l'altro verticale condotti pel suo punto più basso, chiamando a il raggio, l'equazione del circolo sarà $y^2=2ax-x^2$.

Sia H il punto di partenza del mobile, sia OQ = h, e rappresenti la lettera H l'altezza dovuta alla velocità di proiezione, avremo $v=\sqrt{2g(H+h-x)}$

$$-K = g\frac{dy}{ds}+\frac{v^2}{a}=\frac{g}{a}\left[a+2(H+h)-3x\right],$$

x essendo minore di h, h essendo minore di a, $a+2(H+h)-3x$ è necessariamente positivo, dunque K è necessariamente negativa finchè x è minore di h; quando x è maggiore di h può essere che K sia positiva, allora il grave si stacca dal circolo e descrive la sua traiettoria parabolica.

Supponiamo il grave posto sulla parte esterna della circonferenza in I, sia



$QL=e$, sarà $H=0$, $h=2a-e$, e

$-K=\frac{g}{a}(3a-2e-3x)$; questa formola dimostra, che il corpo cadrà sulla circonferenza finchè sarà $x\geq\frac{3a-2e}{3}$, che quando $x=\frac{3a-2e}{3}$, $K=0$, e che diventando $x<\frac{3a-2e}{3}$ K è negativa ed il corpo si stacca dal circolo descrivendo una parabola tangente ad ST, essendo S il punto per cui $x=\frac{3a-2e}{3}$.

La formola $dt=-\frac{ds}{v}$ diventa nel nostro caso $dt=\frac{-a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}\sqrt{2g(H+h-x)}}$.

Questa formola non è integrabile che per approssimazione. In alcuni casi però essa diventa integrabile.

Quando $H+h=2a$, allora $dt=\frac{-a\,dx}{(2a-x)\sqrt{2gx}}=-\frac{a}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{(2a-x)\sqrt{x}}$,

e $t=-\frac{a}{\sqrt{2g}}\int\frac{dx}{(2a-x)\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\log\left\{\frac{\sqrt{2a-x}\,(\sqrt{2a}-\sqrt{x})}{2a-x}\cdot\frac{\sqrt{2a-h}\,(\sqrt{2a}+\sqrt{h})}{2a-h}\right\}$, ossia

$$t=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}\log\left[\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}\right].$$

In questa formola facendo $x=2a$ troviamo t infinito. Ciò significa, che quando $H+h=2a$, il grave non arriva in Q, quantunque esso continuamente si muova verso Q (nell'ipotesi però che non possa staccarsi dal circolo, giacchè la formola del valore di K diventa in questo caso zero per $x=\frac{3a}{3}$).

Se $H+h$ sorpassa $2a$ il mobile dopo un tempo finito arriva in Q, sorpassa questo punto, discende dall'altra parte sino in I, giunto in I si trova nello stesso stato che all'istante della sua partenza.

Ognivolta che $H+h<2a$ il moto del grave è oscillatorio, poichè ~~il grave~~ sul cicloide non può mon-
-tare in tal caso, che all'altezza $x=H+h<2a$ mentre nel caso di $H+h>2a$ il moto è
progressivo.

Se $H=0$, $dt=-\frac{a}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x(2a-x)(h-x)}}$, e se inoltre h sia piccolissimo a fronte di x che è $<h$ sarà trascurabile a fronte di x, e sarà $dt=-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}$; ora questa è la formola del tempo impiegato da un grave a cadere per la cicloide, dunque la durata delle oscillazioni minime di un grave sopra un' arco di circolo è eguale alla durata delle oscillazioni sopra la cicloide osculatrice nel punto infimo del circolo, e per conseguenza $=\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, e tali oscillazioni sono Tautocrone. Ora una curva qualunque verticale si può considerar confusa col suo circolo osculatore intorno al suo punto infimo, quindi ogni arco piccolissimo di curva presso al di quà ed al di là del punto in cui la normale è verticale gode del Tautocronismo.

Lezione 23.ª

Per avere la durata delle oscillazioni di un grave sopra un'arco di circolo di ampiezza non infinita-
-mente piccola bisogna che integriamo l'equazione $dt=\frac{-a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}\sqrt{2g(h-x)}}$ ~~per~~
Questa integrazione si fa per serie nel modo seguente; Mettiamo ~~quest~~ l'equazione sotto la forma

$$dt=-\frac{a}{\sqrt{2g}\sqrt{2a}}\cdot\frac{dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{hx-x^2}}=-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

poichè $\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{x}{2a}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\cdots+\frac{1.3.5.\cdots(2m-1)}{2.4.6.\cdots 2m}\left(\frac{x}{2a}\right)^m+\cdots$

avremo $t=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}\left[\int\frac{-dx}{\sqrt{hx-x^2}}+\Sigma\frac{1.3.5.\cdots(2m-1)}{(2a)^m 2.4.6.\cdots 2m}\int\frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}}\right]$, servendoci del simbolo

Σ per esprimere la somma di tutti gli integrali dei diversi termini del valore di dt sviluppato

in serie. Quest'ultima formula ci dice, che per avere il valore di t basta che troviamo il valore di $\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}}$, e volendo noi soltanto la durata totale dell'oscillazione basta che troviamo il valore di $\int_h^0 \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}}$; ora quest'integrale noi possiamo farla dipendere da $\int_h^0 \frac{-dx}{\sqrt{hx-x^2}}$,

il quale integrale sappiamo essere $= \pi$,

Infatti poniamo scrivere $\int_h^0 \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \int_h^0 \frac{\left(\frac{1}{2}hx^{m-1} - x^m\right)dx - \frac{1}{2}hx^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}}$, e avremo

$$\int_h^0 \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \int_h^0 \frac{\left(\frac{1}{2}h - x\right)x^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}} + \frac{1}{2}h\int_h^0 \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}}, \text{ ora}$$

$$\int_h^0 \frac{\left(\frac{1}{2}h-x\right)x^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}} = x^{m-1}\sqrt{hx-x^2} - (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{hx-x^2}\,dx$$

$$= -(m-1)\int_h^0 \frac{x^{m-2}(hx-x^2)\,dx}{\sqrt{hx-x^2}}$$

$$= h(m-1)\int_h^0 \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}} - (m-1)\int_h^0 \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}},$$

Dunque $\int_h^0 \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}} = h(m-1)\int_h^0 \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}} + \frac{1}{2}h\int_h^0 \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}} - (m-1)\int_h^0 \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}}$;

Da questa equazione ricavasi la seguente formola

$$\int_h^0 \frac{-x^m dx}{\sqrt{hx-x^2}} = h\cdot\frac{2m-1}{2m}\int_h^0 \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}}, \text{ in cui facendo successivamente}$$

$m = 1,\ m = 2,\ m = 3,$ ——— , hassi ———

$$\int_h^0 \frac{-x\,dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{h}{2}\pi \qquad \int_h^0 \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{hx-x^2}} = h\cdot\frac{3}{4}\int_h^0 \frac{-x\,dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot h^2}{2\cdot 4}\pi$$

$$\int_h^0 \frac{-x^3\,dx}{\sqrt{hx-x^2}} = h\cdot\frac{5}{6}\int_h^0 \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot h^3}{2\cdot 4\cdot 6}\pi, \quad - - - -$$

$$\int_h^0 \frac{-x^m\,dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2m-1)\cdot h^m}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2m}\pi.$$

Sostituendo questi valori nel valore di t, avremo la durata d'una oscillazione intiera

$$t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2a}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{h^2}{4a^2}+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{h^3}{8a^3}+ \cdots\right].$$

Supponiamo, che l'arco percui vogliamo far oscillare il grave sia di un numero 2α di gradi, avremo $h = a(1-\cos\alpha)$, ora chiamando γ la lunghezza dell'arco nel raggio 1 abbiamo

$$\gamma = 2\cdot\frac{\pi\alpha}{180}, \text{ e } \cos\alpha = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^4-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^6+ \cdots,$$

Dunque $\frac{h}{2a} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\gamma^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\gamma^4}{16}+ \cdots = \frac{1}{16}\gamma^2-\frac{1}{768}\gamma^4+\cdots$;

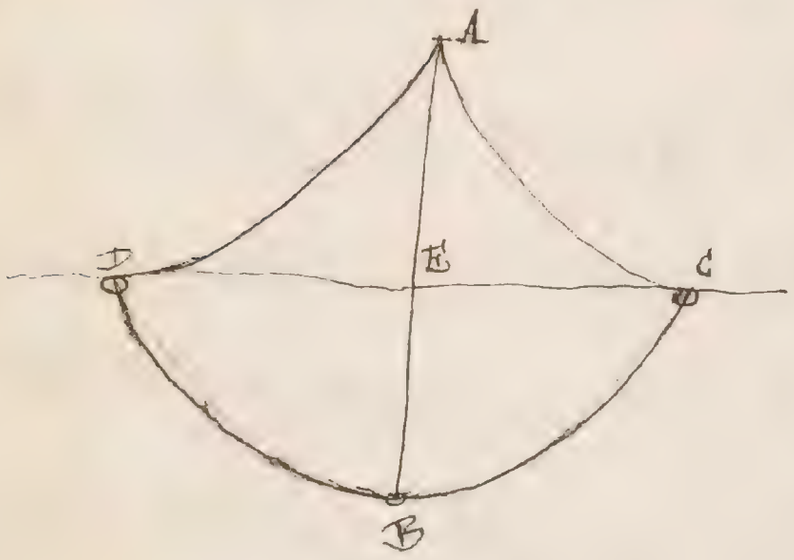
Se $\gamma = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{768}\gamma^4 = \frac{1}{7680000}$, quando l'arco γ non è molto grande si può

Dunque trascurare il termine in γ^4, ~~e dt~~ e le potenze superiori alla prima di $\frac{h}{2a}$ nella serie del valore di t, Dunque per archi circolari non molto grandi la durata delle oscillazioni è $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left[1+\frac{1}{16}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]$, ora chiamando θ la durata delle oscillazioni per la cicloide, abbiamo $\theta = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, Dunque

$$t = \theta\left[1+\frac{1}{16}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right].$$

Lezione 24.ª

Poniamo per descrivere un'arco circolare ad un grave attaccarvi unito all'estremità di un filo senza peso legato per l'altra sua estremità ad un sostegno fisso, ed abbandonandolo alla gravità in una posizione ~~che~~ del filo, che non sia verticale. Il grave si metterà ad oscillare per archi circolari. Un tal sistema dicesi pendolo semplice; quindi il pendolo semplice consiste in una massa di volume insensibile legata all'estremità di un filo senza massa. In natura non si può avere un tal pendolo, è però sempre possibile di sostituire ad un pendolo composto un pendolo semplice, che faccia nello stesso tempo lo stesso numero di oscillazioni; ci occuperemo di ciò a suo tempo. Il pendolo semplice si può far oscillare per una curva qualunque, purchè si costringa il filo a stare applicato sull'evoluta della curva. Così se si voglia far descrivere ad un pendolo archi di cicloide basta che



dividiamo la lunghezza del pendolo AB in due parti eguali in E, che per E conduciamo una orizzontale DC, e che adestra ed a sinistra di A a partire da esso punto A descriviamo due archi cicloidali AC, AD tali che il diametro del loro cicolo generatore sia AE; facendo oscillare il pendolo tra questi due archi esso descriverà l'arco cicloidale DBC, il quale ha per evoluta gli archi AD, AC.

Essendo la lunghezza del pendolo indicata dall'oscillazione intiera per la cicloide DBC è $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$; se il pendolo oscilla liberamente esso descrivendo archi circolari, e questi sono assai piccoli, la durata dell'oscillazione intiera è come pel pendolo cicloidale $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$; finalmente se il pendolo oscilla per archi

circolari non molto grandi, ma non infinitamente piccoli, l'aumento della durata è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di oscillazione; infatti troviamo la formola $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\left(\frac{\psi}{2}\right)^2\right]$; la quantità $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\psi}{2}\right)^2$ è detta la correzione di amplitudine: questa correzione, negli usi pratici è trascurabile, poichè i pendoli li facciamo sempre oscillare per archi di poca ampiezza.

Tutto ciò suppone nessun attrito, e che il pendolo oscilli nel vacuo intorno ad un punto matematico A, ora queste condizioni non si verificano mai in natura: vedremo pertanto le correzioni da farsi alla formola $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$ per renderla applicabile ai nostri pendoli.

Intanto questa formola ci insegna, che la durata t della oscillazione cangia col variare della lunghezza del pendolo, colla gravità, e che essa è direttamente proporzionale alla radice quadra della lunghezza del pendolo, ed inversamente alla radice quadra della gravità; cioè t, t' dieno le durate delle oscillazioni di due pendoli di lunghezze a, a', sarà $t : t' :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$, e viceversa $a : a' :: t^2 : t'^2$, e se gli stessi pendoli si facciano oscillare in due luoghi diversi, pei quali la gravità sia g in un luogo, g' nell'altro, sarà $t : t' :: \sqrt{g'} : \sqrt{g}$, e viceversa $g : g' :: t'^2 : t^2$.

Nelle osservazioni pratiche invece di contare il tempo impiegato dal pendolo a fare una oscillazione si conta il numero delle oscillazioni che esso fa in ~~un~~ dato ~~tempo~~. Essendo n, n' ~~due~~ i numeri delle oscillazioni fatte da due pendoli diversi nello ~~stesso~~ tempo; t, t' i tempi, che impiegano a fare una oscillazione, a, a' le loro lunghezze, abbiamo evidentemente $t : t' :: n' : n$, quindi $n : n' :: \sqrt{a'} : \sqrt{a}$, ovvero $a : a' :: n'^2 : n^2$.

In uno stesso luogo ~~le~~ il numero delle oscillazioni fatte in ~~uno stesso~~ tempo eguali da uno stesso pendolo non varia, poichè la gravità non varia in uno stesso luogo; se in due diversi luoghi si fosse trovato che

uno stesso pendolo facesse un numero diverso di oscillazioni nello stesso tempo, si darebbe conchiuso, che la gravità non era la stessa nei due luoghi, e che le gravità g, g' dei due luoghi stanno $:: n^2 : n'^2$; n, n' essendo i numeri delle oscillazioni fatte dal pendolo in tempi eguali nei due luoghi; ora le osservazioni dimostrano, che dal polo camminando verso l'equatore il numero delle oscillazioni diminuisce, e che se facciamo fare tanti pendoli, che facciano lo stesso numero di oscillazioni alle diverse latitudini, le lunghezze crescono dall'equatore verso il polo, e si ha, chiamando l la lunghezza del pendolo a latitudine di 45°, α un coefficiente costante, D la lunghezza del pendolo a latitudine γ, $D = l(1 - \alpha \cos 2\gamma)$, e quindi che, se g sia la gravità a latitudine di 45°, G il valore della gravità a latitudine γ, $G = g(1 - \alpha \cos 2\gamma)$.

Queste formole dimostrano che la terra è sensibilmente di forma ellissoidica composta e composta di strati ellissoidici e di densità crescente dalla superficie al centro, poichè in questa ipotesi si trovano col calcolo per D, e G le stesse formole.

A questo risultato concorda con quello dato dalla misura del grado, che si trovò più corto all'equatore che al polo.

Questa legge nel cangiamento della gravità da un luogo all'altro si verifica soltanto prendendo la media da tutte le osservazioni fatte sui diversi meridiani alla stessa latitudine; ciò avviene perchè la superficie terrestre non ha esattamente la forma di un ellissoide stante le tante sporgenze e montagne che in essa vi sono, è dunque impossibile di rappresentare con una stessa equazione di un ellissoide le diverse porzioni di superficie terrestre, che ci occorre di dover calcolare e rappresentare sulla Carta.

qualunque una qualunque porzione si possa considerare come una porzione di superficie
sferoidica, che apparterrebbe all'ellisoide osculatrice alla superficie terrestre in quel luogo.
Sia g la gravità di un luogo, ed l la lunghezza del pendolo che batte i secondi in quel luogo sarà
$1 = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$, donde $g = \pi^2 l$; se dunque due pendoli di lunghezze l, l' battono i secondi in due
luoghi, in cui le gravità sono g, g', sarà $g : g' :: l : l'$; od altrimenti se n è il numero delle
oscillazioni che un pendolo di lunghezza a fa in un giorno ossia in 86400'' in un luogo
dove la gravità è g, la durata di una oscillazione sarà $= \frac{86400''}{n}$, sarà $\frac{86400}{n} = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$,
donde $g = \frac{\pi^2}{(86400)^2} a n^2$, e se n' sia il numero di oscillazioni fatte in un giorno da un pendolo
di lunghezza a' in un luogo in cui la gravità è g', sarà $g : g' :: a n^2 : a' n'^2$, quindi concludiamo, che la gravità è proporzionale alla lunghezza del pendolo, ed al quadrato del numero di oscillazioni che esso pendolo fa in un dato tempo, ossia è in ragion composta della lunghezza del pendolo e del quadrato del numero di oscillazioni fatte in un dato tempo.

Dilungandoci dal centro terrestre, salendo per esempio con un pendolo sopra una montagna, troviamo, che n diminuisce, ciò accade perchè la gravità varia variando la distanza dal centro terrestre; ora n varia proporzionalmente alla radice dell'intensità della gravità, la gravità varia in ragione inversa dei quadrati delle distanze, dunque n varia in ragione inversa delle distanze; nel caso in cui si porti il pendolo su di una montagna, g varia non solo per ragione della maggior distanza dal centro, ma varia anche per l'attrazione della montagna, per questa cagione n cresce.

Ora a priori possiamo calcolare il decremento di n dovuto all'altezza; sottraendo da questo il decremento di n dato dall'osservazione avremo l'incremento di n dovuto all'attrazione della montagna, e quindi l'incremento di g dovuto all'attrazione stessa, ossia la forza acceleratrice proveniente dall'attrazione della montagna; ma le attrazioni di due masse sono proporzionali ad esse masse, potremo dunque in questo modo ottenere il rapporto tra la massa della montagna e la massa

della terra, e quindi la massa e la densità media della terra; infatti ~~quando~~ si conosce il volume della terra conoscendone la forma e le dimensioni, e quindi facilmente calcolare il volume, la densità, e quindi la massa della montagna. Fatti questi calcoli si trovò essere la densità media della terra circa 5 volte maggiore che quella dell'acqua, ora alla superficie della terra la densità di questa non eccede il doppio di quella dell'acqua, bisogna dunque conchiudere, che la densità cresce verso il centro della terra.

Lezione 25.ª

Coll'osservazione ed il calcolo trovaronsi le formole seguenti,

$$D = 0,^{m.}99\,3512\left[1 - 0,002588\cdot\cos 2\psi\right]$$

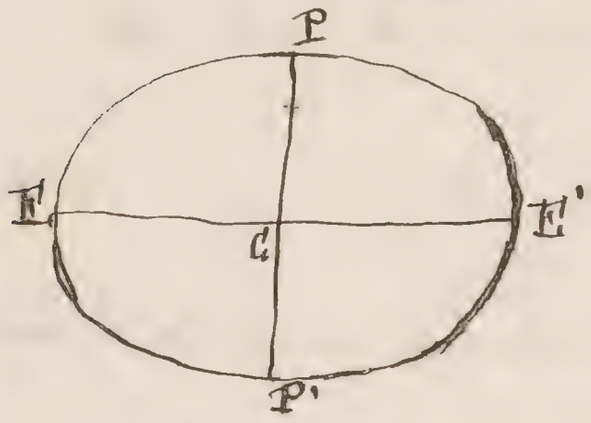
$$G = 9,^{m.}8055\,7\left[1 - 0,002588\cdot\cos 2\psi\right]$$

in cui D è la lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi, G la gravità, alla latitudine ψ.

In queste formole i coefficienti numerici $0,^{m.}99\,3512$, e $9,^{m.}8055\,7$ rappresentano i valori di D e G a latitudine media o di 45°.

In esse formole facendo $\psi = 90°$, e poi $\psi = 0°$, calcolando i due valori di D, di due valori di G corrispondenti, e sottraendo tra di loro i due primi, e tra di loro i due secondi si hanno i decrementi della lunghezza del pendolo, e della gravità dal polo all'equatore; facendo il calcolo si trova che la diminuzione totale della gravità dal polo all'equatore è di $\frac{1}{194}$, ora se la terra fosse sferica ed omogenea per la forza centrifuga la gravità diminuirebbe di $\frac{1}{289}$, dunque la terra non è sferica ed omogenea.

La teoria dell'attrazione degli ellissoidi ci permette colle formole della pagina antecedente di calcolare $\frac{CE-CP}{CP} = \frac{1}{287,7}$, essendo CE il raggio all'equatore, e CP il raggio al polo.



Colle misure dei gradi all'equatore ed al polo si è scoperto un valore dello stesso rapporto, il quale è più probabile, ed è $\frac{1}{289,1}$ di cui nelle operazioni pratiche possiamo tenere $\frac{1}{300}$ per il

Del detto rapporto. Conoscendo questo rapporto ed il raggio medio della terra = 6366197 possiamo calcolare la protuberanza equatoriale CE − CP, come pure CE, CP.

Torino è alla latitudine 45°, 4', 6", è quindi facile il calcolare la lunghezza del pendolo semplice, che batte i secondi, e della gravità in tale luogo; trovasi, fatto il calcolo,

$$\left.\begin{aligned} D &= 0^{m.},993506 \\ G &= 9^{m},80553 \end{aligned}\right\}$$

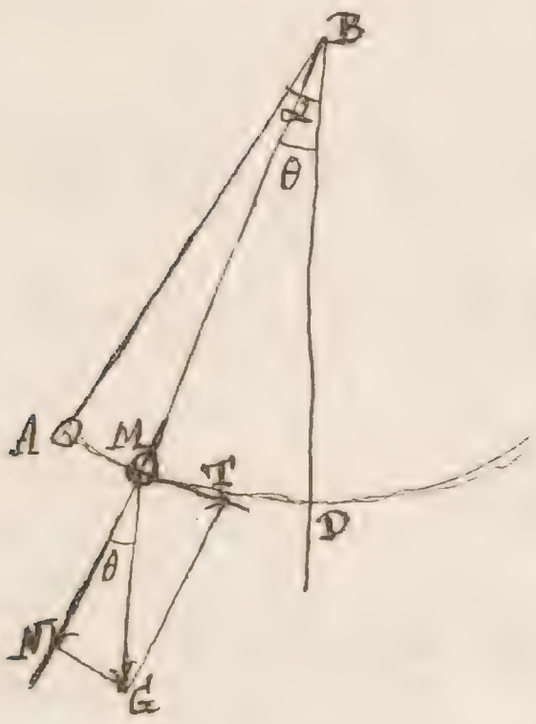
queste formole però suppongono Torino a livello del mare, ora Torino è $260^{m.}$ sopra il livello del mare, vediamo pertanto come farsi per tale rialzamento.

Sia g la gravità di un luogo ad altezza h sopra il livello del mare, G la gravità dello stesso luogo al livello del mare, r il raggio terrestre, per cagione del solo alzamento avrà $G : g :: (r+h)^2 : r^2$; Quindi ricavasi $G = g\,\frac{(r+h)^2}{r^2} = g\,\frac{r^2+2rh+h^2}{r^2} = g\left[1+\frac{2h}{r}\right]$ trascurando h^2 a fronte di r^2, e finalmente $g = \frac{G}{1+\frac{2h}{r}} = G\,\frac{1-\frac{2h}{r}}{1-\frac{4h^2}{r^2}} = G\left(1-\frac{2h}{r}\right)$.

L'attrazione della materia che si trova fra il livello del mare e l'altezza h fa anche variare l'intensità della gravità, ma questo cangiamento si può dire, che dipende soltanto dai punti situati sulla verticale ~~in luogo~~ del luogo; infatti se, condotto all'altezza h un piano orizzontale, lo spazio compreso sotto questo piano fosse tutto ripieno di materia, il Calcolo dimostra, che nel valore di g invece di $\frac{2h}{r}$ bisogna mettere $\frac{3}{4}\frac{h}{r}$, ossia che

$g = G\left(1 - \frac{2h}{r}\right) + G \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{r}$; e se il luogo supponiamo che sia sopra una collina sferica di diametro h tangente alla superficie terrestre, ed avente per diametro la verticale del luogo invece di $\frac{3}{4} G \frac{h}{r}$ bisognerebbe aggiungere $\frac{97}{100} G \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{r}$ si possiamo dunque tenersi alla formola $g = G\left(1 - \frac{8}{4} \cdot \frac{h}{r}\right)$.

Per Torino tenendo conto della sua altezza sopra il livello del mare trovasi $D = 0^{m.}99345$ } $g = 9^{m.}\,809000$ } . La formola $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$ che diede luogo a tante belle scoperte si può dedurre rapidamente senza ricorrere alle formole generali.



Una massa ~~A~~ puntata A di volume insensibile è attaccata ad un filo senza peso BA, il quale fisso per capo B fa angolo α con la verticale, abbandonando a se stessa la massa A, essa ed il filo si mettono ad oscillare intorno alla verticale BD; Dopo un certo tempo t la massa sarà venuta in M, avrà percorso lo spazio AM = s, ed il filo farà angolo θ con la verticale.

Essendo a la lunghezza del pendolo, abbiamo $s = a(\alpha - \theta)$, e se, essendo G la gravità, la scomponiamo in due componenti una normale, l'altra tangenziale, MN, MT, sarà $MT = G \operatorname{sen}\theta$, ma la forza tangenziale è la sola, che accelera il movimento, dunque $\frac{d^2 s}{dt^2} = -a\frac{d^2\theta}{dt^2} = G \operatorname{sen}\theta$.

Questa equazione si può integrare una volta, integrandola ~~a determinando la costante in modo~~ costante in modo, che per $\theta = \alpha$, si abbia la velocità $v = 0$, ossia $\frac{d\theta}{dt} = 0$, abbiamo $\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{a}{2G}}\sqrt{\frac{1}{\cos\theta - \cos\alpha}}$, equazione la quale non è più integrabile in termini finiti; ma integrandola per serie si giungeremo alle stesse formole della Lezione 23.ª

Vi ha un caso in cui le integrazioni si fanno facilmente. Infatti se α è piccolo, allora anche θ è piccolo, e sen θ si confonde con θ ed avremo $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{G}{a}\theta$, donde $\theta = A\cos t\sqrt{\frac{G}{a}} + B\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{G}{A}}$, equazione in cui A e B sono costanti arbitrarie. Determinando queste costanti in modo che per $\theta = \alpha$ sia $t = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, abbiamo $\theta = \alpha\cos t\sqrt{\frac{G}{a}}$, donde $t = \sqrt{\frac{a}{G}}\arccos\frac{\theta}{\alpha}$), facendo in questa formula $\theta = 0$ abbiamo la durata totale della discesa $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{G}}$, e la durata di una oscillazione intiera $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{G}}$.

Teniamo conto della resistenza del mezzo, entro cui si muove il pendolo. Facciamo perciò una ipotesi. Il pendolo oscilla in un mezzo la cui resistenza si può esprimere colla formula gR essendo R una funzione della velocità. Avremo in tal ipotesi $-a\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\theta - gR$, ossia $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{a}(R-\theta)$, poichè il mezzo resiste nella direzione del movimento, e qui consideriamo soltanto archi di piccolissima ampiezza, che si confondono colla loro corda.

Se u la velocità, avremo $u = -a\frac{d\theta}{dt}$, e la resistenza del mezzo sia espressa dalla formula gK^2u^2 in cui K è un coefficiente numerico, ipotesi che si verifica in natura, avremo $R = K^2a^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$, e $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{a}\left[a^2K^2\frac{d\theta^2}{dt^2} - \theta\right]$.

Questa equazione integrata una prima volta; integrando e determinando la costante arbitraria in modo, che quando $\theta = \alpha$, abbiasi $\frac{d\theta}{dt} = 0$, troviamo, facendo per brevità $2agK^2 = \mu$,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{a\mu^2}\left[\mu\theta + 1 - (\mu\alpha+1)e^{\mu(\theta-\alpha)}\right].$$

Questa equazione si può integrare per approssimazione; sviluppando $\frac{dt}{d\theta}$ in serie ordinata secondo le potenze di θ, e integrando fra $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ si avrà appunto per una serie ordinata secondo le potenze crescenti di α e di K, poichè i coefficienti dei diversi termini

della serie conterranno K, ora K dipende dalla densità del mezzo, dalla forma, e dalle dimensioni del pendolo, ed è molto piccolo, quindi la serie sarà convergentissima. Cercando il tempo della salita del pendolo si troverà pure una serie convergentissima per t, addizionando questi due valori di t si avrà la durata di una oscillazione intiera; la serie che ~~avrà~~ di questa durata contiene per primo termine $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, e per secondo termine un coefficiente moltiplicato per λ^4.

Questo risultato dimostra, che la resistenza del mezzo non altera sensibilmente la durata delle oscillazioni. Questa durata viene alterata dall'esistenza del mezzo, poichè per questa esistenza il peso del pendolo diventa minore, e per conseguenza cangia la gravità g ossia in altri termini la resistenza dell'aria diminuisce l'effetto della forza di gravità. Dunque il pendolo per questo motivo va più adagio nell'aria che nel vacuo.

Esprimendo Δ la densità del pendolo, P il suo peso nel vacuo, P - p il peso nell'aria, δ la densità dell'aria, g la gravità del pendolo nel vacuo, g' la gravità del pendolo nell'aria, abbiamo $p = \frac{P\delta}{\Delta}$, e quindi il peso del pendolo nell'aria $= P\left[1 - \frac{\delta}{\Delta}\right]$, ora le forze acceleratrici applicate in una stessa massa stanno come le forze motrici, dunque $g' = g\left[1 - \frac{\delta}{\Delta}\right]$. ora la durata delle oscillazioni cresce in ragione inversa della radice quadrata della gravità, dunque cresce nella ragione di $1 : \sqrt{1 - \frac{\delta}{\Delta}}$, ossia di $1 : 1 - \frac{1}{2}\frac{\delta}{\Delta}$, trascurando le potenze superiori alla 1ª di $\frac{\delta}{\Delta}$ per essere $\frac{\delta}{\Delta}$ molto piccolo; e viceversa passando dall'aria nel vacuo la durata cresce nella ragione di $1 : \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{\delta}{\Delta}}$, ossia nella ragione di $1 : 1 + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\Delta}$.

Se il pendolo è di forma sferica invece di $\frac{\delta}{\Delta}$ bisogna mettere $\frac{3}{2}\cdot\frac{\delta}{\Delta}$, cioè in tale ipotesi l'aumento della durata dell'oscillazione del pendolo nell'aria è nella ragione di $1 : 1 - \frac{3}{4}\frac{\delta}{\Delta}$, e quindi il numero delle oscillazioni nel vacuo ~~nell'aria~~ sta

al numero delle oscillazioni nell'aria :: 1 : [illegible], ossia per passare dall'aria al vacuo il numero delle oscillazioni fatte dal pendolo nell'aria va diviso per $1-\frac{3}{4}\cdot\frac{\delta}{\Delta}$, o moltiplicato per $1+\frac{3}{4}\cdot\frac{\delta}{\Delta}$.

Lezione 26.ª

Tutte le volte, che un punto materiale si muove sotto l'azione di una forza acceleratrice proporzionale alla distanza che resta a descrivere la durata del moto è indipendente dalla distanza iniziale del mobile.

Egli è perciò che le oscillazioni di un pendolo per archi cicloidali e per archi minimi di circolo sono tautocrone. Infatti la forza acceleratrice del movimento di un grave sopra una curva verticale è $T=g\frac{dx}{ds}$, ora (pag.ª 88) per la cicloide abbiamo $ds=adx$, dunque $T=\frac{gs}{a}$, dunque la forza acceleratrice è proporzionale ad s ossia allo spazio che resta a percorrere; per circolo (pag.ª 102) $T=g\operatorname{sen}\theta=$ [illegible] $=g\operatorname{sen}\frac{MD}{a}=g\operatorname{sen}\frac{s}{a}$, e per ~~archi~~ piccolissimi $T=\frac{gs}{a}$.

Il teorema enunciato è facile a dimostrarsi.

Infatti essendo T la forza acceleratrice del movimento, α la distanza iniziale del mobile, sia $T=h^2(\alpha-s)$, essendo h una costante, poichè $Tds=vdv$ (pag.ª 41) avremo $vdv=h^2(\alpha-s)ds$. Integrando trovasi $v^2=-h^2(\alpha-s)^2+\text{cost}$; se la velocità iniziale sia nulla, darà $v^2=-h^2(\alpha-s)^2+h^2\alpha^2=h^2(2\alpha s-s^2)$, ora $v=\frac{ds}{dt}$, dunque $\frac{ds}{dt}=h\sqrt{2\alpha s-s^2}$; quindi ricavasi $t=\frac{1}{h}\int\frac{ds}{\sqrt{2\alpha s-s^2}}$, e chiamando θ la durata del moto per l'arco α avrassi $\theta=\frac{1}{h}\int_0^{\alpha}\frac{ds}{\sqrt{2\alpha s-s^2}}=\frac{\pi}{2h}$. Da questo valore non entra a dunque

ec—

Movimento dei sistemi.

Se invece di un punto materiale si abbiano tanti punti tra loro invariabilmente connessi, e a tutti questi punti si applichino delle forze, ~~essi non si muoverebbero~~ fuori le leggi finora stabilite, per riconoscere le leggi del moto di un punto soggetto ad una forza qualunque non serviranno più a determinare il moto di questi punti, poichè essi generalmente non prenderanno a muoversi come si muoverebbero se fossero liberi.

Prima di risolvere il problema generale: Determinare il moto di un sistema di punti comunque connessi, e sollecitati da un sistema qualunque di forze facciamo alcune ovvie osservazioni sopra casi particolari.

Sieno due masse M, M' connesse con una verga rigida AB, e sieno spinte ciascuna masse sotto l'azione di una forza motrice

permanente, che chiamo F per la 1ª massa M, F' per la 2ª, si domanda il moto comune del sistema.

Se le masse non fossero unite, la massa M sollecitata dalla forza acceleratrice $\frac{F}{M}$, nel tempetto dt acquisterebbe la velocità $\frac{F}{M}dt$, così la massa M' acquisterebbe nel tempo dt la velocità $\frac{F'}{M'}dt$. Supponiamo note le velocità, che realmente acquistano le masse M, M', chiamiamole du, du', è evidente, che se togliendo il filo togliendo la verga AB vorremo, che le masse continuino a muoversi acquistando nei tempi dt le velocità du, du', bisognerà, che alle forze F, F' ne sostituiamo due altre f, f' capaci di produrre nel tempo dt le velocità du, du; ma le forze motrici capaci di produrre gli stessi

velocità sono $f = M\frac{du}{dt}$, $f' = M'\frac{du'}{dt}$.

f, f' le chiamiamo le forze attuali, F, F' le forze imprese; Da ciò che abbiam detto ripetta, che le alle masse M, M' attacco le forze imprese, le masse si muovono acquistando nel tempo dt le velocità du, du', e tendendo ~~il~~ la verga, e che le attacco le forze attuali, le masse si muovono nello stesso modo senza tendere la verga, anche in questo caso se tolgo la verga le masse continuano a muoversi nello stesso modo, ora le attaccando le forze impresse alle masse legate ed alle masse disgiunte esse non prendono nei due casi gli stessi movimenti ciò non può avvenire che dalla resistenza della verga, la quale distrugge una parte delle forze imprese — la qual forza distrutta tende per conseguenza la verga - Dunque tanto fa applicare le forze imprese, che le forze attuali le quali nel 1° caso i vincoli del sistema sono tesi, nel secondo non sono tesi.

Questo principio che abbiam dimostrato pel caso delle due masse unite con una verga AB è evidentemente vero per un sistema qualunque di punti, e si può enunciare così: In qualunque sistema di punti, qualunque sia la forma, la disposizione del sistema, e la natura dei vincoli, che lo tengono unito — Le forze attuali fanno equilibrio alle forze imprese rivolte in senso contrario per mezzo delle resistenze dei vincoli.

Questo principio è introdotto nella Meccanica da D' Alembert.

Come già abbiam detto se la massa M non si muove nella direzione MF, ciò proviene dalla tensione del vincolo, ora la tensione proviene dalla comunicazione di moto, che si fa tra una massa e l'altra per mezzo del vincolo, per la quale una massa vien ritardata nel suo movimento, e l'altra accelerata.
Se togliendo i vincoli, sostituiamo ad essi delle forze equivalenti alla resistenza, che quelli opponevano, il sistema si muoverà, come se i vincoli non fossero tolti, ciò dimostra, che le forze

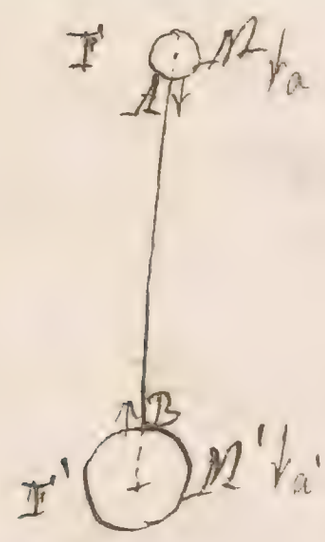
attuali equivalgono, ossia sono le risultanti delle forze impresse, e delle tensioni di vincolo, rivolte in senso contrario le quali sono direttamente opposte alle resistenze di questi. Le tensioni di vincolo sono prodotte da una parte delle forze impresse, questa parte delle forze impresse impiegata a tendere i vincoli, e che influisce pertanto sul movimento del sistema, si chiama la forza perduta; quindi diremo, che le forze attuali sono le risultanti delle forze impresse, e delle forze perdute, rivolte in senso contrario e che per conseguenza

La forza perduta è la risultante della forza ~~[illegible]~~ impressa e della forza ~~[illegible]~~ attuale rivolta in senso contrario.

Questo nuovo enunciato del Teorema di D'Alembert ci permette di scoprire la tensione di vincolo, mentre il primo ci rivela, applicandolo a dovere, le leggi del movimento del sistema.

Lezione 27.ª

Problema 1.° ~~[illegible]~~ Supponiamo sollecitate le due masse della Lezione antecedente da due forze verticali, già che tieno pesanti, e che la verga sia verticale, e nella direzione della linea, che unisce i centri di gravità delle masse. Determiniamo il movimento delle masse e la tensione della verga AB.



Sieno F. F' le forze motrici, che sollecitano le due masse, la forza acceleratrice impressa alla 1ª massa sarà $\varphi = \frac{F}{M}$, e la forza acceleratrice impressa alla 2ª massa sarà $\varphi' = \frac{F'}{M'}$;

ora AB essendo inestensibile, tutti i punti delle due masse descrivono linee parallele e verticali, ossia le due masse si muovono come una massa unica, e dunque Φ sia la forza totale acceleratrice del sistema, sarà $\Phi = \frac{F+F'}{M+M'}$,

ma $\frac{F+F'}{M+M'}$ è quantità costante, il moto è dunque uniformemente accelerato, e se u sia la velocità dopo il tempo t, c la velocità iniziale, s lo spazio verticale percorso avremo

$$u = c + \phi t, \quad s = ct + \frac{1}{2}\phi t^2.$$

Al principio del moto supponiamo siasi dato un'impulso alla massa M tale da farle conci-
-pire la velocità a, ed un'impulso alla massa M' tale da farle concepire la velocità a', la velocità iniziale c comune a tutto il sistema sarà così determinata. Infatti la quantità di moto iniziale di tutto il sistema è eguale alla somma delle quantità di moto delle masse M, M'. $c(M+M') = aM + a'M'$; da questa equazione ricavasi $c = \frac{aM+a'M'}{M+M'}$.

Finalmente per determinare la tensione T della verga sia nel 1° istante, che alla fine di un tempo t osserviamo, che, poichè nella caduta M' è costretta di ritardarsi, ed M è costretta di accelerarsi, la verga si tende, che quindi la tensione T è una forza, che agisce sulle masse in sensi contrarii. Ciò posto se applichiamo alle due masse due forze rivolte in sensi opposti ed eguali, come si vede nella figura potremo togliere la verga, e le masse continueranno a muoversi come prima colle quantità di moto ϕM, $\phi M'$, ma le loro quantità di moto in questo caso sono anche $F+T$, $F'-T$, dunque $\begin{cases} F+T = \phi M \\ F'-T = \phi M' \end{cases}$, quindi ricavasi $T = \frac{MF'-M'F}{M+M'}$, e se ancora non conoscessimo ϕ potremmo anche ricavarlo da queste equazioni.

All'istante del principio del movimento sia la tensione della verga X, avremo per determinare X le equazioni $\left.\begin{aligned} M'a' - X &= M'c \\ Ma + X &= Mc \end{aligned}\right\}$ dalle quali ricavasi $X = MM'\frac{a'-a}{M+M'}$, e C la quale non l'avessimo già trovata.

X essendo una quantità di moto finita, che il sistema acquista in un tempo infinitesimo propriamente non è una tensione, ma un'urto.

Risolviamo lo stesso problema applicando il teorema di D'Alembert sotto diverse circo-
-stanze.

1°. Le forze attuali e le forze impresse rivolte in senso contrario si fanno equilibrio.

Le forze motrici impresse sono F, F'. Le forze attuali motrici sono quelle, che sono capaci di produrre in un tempo dt nelle due masse la stessa velocità du, esse sono dunque espresse da $M\frac{du}{dt}$, $M'\frac{du}{dt}$.

(ciò posto abbiamo $M\frac{du}{dt}(M+M') = F+F'$, donde $\frac{du}{dt} = \frac{F+F'}{M+M'}$, ma $\frac{du}{dt} = \phi$, dunque $\phi = \frac{F+F'}{M+M'}$.

2°. La tensione di vincolo o forza perduta è eguale alla risultante delle forza impressa e della forza attuale rivolta in senso contrario.

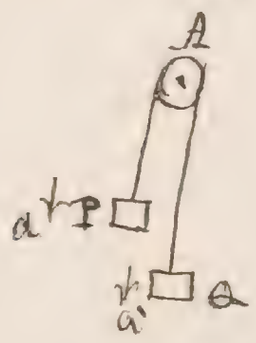
Dunque $T = F - M\frac{du}{dt} = F - M\frac{F+F'}{M+M'} = \frac{MF - MF'}{M+M'} = -\frac{MF' - MF}{M+M'}$;

qui T è negativa, poichè, essendo eguale alla tensione prodotta dalla massa M, la quale per se andrebbe più adagio, è diretta all'insù.

3°. La forza impressa e la forza attuale rivolta in senso contrario fanno equilibrio, anche le forze perdute disfaranno equilibrio.

Ora la forza perduta dalla massa M è $F - M\frac{du}{dt}$, la forza perduta dalla massa M' è $F' - M'\frac{du}{dt}$, dunque $F - M\frac{du}{dt} + F' - M'\frac{du}{dt} = 0$, donde ricaviamo ancora $\frac{du}{dt} = \phi = \frac{F+F'}{M+M'}$.

Prob. 2°. Applicando gli stessi teoremi al caso di due pesi P, Q attaccati a un filo non pesante,



il quale scorre sopra una girella senza soffrire alcun attrito, troviamo che $\phi = g\frac{P-Q}{P+Q}$, $T = \frac{2PQ}{P+Q}$,

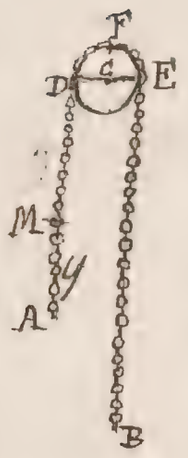
$c = \frac{Pa - Qa'}{P+Q}$, $X = \frac{1}{g}\cdot\frac{PQ}{P+Q}(a+a')$, e quindi

$$u = c + gt\,\frac{P-Q}{P+Q}, \quad s = ct + \tfrac{1}{2}gt^2\,\frac{P-Q}{P+Q}.$$

Queste formole si applicano immediatamente alla macchina d'Atwood, la quale consiste essenzialmente in una girella resa mobilissima con un meccanismo, che ora non spiegheremo, sulla quale è cavalcato un filo, ai cui capi sono attaccati due pesi.

Lezione 26ª.

Problema 3°.



Supponiamo, che invece di un filo sottilissimo con due pesi alle estremità si avvolga alla girella G una catenella pesante, di lunghezza $AB = l$, il cui peso totale $= \Pi$.

Supponiamo che G sia la velocità iniziale della catena e che essa discenda dalla parte di B, ascenda dalla parte di A, il moto di questa sarà più che equabilmente accelerato, poichè ad ogni istante la forza acceleratrice cresce.

Supponiamo che la velocità impressa a tenda a far discendere il punto A, evidentemente questo discenderà con moto più che equabilmente ritardato. Sino a che le due parti di catena FA, FB sieno eguali, dopo questo tempo il moto diviene più che equabilmente accelerato.

Esaminiamo di che natura sarà questo moto.

Sia $FDA = x$, sarà $FEB = l - x$, e chiamando P, Q i pesi di questi due tratti di catena, sarà $P = \Pi \frac{x}{l}$, $Q = \Pi \frac{l-x}{l}$. Per un istante dt infinitesimo questi pesi non variano, siamo dunque per tempo dt nel problema precedente, ed avremo la forza acceleratrice $\varphi = g \frac{P-Q}{P+Q} = g \frac{2x-l}{l}$. Ad ogni istante vi ha una quantità di moto proporzionale al quadrato della velocità che operava da una parte e viene adoperare dall'altra, ma la somma totale delle quantità di moto non variando, noi nel valore di φ trascuriamo questo termine, che dovrebbe aggiungersi al numeratore.

Ciò posto, poichè $\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$, abbiamo $\frac{d^2x}{dt^2} = g \frac{2x-l}{l}$.

A questa equazione debitamente integrata si fornisce x e la velocità $u = \frac{dx}{dt}$ ambi in funzione del tempo t.

Per integrare facciamo $2x - l = z$, l'equazione diventerà $2 \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{2g}{l} z$; questa equazione essendo lineare di integra; le z è positivo, abbiamo per l'equazione integrale

$z = Ae^{t\sqrt{\frac{2g}{l}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{2g}{l}}}$; se z è negativo abbiamo

$z = A\cos t\sqrt{\frac{2g}{l}} + B\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{2g}{l}}$.

La 2ª espressione serve finchè il tratto FDA < FEB, quando FDA > FEB bisogna prendere la 1ª

Differenziando queste equazioni, e dividendo ambi i membri per z abbiamo

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = -A\sqrt{\frac{2g}{l}}\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{2g}{l}} + B\sqrt{\frac{2g}{l}}\cos t\sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{dx}{dt} = u$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = A\sqrt{\frac{2g}{l}}\, e^{t\sqrt{\frac{2g}{l}}} - B\sqrt{\frac{2g}{l}}\, e^{-t\sqrt{\frac{2g}{l}}} = \frac{dx}{dt} = u,$$

Dunque $$u = B\sqrt{\frac{2g}{l}}\cos t\sqrt{\frac{2g}{l}} - A\sqrt{\frac{2g}{l}}\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

$$u = A\sqrt{\frac{2g}{l}}\, e^{t\sqrt{\frac{2g}{l}}} - B\sqrt{\frac{2g}{l}}\, e^{-t\sqrt{\frac{2g}{l}}} .$$

Data la velocità iniziale, e la lunghezza della pena FDA al principio del moto è facile il determinare le costanti arbitrarie A, B.

Resta a determinarsi la tensione. Questa varia da un punto all'altro, e da un punto all'altro della catena, e pertanto diciamo T la tensione dopo il tempo t della Catena nel punto M tale, che MA = y, T sarà funzione di t e di y.

Per determinar T ricorriamo al principio di D'alembert.

Le forze perdute si fanno equilibrio.

La velocità impressa ~~[illegible]~~ nel tempo dt è $g\,dt$, la velocità attuale acquistata nello stesso tempo è du, dunque la velocità perduta in questo tempo è $g\,dt - du$; Dividendo questa velocità per dt abbiamo la forza acceleratrice perduta $= g - \frac{du}{dt}$, e moltiplicandola per la massa $\frac{\pi y}{gl}$ della porzione MA, sarà $\left(g - \frac{du}{dt}\right)\frac{\pi y}{gl}$ la forza motrice perduta dal tratto MA di catena.

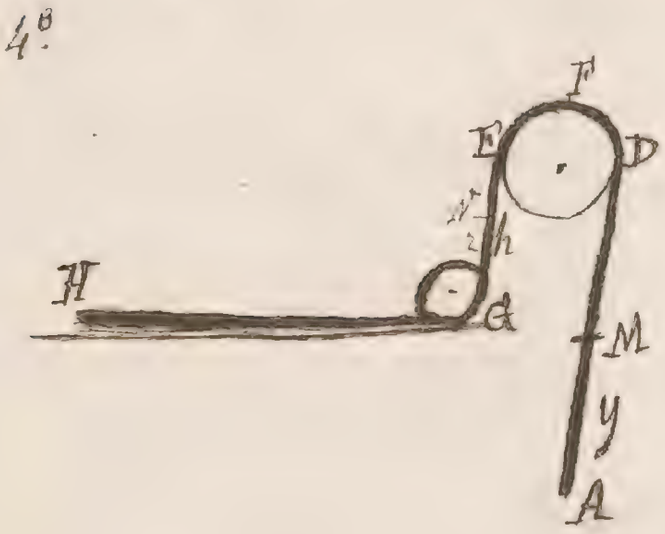
Ora la forza motrice perduta dal tratto MFB è eguale alla tensione T della catena in M,

Dunque $T = \left(g - \frac{du}{dt}\right)\frac{\pi}{g}\cdot\frac{y}{l}$, ma $\frac{du}{dt} = g\cdot\frac{2x-l}{l}$, dunque

$$T = \frac{\pi y}{l}\left[1 - \frac{2x-l}{l}\right] = 2\pi y\ \frac{l-x}{l^2},$$ in questo valore sostituendo ad x la

funzione di t che abbiamo trovata, avremo T in funzione di t e di y.

Problema 4°.



Una fune distesa orizzontalmente sopra un piano orizzontale HG passa sulle puleggie G, F tali, che il tratto di fune EG tra esse compreso è verticale, al tratto DA che pende verticalmente dall'altra parte della puleggia F. Si dà un impulso tale da far correre a tutta la fune una velocità a. Si domanda quale sarà il moto della fune, essendo data l'intera sua lunghezza $= l$, il peso totale $= \pi$, e la distanza delle due puleggie ossia la lunghezza del tratto $FEG = h$.

Sia $FDA = x$, sarà $GH = l - h - x$, il peso di $FDA = \frac{\pi x}{l}$, il peso di $FEG = \frac{\pi h}{l}$, eguindi la forza motrice impressa sarà $= \frac{\pi}{l}(x-h)$, ma la massa totale messa in movimento da questa forza è $\frac{\pi}{g}$, dunque la forza acceleratrice impressa è $= g\,\frac{x-h}{l}$.

La forza impressa e la forza attuale rivolta in senso contrario si fanno equilibrio.

Dunque, poiche $\frac{d^2x}{dt^2}$ è la forza attuale acceleratrice, $\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{x-h}{l}$.

Da questa equazione integrando abbiamo —

$$\left.\begin{aligned} x - h &= Ae^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \\ u &= A\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - B\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{aligned}\right\}, \text{se } x > h, \quad \left\{\begin{aligned} x - h &= A\cos t\sqrt{\tfrac{g}{l}} + B\operatorname{sen} t\sqrt{\tfrac{g}{l}} \\ u &= B\sqrt{\tfrac{g}{l}}\cos t\sqrt{\tfrac{g}{l}} - A\sqrt{\tfrac{g}{l}}\operatorname{sen} t\sqrt{\tfrac{g}{l}} \end{aligned}\right. \text{se } x < h,$$

Per determinare la tensione T di un punto M della fune tale che MA=y,

abbiamo ancora l'espressione $T=\frac{\pi y}{gl}\left(g-\frac{du}{dt}\right)$, donde, poichè $\frac{du}{dt}=g\frac{x-h}{l}$,

$T=\frac{\pi y}{l}\left(1-\frac{x-h}{l}\right)=\pi y\,\frac{l+h-x}{l^2}$.

Questa formola serve per i punti del tratto FDA, ma non per gli altri punti della fune.

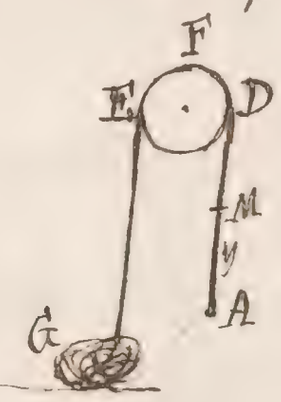
Infatti sia T la tensione di un punto N del tratto FEG tale, che NG=z,

abbiamo $T=\frac{\pi z}{l+g}\left(g+\frac{du}{dt}\right)=\pi z\,\frac{l+x-h}{l^2}$; e se sia NEA=y

come antecedentemente, sarà $T=\pi(x+h-y)\,\frac{l+x-h}{l^2}$.

La tensione dei punti del tratto HG è indipendente dalla loro distanza da G, ed è $T=\pi(x-h)\,\frac{l+h-x}{l^2}$.

Problema 5°. Supponiamo che la fune invece di essere distesa sul piano orizzontale



in modo da mettersi in moto tutta insieme al principio del moto sia ammucchiata sul piano in G le formole antecedenti non servirano più alla determinazione del moto della fune, poichè la fune ammucchiata in G è in riposo, e se ne svolge a ciascun istante una porzione, il qual svolgimento fa sì, che la massa della fune in moto varia ad ogni istante.

La lunghezza di fune, che si svolge in un istante dt è = u dt, u essendo la velocità della fune in quell'istante, questa lunghezza svolgendosi acquista la velocità u, che gli è trasmessa dalla parte di fune GEFDA, ora la massa di una tal lunghezza è $=\frac{\pi u\,dt}{lg}$, dunque $\frac{\pi u^2 dt}{lg}$. u è

la quantità di moto perduta dalla fune GFA a causa dell'aggiunta della lunghezza u dt, dividendola per dt abbiamo la forza motrice $\frac{\pi u^2}{gl}$ che nel tempo dt produrrebbe la quantità di moto, indipendentemente da questo sviluppo di fune i tratti FA, FG di fune perdono in sensi contrarii le forze motrici $\frac{\pi x}{gl}\left(g-\frac{du}{dt}\right)$, $\frac{\pi h}{gl}\left(g+\frac{du}{dt}\right)$; le forze perdute si fanno equilibrio, dunque

$$\frac{\pi x}{gl}\left(g-\frac{du}{dt}\right)=\frac{\pi h}{gl}\left(g+\frac{du}{dt}\right)+\frac{\pi u^2}{gl}\text{, ossia}$$

$$x\left(g-\frac{du}{dt}\right)=h\left(g+\frac{du}{dt}\right)+u^2 \qquad \text{e poichè } u=\frac{dx}{dt}$$

$$x\left(g-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=h\left(g+\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{dx^2}{dt^2}\text{, e riducendo}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(x+h)+\frac{dx^2}{dt^2}+g(h-x)=0\,.$$

Integrando una volta questa equazione troviamo

$$3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=3u^2=\frac{A^3}{(x+h)^2}+2g(x-2h)\text{, in cui A è una costante arbitraria, la quale si}$$

determina quando si conosca la velocità iniziale della fune, ed il valore iniziale di x.

La tensione T della fune nel punto M, tale, che MA=y, è quale alla forza perduta dal tratto MA, ora questa è $=\frac{\pi y}{gl}\left(g-\frac{du}{dt}\right)=\frac{\pi y}{gl}\left(g-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{\pi y}{gl}\left\{g+\frac{u^2+g(h-x)}{x+h}\right\}=\frac{\pi y}{gl}\cdot\frac{u^2+2gh}{x+h}$,

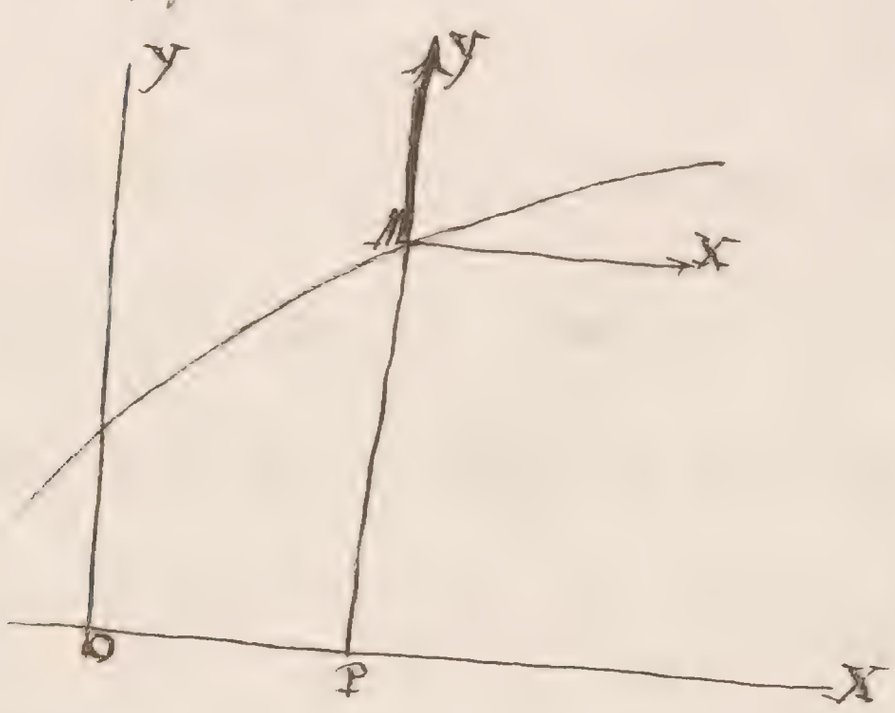
dunque $T=\frac{\pi y}{gl}\cdot\frac{\frac{A^3}{3(x+h)^2}+\frac{2}{3}g(x+h)}{x+h}=\frac{\pi y}{3gl}\left[2g+\frac{A^3}{(x+h)^3}\right]$.

Similmente la tensione T' di un punto N del tratto di fune FG è eguale alla forza perduta dal tratto NG, ora, se NG=z, la forza perduta è $=\frac{\pi z}{gl}\left[g+\frac{du}{dt}\right]=\frac{\pi z}{gl}\left[\frac{u^2+2gx}{x+h}\right]$, dunque

$$T' = \frac{\pi^2}{gl} \cdot \frac{\frac{A^3}{3(x+h)^2} + \frac{2}{3}g(x-2h) + 2gx}{x+h} = \frac{\pi^2}{3gl}\left[\frac{A^3 + 4g(x+h)^2(2x-h)}{(x+h)^3}\right].$$

Problema 6°.

Abbiam già trovate altra volta le condizioni d'equilibrio di un punto materiale costretto a stare sopra una curva data, vediamo come partendo dal principio di D'alembert vi si possa arrivare.



Sieno X, Y le forze acceleratrici imposte al punto M parallelamente agli assi OX, OY; $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ sono le velocità attuali parallele agli assi, $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ sono gli incrementi di queste velocità, e $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ sono le forze acceleratrici attuali,

Dunque le forze perdute parallelamente agli assi sono $X - \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2y}{dt^2}$; ora le forze perdute d'ajuno equilibrio mediante la resistenza, che la curva oppone normalmente a se stessa, e questa condizione è soddisfatta sempreché la loro risultante è diretta secondo la normale in senso contrario alla resistenza della curva, ossia sempreché queste forze perdute sono proporzionali ai coseni degli angoli della normale cogli assi; ma gli angoli che questa direzione fa cogli assi hanno per coseni $\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dx}{ds}$, dunque $\frac{X - \frac{d^2x}{dt^2}}{Y - \frac{d^2y}{dt^2}} = -\frac{dy}{dx}$.

Da questa equazione ricaviamo $X\,dx + Y\,dy = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = v\,dv$, che è l'equazione delle forze vive.

Volendo avere il valore della pressione K del mobile sulla curva, scriviamo, che questa è eguale e contraria alla resistenza della curva, epperciò eguale alla somma delle componenti normali delle forze perdute, avremo così

$$K = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dy}{ds} - \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dx}{ds} = \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds} - \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds\,dt^2}$$, ora $dt = \frac{ds}{v}$,

dunque $K = \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds} - \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^3}v^2 = \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds} \pm \frac{v^2}{r}$, essendo r il raggio di curvatura.

Lezione 29.ª

Problema 7.°

Due masse sciolte M, M' si attraggono vicendevolmente con forza motrice R.

Le due masse sono sferiche, al principio del moto ~~i~~ sono alle distanze a, b dal punto fisso O preso sulla linea dei loro centri, si imprimono in questo istante ad esse le velocità c, c' nella direzione della linea dei centri OX, si chiede di determinare il moto delle due masse.

Chiamiamo x, x' le distanze delle masse dal punto O, u, u' le loro velocità attuali, le quali sono evidentemente dirette secondo OX da O verso X, saranno $\frac{du}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$ le forze acceleratrici attuali, e $M\frac{du}{dt}$, $M'\frac{du'}{dt}$ le forze motrici attuali, ma le forze impresse sono R per la massa M, -R per la massa M', dunque le forze perdute da queste masse sono $R - M\frac{du}{dt}$, $-R - M'\frac{du'}{dt}$. Se queste forze si fanno equilibrio, ora le masse essendo sciolte, dette forze non possono farsi equilibrio, senzache ciascuna si facia equilibrio da se, dunque $R - M\frac{du}{dt} = 0$, $R + M'\frac{du'}{dt} = 0$. Queste sono le equazioni del moto delle due masse; sottraendo la 1ª dalla 2ª equazione troviamo $M du + M' du' = 0$, la qual equazione integrata diventa $Mu + M'u' = K$, K essendo una costante arbitraria, la quale nel nostro caso è $= Mc + M'c'$; ora chiamando v la velocità del centro comune di gravità del sistema, abbiamo $v(M+M') = Mu + M'u'$, dunque

$$v = \frac{Mc + M'c'}{M + M'}$$

, ma questa è la velocità che il centro prende quando ~~si danno alle masse~~ loro soltanto sollecitate dagli impulsi c, c', dunque il moto del centro comune di gravità di due masse che si attraggono vicendevolmente non è alterato dall'attrazione delle masse.

Moltiplicando la 2ª delle equazioni generali del movimento del nostro sistema per u', la 2ª per u, e sottraendo questa dalla 2ª, troviamo

$$R(u'-u) = -\frac{M u\,du + M' u'\,du'}{dt}, \text{ ma } u = \frac{dx}{dt},\ u' = \frac{dx'}{dt}, \text{ dunque}$$

$$R(dx'-dx) = -(M u\,du + M' u'\,du');$$ orade chiamiamo r la distanza delle due masse, avremo $x'-x=r$, e $dx'-dx=dr$, dunque

$$-R\,dr = M u\,du + M' u'\,du'.$$

In questa equazione $R\,dr$ è la quantità d'azione sviluppata dalla forza R nel tempo dt, $M u\,du$, $M' u'\,du'$ sono gli incrementi di forza viva delle due masse M, M', dunque tal equazione non è altro che l'equazione della conservazione delle forze vive.

Integrandola abbiamo $M u^2 + M' u'^2 = h - 2\int R\,dr$; h è una costante arbitraria, che, volendo che $\int R\,dr$ svanisca quando $u=c$, $u'=c'$, sarà $h = M c^2 + M' c'^2$.

Poichè $dx = u\,dt$, $dx' = u'\,dt$, e $dx'-dx = dr$, abbiamo ancora quest'altra equazione $dr = dt(u'-u)$, donde $dt = \frac{dr}{u'-u}$; come pure, poichè $Mu + M'u' = K$, avremo $M\,dx + M'\,dx' = K\,dt$, donde integrando fra a, b, x, x',

$$Mx + M'x' = Ma + M'b + Kt.$$

Le ~~quattro~~ cinque equazioni seguenti risolvono completamente il problema.

$$\begin{cases} M u^2 + M' u'^2 = h - 2\int R\,dr \\ Mu + M'u' = K \\ dr = (u'-u)\,dt \\ Mx + M'x' = Ma + M'b + Kt \\ x'-x = r \end{cases}$$

Infatti le due prime ci danno u, u' espressi per r quando R sia data in funzione di r; i quali valori sostituiti nella 3ª ci danno r in funzione di t; ~~e quindi $dt = dt'$~~ diventa r in funzion di t, sostituendola nelle due prime equazioni

abbiamo u, u' in funzion di t, sostituendola nelle due altime abbiamo x, x' in funzione di t.

Se le masse invece d'attrarsi si respingono vicendevolmente basta cangiare nelle equazioni trov

$P_{in} - P_r$ per avere le equazioni relative a questo caso.

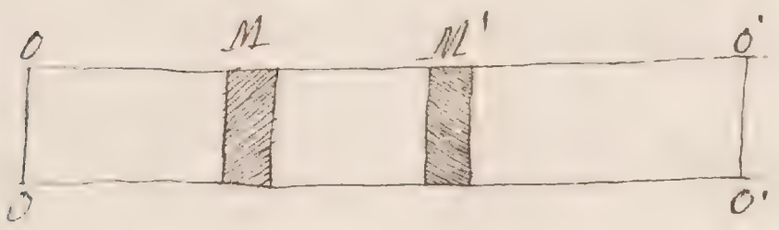
abbiamo un'esempio del movimento, che ora abbiamo studiato in una canna cilindrica, entro

cui ~~sono~~ sono due masse cilindriche, che chiudono esattamente il cilindro, e che nonpertanto pos

muoversi liberamente in esso, e Tra le due masse vi ha un gaz molto compresso.

Sappiamo il gaz compresso tendendo a dilatarsi, l'espansione di questo gaz farà una forza repulsiva

che agirà sulle due masse egualmente in sensi contrari



L'elasticità del gaz a temperatura costante è proporzio-

-nale alla densità. Sia δ la densità dell'aria esterna, Δ

la densità iniziale del gaz, f la distanza iniziale delle due masse; Dopo un tempo t questa

distanza sarà r, e la densità del gaz sarà diminuita in ragione inversa di questa distanza;

se dunque sia q questa densità, avremo $q = \Delta \frac{f}{r}$.

Ciò posto se h sia un coefficiente costante a temperatura costante, la pressione del gaz sulle

masse sarà $= h \Delta \frac{f}{r}$, e la pressione dell'aria esterna sulle stesse masse sarà $= h\delta$,

la pressione totale è dunque $R = h\left[\Delta \frac{f}{r} - \delta\right]$.

In questo caso $\int R\,dr$ si può eseguire, ed hassi $2\int R\,dr = 2h\Delta f \log r - 2h\delta r + \text{Cost.} = \frac{1}{2}(Mu^2 + M'u'^2)$

Supponiamo che la lunghezza della canna sia finita, sia $OO' = l$, che le distanze iniziali

delle masse dal punto O sieno a, b, e sia dopo il tempo t, $OM = x$, $OM' = x'$, ~~dopo il tempo~~ e le velocità

delle masse u, u', avremo per determinare u, u', x, x' le equazioni seguenti

$$M u^2 + M' u'^2 = 2h\left[-\delta r + \Delta f \log r - w\right], \quad w = -\delta(b-a) + \Delta f \log(b-a)$$

$$M u + M' u' = 0 \quad , \quad dr = (u' - u)\,dt \quad , \quad Mx + M'x' = Ma + Mb \quad , \quad x' - x = r ;$$

$$\text{Donde} \begin{cases} u^2 = \dfrac{2M'h}{M(M+M')}\left[-\delta r + \Delta f \log r - w\right] \\ u'^2 = \dfrac{2Mh}{M'(M+M')}\left[-\delta r + \Delta f \log r - w\right] , \end{cases}$$

~~In questa~~ ora dalle due ultime equazioni abbiamo $r = \dfrac{K - x(M+M')}{M'}$, in cui $K = Ma + Mb$,

$r = \dfrac{x'(M+M') - K}{M}$; sostituendo il 1° valore di r nella 1ª equazione avrà

nel valore di u^2, ed il 2° nel valore di u'^2, ~~e metten avremo~~ le formole

necessarie per ottenere la velocità delle masse M, M' in qualunque luogo esse

sieno. Se la canna è aperta in O, ed in O' per sapere con che velocità le

masse usciranno dalla canna basterà, che nella 1ª formola facciamo $x = 0$,

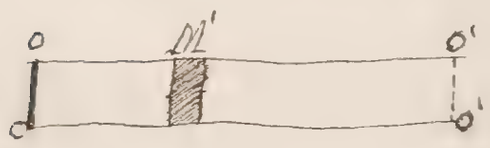
nella 2ª $x' = l$, ora quando $x = 0$, $r = \dfrac{K}{M'}$, quando $x' = l$, $r = \dfrac{l(M+M') - K}{M}$,

dunque se v, v' sieno le velocità delle masse quando escono dalla canna,

$$\text{sarà} \begin{cases} v^2 = \dfrac{2M'h}{M(M+M')}\left[-\dfrac{\delta K}{M'} + \Delta f \log \dfrac{K}{M'} - w\right] \\ v'^2 = \dfrac{2Mh}{M'(M+M')}\left[-\dfrac{\delta}{M}\left[l(M+M') - K\right] + \Delta f \log\left[\dfrac{l(M+M') - K}{M}\right] - w\right] . \end{cases}$$

Supponiamo adesso la canna aperta da una parte, e chiusa dall'altra, e che dentro

vi sia una sola massa M', e tra la parte chiusa OO della canna e la massa M' vi sarà



del gaz compresso il problema rientra nel precedente,

e non che le masse adesso saranno M = alla massa della

canna $\&$ M' massa $\&$ quella contenuta dentro.

Potremo poscia trovare con che velocità uscirà la palla mediante l'ultima formola del problema precedente; questa velocità è funzione della lunghezza della canna, si può quindi determinare questa in modo, che la velocità nell'uscita sia la massima. Differenziando v' rispetto ad l, eguagliando il coefficiente differenziale a zero, e ricavando l, troviamo per l corrispondente al valore massimo di v', $l = \frac{\delta K + M\Delta f}{\delta(M+M')}$, ora nel nostro caso $a=0$, $K=M'b$, $b=f$, dunque

$$l = \frac{M'b\delta^2 + M\Delta b}{\delta(M+M')}.$$ Questa è la teoria delle armi da fuoco. —

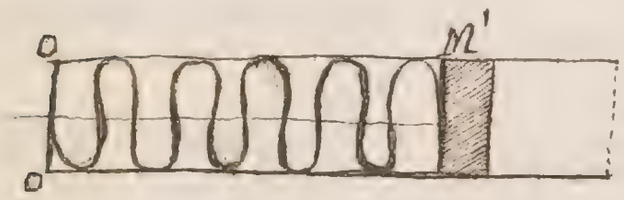
Se prendiamo la canna più lunga di quest'ultimo valore di l, la palla non esce, ma si ferma nella canna fermandosi dopo un certo tempo per cagione dell'attrito.

Sostituendo in v'^2 il valore di l $\frac{M'b\delta + M\Delta b}{\delta(M+M')}$ troviamo

$$v'^2 = \frac{2Mh}{M'(M+M')}\left[b\delta - b\Delta + \Delta b \log\frac{\Delta}{\delta}\right],$$ sostituendo il valore di v', che si ha da questa equazione, che è la velocità massima della palla nella canna, nella equazione $Mv + M'v' = 0$, avremo

$$v^2 = \frac{2M'h}{M(M+M')}\left[b\delta - b\Delta + b\Delta \log\frac{\Delta}{\delta}\right],$$ donde ricavasi v ossia la velocità con cui la canna si muove in senso contrario alla palla, quando questa esce dal

Supponiamo che nella canna invece del gaz vi sia una molla spirale, che tenda a svolgersi.



Sia f la lunghezza naturale della molla, r la sua lunghezza dopo un tempo t, la forza con cui essa tende a svolgersi è proporzionale ad f-r, possiamo dunque esprimerla col prodotto $E(f-r)$, E essendo un coefficiente costante, che si determina colla esperienza.

In tal caso abbiamo dunque $R = \varepsilon(f-r)$, quindi $\int R\,dr = \varepsilon\left[fr - \frac{r^2}{2}\right] + Cost.$

e $Mu^2 + M'u'^2 = \varepsilon\left[2fr - r^2\right] - Cost$; se i sia la lunghezza iniziale della molla,

~~allora~~ sarà $Cost. = \varepsilon\left[2fi - i^2\right]$; sia questa quantità $= \varepsilon w$, sarà

$$Mu^2 + M'u'^2 = \varepsilon\left[2fr - r^2 - w\right]$$; questa equazione aggiungendo le altre

$$Mu + M'u' = 0, \quad dr = (u'-u)\,dt$$ abbiamo la soluzione completa del problema.

Dalle due prime equazioni abbiamo facendo in queste formole $r = f$ abbiamo

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{\varepsilon M'}{M(M+M')}}\ \sqrt{2fr - r^2 - w} \\ u' = \sqrt{\frac{\varepsilon M}{M'(M+M')}}\ \sqrt{2fr - r^2 - w} \end{cases}$$

1° la velocità u' della palla dopo che la molla si è svolta tutta

$$u' = (f-i)\sqrt{\frac{\varepsilon M}{M'(M+M')}}$$

2° la velocità con cui la carrucola tende a muoversi in senso contrario alla palla

$$u = (f-i)\sqrt{\frac{\varepsilon M'}{M(M+M')}}$$.

Per sapere che tempo impiega la molla a svolgersi tutta sostituiamo i valori di u, u' nella espressione $dr = (u'-u)\,dt$, ed integriamo, troveremo

$$t = \frac{\sqrt{\varepsilon M M'(M+M')}}{\varepsilon(M-M')}\left[arc\left(\omega = \frac{f-r}{f-i}\right) + Cost\right]$$, e poichè ad $r = i$ deve corrispondere $t = 0$,

$$t = \frac{\sqrt{\varepsilon M M'(M+M')}}{\varepsilon(M-M')}\ arc\left(\omega = \frac{f-r}{f-i}\right)$$. In questa formola facciasi $r = f$,

avrassi il tempo θ impiegato dalla molla a svolgersi:

$$\theta = \frac{\sqrt{\varepsilon M M'(M+M')}}{\varepsilon(M-M')} \cdot \frac{\pi}{2}$$. Questo tempo non dipende da i, ciò

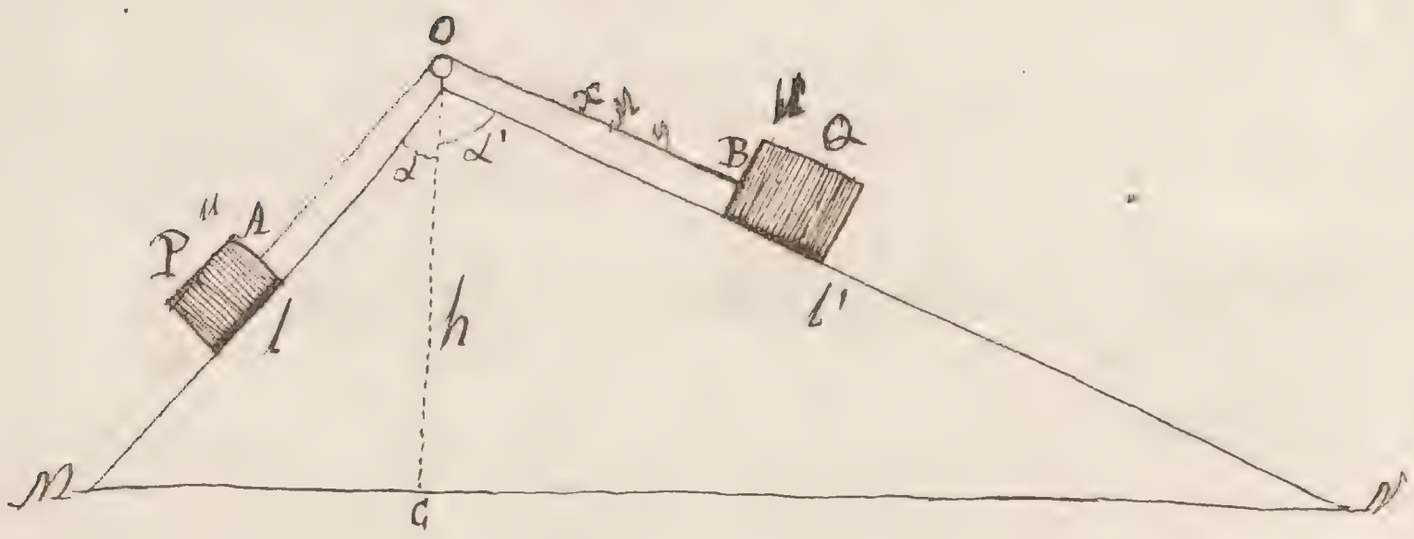
significa, che qualunque sia la lunghezza iniziale della molla, essa impiega sempre lo stesso tempo a svolgersi.

In questo esempio abbiam fatta astrazione dalla resistenza dell'aria.

Se la palla non è attaccata alla molla, tosto che questa sarà tutta scorta, prenderà a muoversi con moto equabile lungo la canna e con la velocità $(f-i)\sqrt{\frac{EM}{M'(M+M')}}$ fino a che uscirà da questa, allora cadrà descrivendo la sua traiettoria parabolica.

Se la palla è attaccata alla molla oscillerà con questa nella canna, e le sue oscillazioni saranno tautocrone.

Lezione 30.ª



Problema 8.°

Sopra l'intersezione orizzontale di due piani inclinati OA, OB è collocata una puleggia, sulla quale si avvolge una fune, alle cui estremità sono attaccati due pesi disuguali P, Q; se questi pesi sono in una posizione d'equilibrio si muovono, se sono in una posizione d'equilibrio si muovono pure se diamo loro un'impulso. Per fare il caso generale non supporremo impresse ai due corpi due velocità iniziali a,a'. Domandasi già che natura sarà il moto, che essi assumeranno.

Sia detta la lunghezza AOB della fune $= n$, l'altezza h della puleggia O al disopra d'un piano orizzontale MN, e le lunghezze $OM = l$, $ON = l'$ delle linee di mancanza aderenza dei due piani.

Le forze impresse, se α, α' sieno gli angoli dei piani inclinati con la verticale, sono $-P\cos\alpha + Q\cos\alpha'$

Le forze attuali, se u, ~~$u+du$~~ la velocità attuale dei due corpi, sono $\frac{P}{g}\frac{du}{dt}$, $\frac{Q}{g}\frac{du}{dt}$, dunque le forze perdute sono $-P\cos\alpha-\frac{P}{g}\frac{du}{dt}$, $+Q\cos\alpha'-\frac{Q}{g}\frac{du}{dt}$, ma le forze perdute si fanno equilibrio, dunque $-P\cos\alpha+Q\cos\alpha'-\frac{P+Q}{g}\frac{du}{dt}=0$, e $\frac{du}{dt}=g\frac{Q\cos\alpha'-P\cos\alpha}{P+Q}$. Chiamando ϕ la forza attuale acceleratrice del movimento, abbiamo dunque $\phi=g\frac{Q\cos\alpha'-P\cos\alpha}{P+Q}$; questa forza essendo costante risulta, che il movimento è uniformemente accelerato, e che $u=c+g\frac{Q\cos\alpha'-P\cos\alpha}{P+Q}t$, essendo la velocità iniziale del sistema, la quale è $=\frac{Qa'-Pa}{P+Q}$, e $OB=x=m+ct+\frac{1}{2}g\frac{Q\cos\alpha'-P\cos\alpha}{P+Q}t^2$, essendo m la distanza iniziale del peso Q dal punto O.

Volendo determinare la tensione della fune, se questa sia T, osserveremo, che dessa è eguale alla forza perduta dal peso Q, ed avremo

$$T=Q\cos\alpha'-\frac{Q}{g}\frac{du}{dt}=\frac{PQ\cos\alpha'+Q^2\cos\alpha'-Q^2\cos\alpha'+PQ\cos\alpha}{P+Q},$$ e riducendo

$$T=\frac{PQ(\cos\alpha+\cos\alpha')}{P+Q}.$$

Per avere la tensione X al principio del moto osserviamo, che questa è eguale alla quantità di moto perduta dal peso Q in tal istante, ed abbiamo subito

$$X=\frac{Q}{g}a'-\frac{Q}{g}c=\frac{Q}{g}\left(a'-\frac{Qa'-Pa}{P+Q}\right)=\frac{1}{g}\cdot\frac{PQ}{P+Q}(a+a').$$

Problema 9.° In tutte le formole antecedenti bisognerà ancora sostituire a $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$ i binomi $\frac{h}{l}$, $\frac{h}{l'}$. Per rendere il problema un pò meno facile supponiamo, che la fune sia pesante e di massa paragonabile a quella dei pesi P, Q.

Chiamiamo π il peso totale della fune, il peso del tratto OB sarà $=\frac{\pi x}{n}$, ed il peso del tratto $OA=\frac{\pi(n-x)}{n}$, perciò le forze impelle saranno $\left(P+\frac{\pi x}{n}\right)\cos\alpha$, $\left(P+\frac{\pi(n-x)}{n}\right)\cos\alpha$, ma le

forze attuali sono $\left|\frac{Q}{g}\right| \frac{du}{dt}$, $\left|\frac{P+\Pi}{g}\right| \frac{du}{dt}$, dunque le forze perdute sono

$\omega|\alpha'|\left(Q+\frac{\Pi x}{n}\right) - \frac{Q+\frac{\Pi x}{n}}{g}\frac{du}{dt}$, $|-P-\frac{\Pi(n-x)}{n}|\omega|\alpha| - \frac{P}{g}\frac{du}{dt}$ ora queste si fanno equilibrio, dunque

$-T\omega|\alpha| + Q\omega|\alpha'| + \frac{\Pi x}{n}\omega|\alpha'| - \frac{\Pi(n-x)}{n}\omega|\alpha| - \frac{P+Q+\Pi}{g}\frac{du}{dt} = 0$, quindi ricavasi

$\frac{du}{dt} = g\,\frac{Q\omega|\alpha' - P\omega|\alpha}{Q+P+\Pi} + \frac{\Pi g}{Q+P+\Pi}\frac{(x\omega|\alpha' + x\omega|\alpha - n\omega|\alpha)}{n}$, ma $\frac{du}{dt} = \phi$ ossia alla forza attuale acceleratrice del moto, dunque

$\phi = \frac{g}{n}\cdot\frac{n(Q\omega|\alpha' - P\omega|\alpha) + (x\omega|\alpha' + x\omega|\alpha - n\omega|\alpha)\Pi}{Q+P+\Pi}$. Quindi si scorge, che il moto non è più equabilmente

accelerato; cercando di esprimere u ed x in funzione di t troviamo prima

$u^2 - c^2 = \frac{2g}{Q+P}\left[(Q-P-\Pi)(x-m) + \frac{\Pi}{n}(x^2-m^2)\right]$

$u^2 - a^2 = \frac{2g[Q\omega|\alpha' - P\omega|\alpha - \Pi\omega|\alpha]}{Q+P+\Pi}(x-m) + \frac{\Pi 2g(\omega|\alpha+\omega|\alpha')}{2n(Q+P+\Pi)}(x^2-m^2)$, e quindi

facilmente x, ed u per t.

La tensione T in questo caso varia ad ogni istante e per ogni punto della fune, e si determina come nei problemi 3°, 4°, 5°.

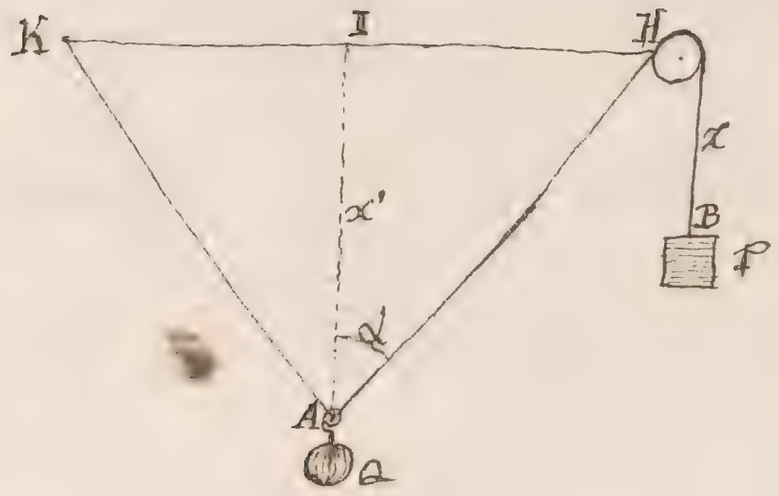
La tensione x al principio del moto di un punto M tale, che MB = y, è

$X = \frac{Q\frac{\Pi}{n}+\Pi y}{gn}(a'-c)$, c essendo la velocità iniziale attuale del sistema, la quale

$\grave{e} = \frac{(\Pi Q+\Pi m)a' - (nP+\Pi n-\Pi m)}{n(P+Q+\Pi)}$.

Le pressioni dei pesi dei piani sono $\left|\frac{\Pi x}{n}+Q\right|\operatorname{sen}\alpha$ pel 1° piano CA, $\left|\frac{\Pi(n-n)}{n}+P\right|\operatorname{sen}\alpha'$ pel 2° piano CB.

Problema 10.°



Sulla stessa orizzontale KH vie un punto fisso K ed una puleggia fissa H alla distanza KH = 2l. al punto fisso K attaccasi una fune più lunga della distanza KH di lunghezza = 2m, questa fune si fa passare sopra la puleggia H, si attacca quindi alla estremità libera B un peso P, ed un peso Q tra K ed H al punto di mezzo A di KAH. ciò fatto si imprima una velocità iniziale a ad a questo sistema, il sistema necessariamente si muoverà, domandasi di determinare la natura del movimento, che prenderanno i due pesi P, Q, ed in quali casi il moto sarà continuo, ed in quali sarà oscillatorio, supposta la fune senza peso.

Il peso Q dovendo far equilibrio alle tensioni dei tratti KA, AH evidentemente il peso Q non potrà scostarsi dalla verticale AI, che passa pel punto di mezzo I di KH.

In questo caso le forze impresse sono P, -Q, e se u, u' sieno le velocità attuali dei due pesi; $\frac{P}{g}\frac{du}{dt}$, $-\frac{du'}{dt}\cdot\frac{Q}{g}$ saranno le forze attuali, quindi le forze perdute sono

$$P-\frac{P}{g}\cdot\frac{du}{dt},\quad -Q-\frac{Q}{g}\cdot\frac{du'}{dt},$$ ma le forze perdute si fanno equilibrio, dunque

$$P-\frac{P}{g}\frac{du}{dt}=\frac{Q}{2\omega\sin\alpha}\left(1+\frac{1}{g}\frac{du'}{dt}\right)$$
$$P-Q-\frac{P}{g}\frac{du}{dt}-\frac{Q}{g}\frac{du'}{dt}=0.$$ ma se sia $HB=x$, $IA=x'$, abbiamo

$$P-\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{Q}{2\omega\sin\alpha}\left(1-\frac{1}{g}\frac{d^2x'}{dt^2}\right)$$
$$P-Q-\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{Q}{g}\frac{d^2x'}{dt^2}=0.$$

$\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{du'}{dt}=\frac{-d^2x'}{dt^2}$, dunque

ma $x'^2=\left(m-\frac{x}{2}\right)^2-l^2$, dunque $2x'dx'=-(2m-x)dx$, e

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{2m-x}{2\sqrt{(2m-x)^2-4l^2}}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{2l^2}{\sqrt{\left[(2m-x)^2-4l^2\right]^3}}\cdot\frac{dx^2}{dt^2},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2x'}{\sqrt{x'^2+l^2}}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2}-\frac{2l^2}{\sqrt{(x'^2+l^2)^3}}\cdot\frac{dx'^2}{dt^2},$$ inoltre $\cos\alpha=\frac{2x'}{2m-x}$;

Sostituendo questi valori successivamente nella equazione generale ho ottenuto

avremo le equazioni dei movimenti di P, e di Q, che integrate dovere ci daranno

x per t, x' per t; ciò fatto sarà facile calcolare u, du', le forze acceleratrici di due

movimenti, e la tensione della fune.

Se vedremo, che crescendo x la velocità u cresce indefinitamente diremo che il moto è conti-

nuo al contrario col crescere di x u diminuirà fino a diventar eguale a zero il moto sarà oscilla-

torio; ora si scorge facilmente che questo moto sarà sempre oscillatorio.

Ricerca delle leggi del moto rotatorio delle masse finite.

Finora abbiamo considerato il moto progressivo di un corpo, o di un sistema di corpi nello spazio,

Dobbiam dati dei mezzi generali per determinar questo moto e scoprirne le leggi, massime

un sistema cioè un punto fisso, ovvero due punti fissi. le forze che sono ad esso applicate non

possono più fargli assumere un moto progressivo, ma soltanto un moto rotatorio intorno al

punto fisso, od intorno alla retta dove che passa per due punti fissi; è nostro appunto

adesso di scoprire le leggi di questi moti. Come finora abbiam fatto negli altri problemi

generali faremo ancora in questo, cominceremo cioè a considerare i casi più semplici,

e salendo quindi di mano in mano a casi più generali daremo finalmente ~~detta~~ la soluzione

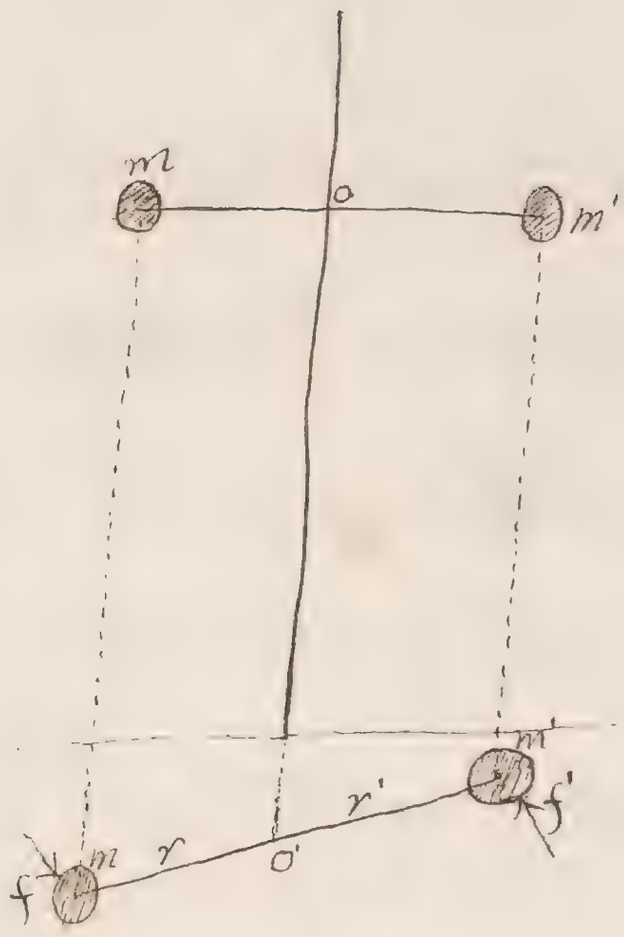
generale del problema.

Moto rotatorio intorno ad un'asse fisso.

Due masse m, m' sono connesse con un'asse fisso per mezzo di una verga pesante inflessibile

a quest'asse. Si imprimono a queste masse delle quantità di moto, che tendano a farle

girare per lo stesso verso, si domanda qual moto seguirà il sistema intorno all'asse.



Sulla figura le masse e la verga sono rappresentate in projezione verticale ed in projezione orizzontale. f, f' sono le quantità di moto impresse alle masse. oo' è l'asse, r, r' sono le distanze delle masse dall'asse.

Se m, m' fossero libere si muoverebbero con le velocità $u=\frac{f}{m}$, $u'=\frac{f'}{m'}$, ora essendo legate coll'asse descrivono spazii proporzionali ad r, r', dunque attualmente le velocità delle due masse sono proporzionali alle distanze r, r'. Se dunque chiamiamo V, V' le velocità attuali che prendono le masse potremo scrivere $V=rw$, $V'=r'w$, w essendo una certa funzione di t indipendente da r, r', la quale si chiama velocità angolare del sistema. Ciò posto f, f' sono le forze impresse, mV, m'V' sono le forze attuali, le dunque gli impulsi sono perpendicolari ad mm', ~~sono~~ anche le forze attuali essendo perpendicolari ad mm', le forze perdute saranno perpendicolari ad mm', e saranno $f-mV$, $f'-m'V'$. Queste forze devono farsi equilibrio, dunque deve essere $(f-mV)r+(f'-m'V')r'=0$, ora $V=rw$, $V'=r'w$, dunque

$$(mr^2+m'r'^2)w=fr+f'r', \text{ donde } w=\frac{fr+f'r'}{mr^2+m'r'^2}.$$

Il Numeratore di questa frazione è eguale alla somma dei momenti di rotazione rispetto all'asse oo' delle quantità di moto impresse nelle singole masse; il denominatore è la somma dei prodotti di ciascuna massa pel quadrato della rispettiva distanza dall'asse.

Qualunque sia il numero delle masse si ha sempre la velocità angolare eguale

ad una frazione, il cui numeratore è la somma dei momenti di rotazione rispetto all'asse del sis-
-tema delle quantità di moto impresse alle singole masse, ed il cui denominatore è la somma dei pro-
-dotti che si ottengono moltiplicando ciascuna massa pel quadrato della sua rispettiva distanza dall'asse.
Quest'ultima somma, come vedremo si trova ognivolta, che si ha movimento rotatorio, preso la
fu dato un nome particolare e fu chiamata momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di ro-
-tazione.

Occorrendoci sempre d'ora innanzi nello studio del moto rotatorio di dover ~~ricercare~~ dei momenti d'i-
-nerzia è bene che ci tratteniamo particolarmente alcunpoco sulla maniera di ottenerli in ogni caso.

Generalmente se $m, m', m'', \ldots$ sono le masse componenti un sistema,

ed $r, r', r'', \ldots$ sono le distanze di ciascuna di queste masse dall'asse
fisso, il momento d'inerzia del sistema rispetto a quest'asse è $= mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots$, e si
indica col simbolo Σmr^2.

La somma dei momenti di rotazione delle quantità di moto $f, f', f'' \ldots$ rispetto all'asse si indica
anche col simbolo Σfr, quindi $\omega = \frac{\Sigma fr}{\Sigma mr^2}$.

Dalla definizione del momento d'inerzia risulta evidentemente

1° che il momento d'inerzia è una quantità essenzialmente positiva,

2° che il momento d'inerzia può crescere senza che cresca la massa totale del sistema; così il
calore dilatando i corpi ne accresce il momento d'inerzia senza che ne accresca la massa,

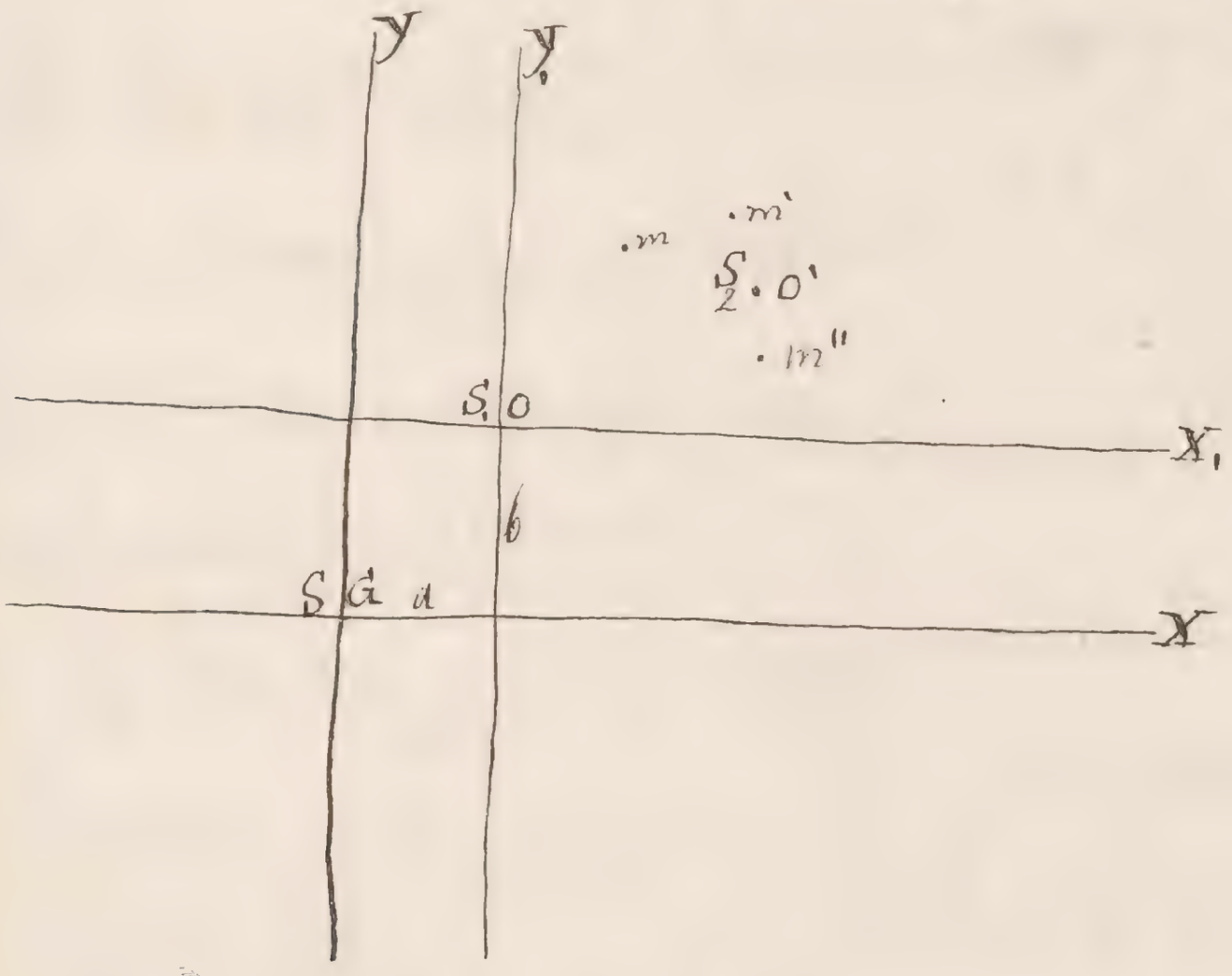
3° che il momento d'inerzia di un sistema può crescere senza che crescano le dimensioni del
sistema crescendo le densità dei corpi componenti il sistema,

4° il momento d'inerzia ~~rispetto~~ varia variando la posizione dell'asse nel sistema ancorché
non variino né la forma né le dimensioni né le densità del sistema.

L'asse del sistema può variare in due modi, o trasportandosi parallelamente a se stesso, ~~o cangiando d~~ od inclinandosi alla sua posizione primitiva, quindi due Problemi:

Trovare come varii il momento d'inerzia di un sistema, 1° quando si trasporta l'asse parallelamente a se medesimo, 2° quando l'asse si inclina alla sua posizione primitiva.

Noi per ora risolveremo il 1° riserbandoci di risolvere il 2° in un'altra Lezione avvenire.



Qualunque sia il numero delle masse del sistema se conduciamo perpendicolarmente all'asse un piano, e proiettiamo tutte le masse su di un tal piano in m, m', m''---, e le consideriamo tutte collocate in m, m', m'',---, il momento d'inerzia del sistema non varia. Ciò posto sia O l'intersezione dell'asse primitivo col piano, S, il momento d'inerzia rispetto a quest'asse, si tratta conoscendo S_1 di determinare il momento d'inerzia S_2 del sistema rispetto ad un'altr'asse parallelo al primo, e condotto pel punto O'.

Soluzione. Sia G il punto in cui un'asse parallelo all'asse primitivo e condotto pel centro di gravità del sistema ferisce il piano y,Ox, sarà G il centro di

gravità comune delle masse m, m', m'' --- quando queste sono sul piano YOX;

Supponiamo cognito il momento d'inerzia S rispetto all'asse, che passa per G.

Se per G conduciamo nel piano due assi ortogonali GY, GX, e riferiamo tutte le masse a questi assi, chiamando $(x,y), (x',y'), (x'',y'')$, --- le coordinate delle masse m, m', m'' ---

avremo evidentemente $S = \Sigma m(x^2+y^2)$, similmente conducendo per O due assi OY_1, OX_1 paralleli ai GY, GX, e chiamando $(x_1, y_1), (x_1', y_1'), (x_1'', y_1'')$, --- le coordinate delle masse m, m', m'' ---, avremo $S_1 = \Sigma m(x_1^2+y_1^2)$, ma, se a, b son le coordinate del punto O riferito agli assi GX, GY, $\left.\begin{array}{l} x_1 = x-a \\ y_1 = y-b \end{array}\right\}$, dunque $S_1 = \Sigma m[x^2+y^2+a^2+b^2-2ax-2by]$

$$= \Sigma m(x^2+y^2)+\Sigma m(a^2+b^2)-2a\Sigma mx-2b\Sigma my,$$

ora $\Sigma m(x^2+y^2) = S$, $\Sigma m(a^2+b^2) = (a^2+b^2)\Sigma m = MK^2$, se chiamiamo M la massa totale del sistema, e K la distanza OG, Σmx, Σmy sono nulle, poiché queste somme non sono altro che le somme dei momenti delle masse m, m', m'' --- rispetto a due assi, che passano per il loro centro di gravità, dunque $S_1 = S+MK^2$, ed $S = S_1 - MK^2$. Nello stesso modo si dimostra, che, essendo $O'G = h$, $S_2 = S+Mh^2$; in questa equazione sostituendo ad S il suo valore $S_1 - MK^2$, abbiamo $S_2 = S_1 + M(h^2-K^2)$, equazione che risolve il problema.

Corollario 1°. Fra tutti i momenti di inerzia di un sistema il minimo è quello preso rispetto agli assi paralleli ad un asse, che passa pel comune centro di gravità.

2°. Il Momento d'inerzia è costante rispetto a tutti gli assi paralleli collocati ad una stessa distanza dal centro di gravità, quindi se immaginiamo un cilindro retto circolare il cui asse passi pel centro di gravità del sistema, il momento d'inerzia del sistema è costante rispetto a tutti i lati del cilindro.

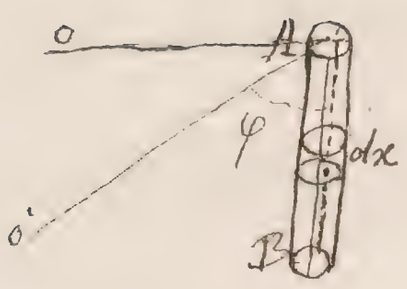
Tutto ciò è vero qualunque siano le masse, e le loro distanze dall'asse, dunque è ancora vero quando le masse sono infinitamente piccole e infinitamente vicine, dunque tutto ciò che si è dimostrato per una massa discreta è vero per una massa continua qualunque, se nonche nelle formole dobbiamo sostituire dm ad m, ed al simbolo Σ il segno $\int$ coi limiti della massa, che sono eguali a quelli del corpo; quindi il momento d'inerzia di una massa continua rispetto ad un'asse è $\int r^2 dm$, e riferendo la massa a due assi ortogonali delle x e delle y condotti in un piano perpendicolare all'asse pel punto ove questo incontra il piano possiamo scrivere, che il momento d'inerzia è $S = \int (x^2+y^2)\, dm$.

Se la massa è omogenea, e riferita agli assi delle x, e delle y, ed all'asse di rotazione considerato come asse delle z, gli elementi dm si hanno scomponendo la massa con piani paralleli ai piani delle xz, e delle yz, e saranno parallelepipedi di base $dxdy$, e di altezza eguale alla somma algebrica delle porzioni di ordinata contenute nell'interno del corpo, per conseguenza $S = \int\int z(x^2+y^2)\delta\, dxdy$.

La stessa formola vale ancora pel caso, in cui la densità δ è funzione soltanto di x e di y, cioè pel caso in cui δ è costante per tutti i punti della colonna sovrastante alla base $dxdy$. Se δ è funzione di x, y, z allora bisogna scomporre la massa in elementi di 3° ordine $\delta\, dxdydz$, ed avremo $S = \iiint (x^2+y^2)\,\delta\, dxdydz$.

Lezione 31.ª

Ricerca dei Momenti d'inerzia di alcuni corpi.



Momento d'inerzia di una verga la cui sezione trasversale è dappertutto la stessa, ed $= \omega^2$. la cui lunghezza $AB = a$, e la cui densità è δ, rispetto ad un'asse perpendicolare all'asse della verga in A.

Dividasi la verga in elementi con piani paralleli alle basi A, B, sia x la distanza di un'elemento dalla base A, dx la sua ~~spes~~ lunghezza, la distanza di questo elemento dall'asse di rotazione è sensibilmente comune a tutti i punti dell'elemento $= x$, inoltre la massa ~~dis~~ di quest'elemento sarà espressa da $\omega^2 \delta x^2 dx$, dunque il momento elementare è $\omega^2 \delta x^2 dx$. Integrando questa espressione fra i limiti 0, a avremo il momento totale $S = \frac{1}{3} \omega^2 \delta a^3 = \frac{1}{3} a^2 \omega^2 a \delta^2$, ora $\omega^2 a \delta^2$ è la massa totale della verga, dunque se chiamiamo M questa massa, $S = \frac{1}{3} M a^2$.

Come quando cercavamo i centri di gravità supporremo ancora qui le linee e le superficie come caricate uniformemente o non uniformemente di uno strato sottilissimo di materia, e ne cercheremo i momenti di inerzia.

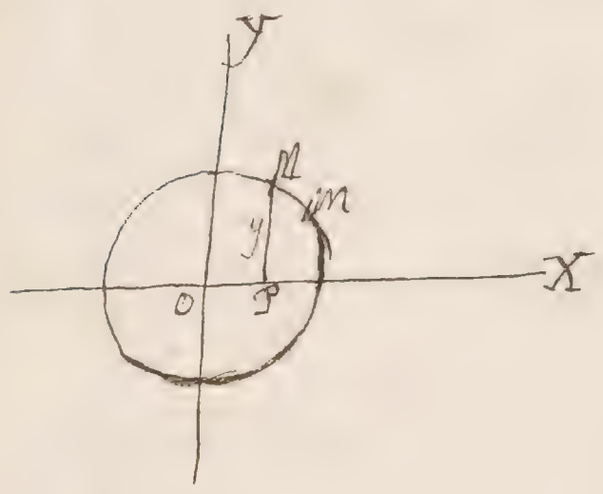
Una retta potendoci considerare come una verga sottilissima dalla ~~sezione~~ sezione antecedente abbiamo, che il suo momento d'inerzia è $= \frac{1}{3} M a^2$, M essendo la sua massa.

Il centro di gravità di una retta essendo nel suo punto di mezzo, abbiamo il momento della retta rispetto ad un'asse condotto pel centro di gravità e perpendicolarmente alla retta $S' = \frac{1}{3} M a^2 - \frac{1}{4} M a^2 = \frac{1}{12} M a^2$; se l'asse non è perpendicolare alla retta, ma inclinato ad angolo φ, nel valore del momento invece di a^2 bisogna mettere $a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$.

Momento di inerzia di una verga piegata in forma di anello circolare, ed omogenea.

Sia a il raggio del circolo secondo cui la verga è piegata, M la massa della verga, se prendiamo l'asse di rotazione perpendicolare al piano del circolo nel suo centro, il momento d'inerzia sarà evidentemente Ma^2, quindi se l'asse passa per la circonferenza del circolo perpendicolarmente al suo piano il momento d'inerzia è $S = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$.

Se prendiamo per asse un diametro del circolo, per es.° OX, allora bisogna che dividiamo la massa in elementi. Sia ds la lunghezza di un' elemento, dm la sua massa, avremo la proporzione $dm : M :: ds : 2\pi a$, donde $dm = \frac{M\,ds}{2\pi a}$. Sia y la distanza dell'elemento M m dall' asse, il momento elementare sarà



Dunque $= y^2 \frac{M\,ds}{2\pi a}$, ora $ds = \frac{a\,dx}{y}$, dunque $\frac{M}{2\pi a} y^2 ds = \frac{M}{2\pi} y\,dx$; integrando questa espressione tra i limiti $-a, +a$ e prendendone il doppio, avremo il momento totale della verga $S = \frac{M}{\pi} \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \frac{1}{2} M a^2$.

Quindi il momento d'inerzia rispetto ad una tangente è $S = \frac{1}{2} Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2} Ma^2$.

Il momento d'inerzia di un disco rispetto al suo asse, cioè ad un' asse perpendicolare al disco e condotto pel suo centro.

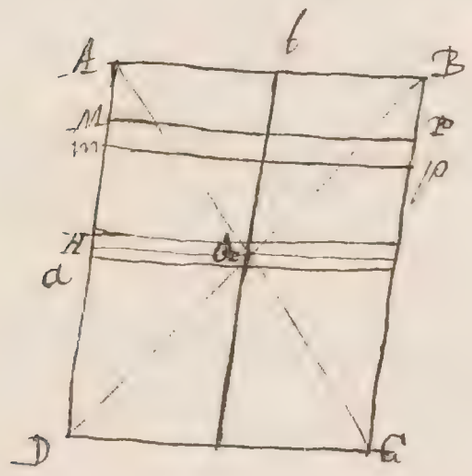
Scomponiamo il disco in tante zone ogni zona potendosi considerare come circoli, a essendo il raggio del disco, M la massa, essendo z, $z + dz$ i raggi dei due circoli comprendenti una zona, dm la massa di questa avremo, che $dm : M :: 2\pi z\,dz : \pi a^2$, e quindi $dm = \frac{M \cdot 2z\,dz}{a^2}$; moltiplicando questa massa per z^2 che è il quadrato della sua distanza dall' asse, abbiamo il momento elementare $= \frac{2M z^3 dz}{a^2}$, che integrato fra $z = 0, z = a$

ci da il momento totale $S = \frac{2M}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} Ma^2$.

Un cilindro retto circolare essendo formato da tanti dischi sovrapposti l'uno all'altro ed aventi per asse comune l'asse del cilindro, evidentemente anche il momento di questo rispetto al suo asse è $S = \frac{1}{2} Ma^2$, M esprimendo la sua massa, a il raggio.

Volendosi avere il momento del disco rispetto ad un diametro della sezione condotta a metà della sua spessezza si osserverà, che, il disco essendo sempre supposto come prima in zone, il momento di ciascuna zona è la metà del momento rispetto all'asse del disco, e si conchiuderà subito, che il momento totale sarà ancora la metà del momento rispetto all'asse, e quindi che $S = \frac{1}{4} Ma^2$.

In molti casi ana tola integrazione basta per determinare un momento d'inerzia, ma Generalmente non basta. Così cercando il momento di un rettangolo rispetto ad un lato $AD = a$ conviene-



-mo in elementi con rette parallele al lato $AB = b$, il momento di ciascuno di questi elementi essendo $= \frac{1}{3} b^2 dm$, conchiuderemo subito che il momento del rettangolo è $= \frac{1}{3} Mb^2$. M essendo la massa intiera del rettangolo, e che il momento rispetto ad un'asse condotto pel centro di gravità G parallelo ad AD è $= \frac{1}{3} Mb^2 - \frac{1}{4} Mb^2 = \frac{1}{12} Mb^2$; ma se vogliamo il momento dello stesso rettangolo rispetto ad un'asse perpendicolare al suo piano e condotto pel

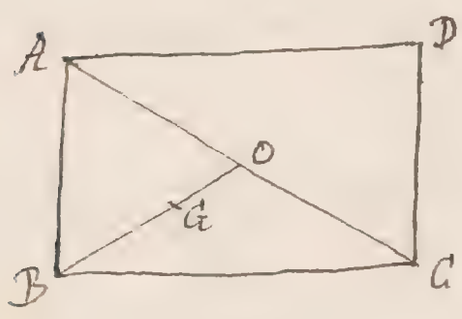
suo centro di gravità ci vorranno due integrazioni, una per avere il momento della zona elementare M m p P, l'altra per avere il momento totale. Nel nostro caso una integrazione è già fatta, poichè conosciamo già il momento della zona elementare rispetto ad un'asse perpendicolare ad esso condotto pel suo centro di gravità, questo momento, chiamando dm la massa è $= \frac{1}{12} dm \cdot b^2$, ora se $MH = x$, $Mm = dx$, abbiamo $M : dm :: a : dx$, donde $dm = \frac{M dx}{a}$, il momento è dunque $= \frac{1}{12} \frac{M dx}{a} b^2$; avuto questo momento abbiamo tosto il momento della stessa

zona rispetto all'asse condotto per $\delta = \frac{1}{12} \frac{M dx}{a} \left[\frac{1}{12} b^2 + x^2\right]$.

Integrando questa espressione fra i limiti o $\pm \frac{1}{2} a$ e prendendone il doppio, avremo il momento totale del rettangolo $S = \frac{2M}{a}\left[\frac{1}{12.2} a b^2 + \frac{a^3}{8.3}\right] = \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$.

Ciò è indipendente dalla spessezza del disco, dunque il momento d'inerzia di un parallelepipedo, che ha per base ABCD rispetto al suo asse è $= \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$, M essendo la massa del parallelepipedo. Quindi il momento d'inerzia dello stesso parallelepipedo rispetto ad uno spigolo perpendicolare alla base è $= (a^2+b^2)\left(\frac{1}{12} M + \frac{1}{4} M\right)$, ossia $= \frac{1}{3} M(a^2+b^2)$.

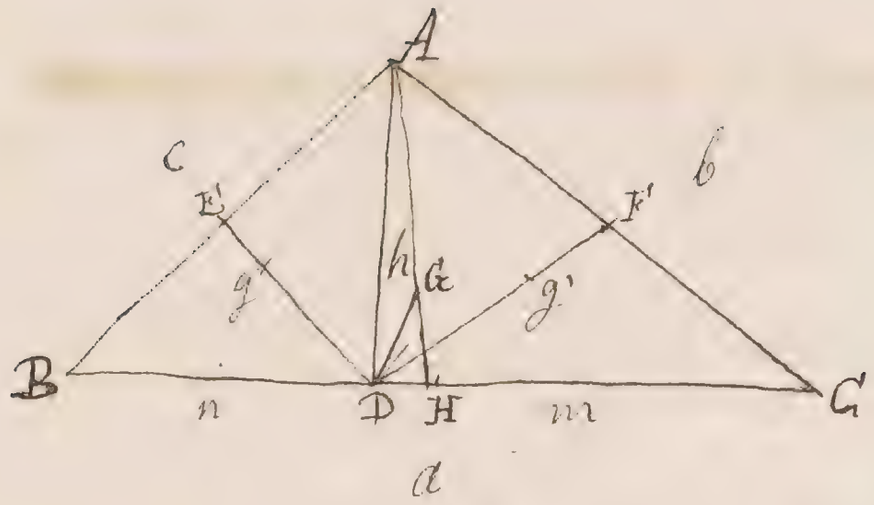
Momento d'inerzia di un triangolo rettangolo ABC rispetto ad un'asse condotto pel punto di mezzo o dell'ipotenusa perpendicolare al piano del triangolo.



Sieno a, b i cateti, il triangolo essendo la metà del rettangolo ABCD, il suo momento sarà anche la metà del momento del rettangolo esso è dunque $S = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} M(a^2+b^2)$; ma $\frac{1}{2} M$ è la massa del triangolo. Dunque se diciamo questa M, il momento del triangolo è come quello del rettangolo $= \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$.

Per avere il momento dello stesso triangolo rispetto ad un'asse perpendicolare nel centro di gravità G al triangolo osserviamo, che $BO = AO$, $\overline{OG}^2 = \frac{1}{9} \overline{AO}^2 = \frac{1}{36}(a^2+b^2)$, ed abbiamo il momento $S = \frac{1}{12}(a^2+b^2)\left(M - \frac{1}{3} M\right) = \frac{1}{18} M(a^2+b^2)$.

Scomponendo un Triangolo qualunque in due triangoli rettangoli riesce facile la determinazione del suo momento d'inerzia rispetto ad un'asse perpendicolare al triangolo e condotto pel suo centro di gravità.



a

Siano a, b, c i lati del triangolo, dal vert. A abbassiamo sul lato BC la perpendicolare AD, sia h questa perpendicolare e sia DC = m, DB = n, dividiamo per metà in E, F i lati AB, AC, tiriamo DF, DE, prend. $Dg' = \frac{2}{3} DF = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{3} b$, e $Dg = \frac{1}{3} c$, i momenti S, S' dei due Triangoli ADB, ADC rispetto a due assi perpendicolari e condotti l'uno per g, l'altro per g' saranno

$$S = \frac{1}{18} M'(h^2 + n^2) = \frac{1}{18} M' c^2, \quad S' = \frac{1}{18} M''(h^2 + m^2) = \frac{1}{18} M'' b^2$$

M', M'' essendo le masse dei triangoli, quindi i momenti dei triangoli rispetto ad un'asse condotto per D parallelo al primo saranno $c^2\left(\frac{1}{18} M' + \frac{1}{9} M'\right) = \frac{1}{6} M' c^2$, $\frac{1}{6} M'' b^2$.

Sommando questi momenti avremo il momento di tutto il triangolo ABC rispetto ad un'asse condotto per D eguale $\frac{1}{6}\left(M' c^2 + M'' b^2\right)$.

Da D tiriamo DG al centro di gravità del triangolo, il momento rispetto ad un'asse condotto per G sarà $S = \frac{1}{6}\left(M' c^2 + M'' b^2\right) - M \cdot \overline{DG}^2$, M essendo la massa del triangolo.

Ora $\overline{DG}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HG}^2 - 2\,\overline{DH} \cdot \overline{HG}$ cioè $DHG = \overline{DH}^2 + \frac{1}{9}\overline{AH}^2 - 2 \cdot \overline{DH} \cdot \frac{1}{3}\overline{AH} \cdot \frac{\overline{DH}}{\overline{AH}}$

$$= \frac{1}{9} h^2 + \frac{1}{9}\overline{DH}^2 + \frac{1}{3}\overline{DH}^2 = \frac{1}{9} h^2 + \frac{4}{9}\overline{DH}^2 = \frac{1}{9} h^2 + \frac{4}{9}\left\{\frac{1}{2} a - \sqrt{c^2 - h^2}\right\}^2,$$

$$M' = \frac{hn}{2}\delta = \frac{hn}{2} \cdot \frac{M}{\frac{ah}{2}} = M \cdot \frac{n}{a}, \quad M'' = M\,\frac{m}{a}, \text{ dunque}$$

$$S = M\left[\frac{1}{6}\frac{n}{a} c^2 + \frac{1}{6}\frac{m}{a} b^2 - \frac{1}{9} h^2 - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4} a^2 - an + n^2\right)\right]$$

$$= \frac{M}{18a}\left[3nc^2 + 3ab^2 - 3nb^2 - 2ah^2 - 2a^3 + 6a^2 n - 6an^2\right]$$

$$= \frac{M}{18a}\left[5na^2 + 6an - 2ac^2 + 3ab^2 - 3nb^2 - 2a^3\right] = \frac{M}{18}\left[\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} 5a - 2c^2 + 3b^2 - 2a^2\right]$$

$$= \frac{M}{36}\left\{a^2 + b^2 + c^2\right\}.$$

[illegible]

Dal momento d'inerzia del disco circolare rispetto al suo asse Q ad

circolo diametro rigettano tutti i momenti di inerzia di un disco ellittico

rispetto al suo asse, e ad un suo diametro principale.

Infatti l'elemento di massa del disco ellittico, i cui semiassi sono a, b sta all'elemento di

massa del disco circolare di raggio a come b:a, così pure le distanze dal centro

di questi elementi dal centro stanno come b:a, dunque i momenti d'inerzia

elementari stanno :: $b^3 : a^3$. Dunque il momento del disco ellittico sta al

momento del disco circolare come $b^3 : a^3$, e sia S il momento d'inerzia

del disco ellittico, M la massa di questo disco, M' la massa del disco circolare, sarà

$M' = M \frac{a}{b}$. $S = \frac{1}{2} M' a^2 \frac{b^3}{a^3} = \frac{1}{2} M b^2$.

Per avere il momento d'inerzia dello stesso disco rispetto ad uno degli assi principali

della ellisse per es^o rispetto all'asse maggiore, si osserverà, che gli elementi di

massa e le distanze di questi dall'asse stanno ancora agli elementi di massa

del disco circolare di ~~base~~ diametro 2a, alle distanze di questi dall'asse 2a come

b:a, e perciò che il momento d'inerzia del disco ellittico rispetto all'asse sta al momento

d'inerzia del disco circolare rispetto allo stesso asse come il momento d'inerzia

del disco ellittico rispetto all'asse perpendicolare al disco e condotto pel suo centro sta

al momento del disco circolare rispetto allo stesso asse; ora i due momenti d'inerzia

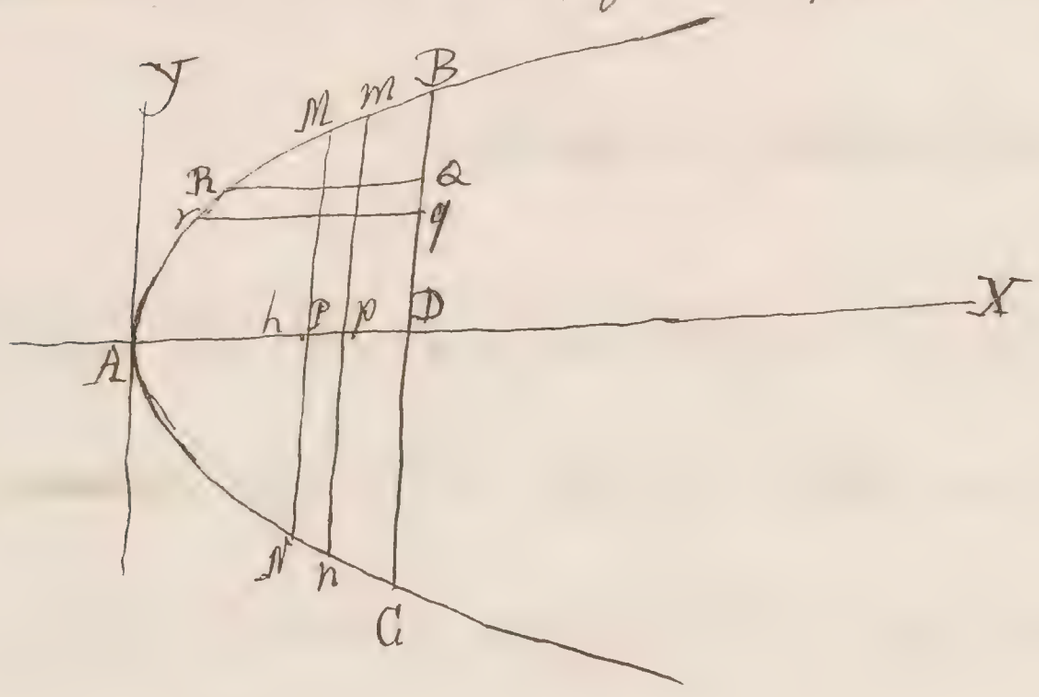
del disco circolare stanno 1:2, dunque anche i momenti d'inerzia del disco

ellittico stanno come 1:2; dunque, se chiamiamo S il momento di inerzia di

un disco ellittico rispetto al suo diametro maggiore, abbiamo $S' = \frac{1}{4} M b^2$.

Momento di inerzia di un segmento parabolico rispetto ad una normale ~~ad esso~~ al suo piano con

pel vertice, e rispetto all'asse della parabola.



Sia $y^2 = px$ l'equazione della parabola al vertice

Sia $AD = h$ l'altezza del segmento, per avere

il momento di inerzia rispetto ad un'asse

perpendicolare al piano della figura e condotto per

A diviso in elementi per mezzo di rette parallele

ad OY, essendo la densità costante per tutto il Seg-

-mento, la massa di ciascun elemento sarà

$2y\delta dx$, se $Pp = dx$, ed il suo momento rispetto ad un'asse tirato per P perpendicolarmente ad esso elemento

sarà $= \frac{1}{12} \cdot 2y\delta dx \cdot 4y^2 = \frac{2}{3}\delta y^3 dx$, quindi il momento elementare rispetto all'asse condotto per

A è $= \frac{2}{3}\delta y^3 dx + \frac{1}{6} 2\delta y x^2 dx$. Integrando questa espressione fra i limiti 0, h, avrà il momento

di inerzia ~~rispe~~ del segmento rispetto all'asse perpendicolare condotto per A

$$S = \frac{2}{3}\delta \int_0^h (px)^{\frac{3}{2}} dx + 2\delta \int_0^h \sqrt{p} \cdot x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta}{p} \cdot \frac{(ph)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{2\delta\sqrt{p}\, h^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}$$

$$= \frac{4}{15}\delta p\sqrt{p}\, h^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7}\delta\sqrt{p}\, h^{\frac{7}{2}} = \frac{4}{3}\delta\sqrt{p}\, h^{\frac{3}{2}}\left[\frac{ph}{5} + \frac{3h^2}{7}\right], \text{ ora } \frac{4}{3}\delta\sqrt{p}\, h^{\frac{3}{2}} = M \text{ massa}$$

del segmento, dunque $S = M\left[\frac{ph}{5} + \frac{3h^2}{7}\right]$, e facendo $BD = C$, $S = M\left[\frac{1}{5}C^2 + \frac{3}{7}h^2\right]$.

Per avere il momento di inerzia dello stesso segmento rispetto ad AX, dividiamo il segmento

in elementi BQqr con rette parallele ad AX, se $Qq = dy$, il momento di un'elemento sarà

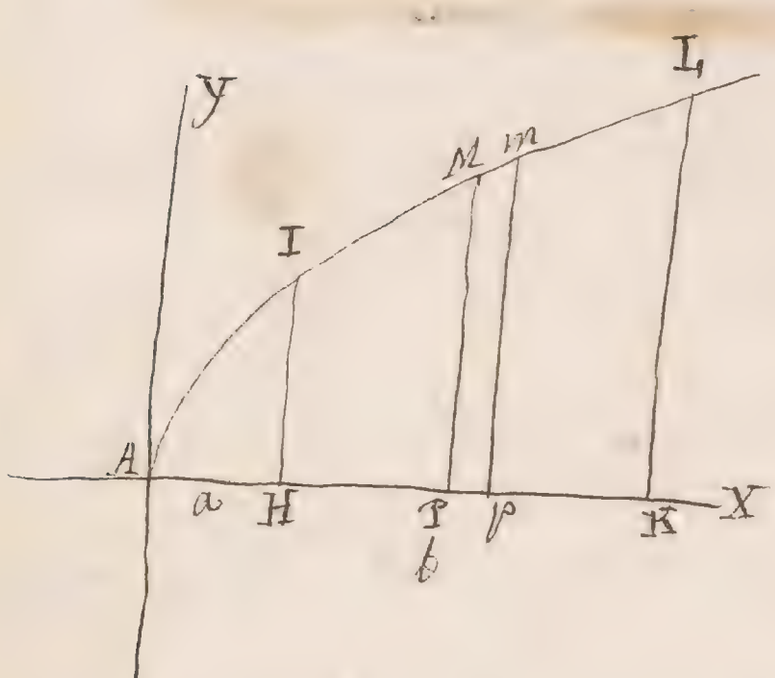
$\delta y^2 (h-x)dy$
~~$\delta y^2 x dy$~~. Integriamo questa espressione fra i limiti 0, C, e prendiamone il doppio, avremo

il momento del segmento rispetto ad AX, che sarà $S = 2\delta h \frac{C^3}{3} - \frac{2\delta C^5}{5p} = \frac{4\delta Ch}{3}\left[\frac{1}{2}C^2 - \frac{3}{10}C^2\right]$

~~$S = 2\delta \int_0^C y^2 x\, dy = \frac{2\delta}{p}\int_0^C y^4 dy = \frac{2\delta C^5}{5p}$~~,

$$S = \frac{1}{5} M C^2.$$

Momento d'inerzia d'un solido di rivoluzione ~~attorno~~ rispetto al suo asse.



Sia $y=f(x)$ l'equazione della curva generatrice AM, decomponiamo il solido in elementi con piani perpendicolari all'asse AX e distanti tra loro della quantità infinitesima dx, la massa di un elemento compreso tra i due piani MP, mp sarà $=\pi y^2\delta dx$, il momento rispetto all'asse sarà $=\frac{1}{2}\pi y^4\delta dx$; per avere il momento d'inerzia del solido generato dalla rivoluzione del segmento IHKL integriamo questa espressione fra i limiti $AH=a$, $AK=b$, il momento sarà $S=\frac{1}{2}\pi\delta\int_a^b y^4dx$.

Momento d'inerzia dello stesso solido rispetto ad una linea perpendicolare all'asse e condotta per l'origine A.

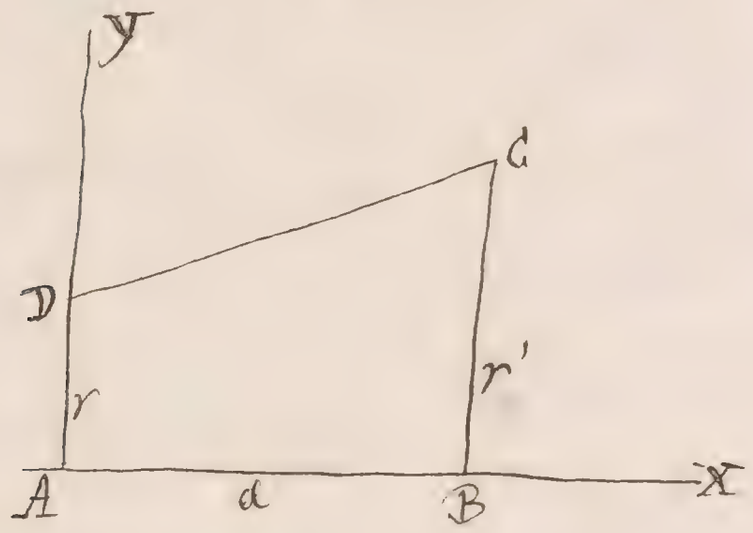
Sia AY la linea a cui vogliamo riferire il momento, decomponiamo il solido come precedentemente in elementi di massa $\pi y^2\delta dx$, il momento di ciascun elemento rispetto ad un diametro parallelo ad AY sarà $\frac{1}{4}\pi y^2\delta dx.y^2$, quindi rispetto ad AY sarà $\frac{1}{4}\pi y^4\delta dx+\pi x^2y^2\delta dx$. Integrando questa espressione tra a, b abbiamo il momento d'inerzia del solido generato dalla rotazione del segmento IHKL rispetto ad AY, $S=\frac{1}{4}\pi\delta\int_a^b y^4dx+\pi\delta\int_a^b x^2y^2dx$.

L'ascissa del centro di gravità del solido IHKL è $X=\dfrac{\int_a^b xy^2dx}{\int_a^b y^2dx}$, quindi il momento d'inerzia di questo solido rispetto ad un'asse condotto pel centro di gravità parallelamente ad AY è

$$=\frac{1}{4}\pi\delta\int_a^b y^4dx+\pi\delta\int_a^b x^2y^2dx-MX^2$$

$$=\frac{1}{4}\pi\delta\int_a^b y^4dx+\pi\delta\int_a^b x^2y^2dx-\pi\delta\frac{\left[\int_a^b xy^2dx\right]^2}{\int_a^b y^2dx}.$$

Momento d'inerzia di un cono tronco a basi parallele rispetto al suo asse.



Siano r, r' i raggi delle basi, d l'altezza del cono tronco. Questo possiamo considerarlo come generato dalla rivoluzione della retta DC attorno ad AX. Riferendo questa retta ai due assi AX, AD, la sua equazione è

$$y = r + (r'-r)\frac{x}{d}$$

, quindi il momento del cono tronco rispetto ad AX è

$$S = \frac{\pi\delta}{2}\int_0^d y^4\,dx = \frac{\pi\delta}{2}\int_r^{r'} y^4\,\frac{a}{r'-r}\,dy = \frac{\pi a\delta}{10(r'-r)}\left\{r'^5 - r^5\right\} = \frac{\pi a\delta}{10}\left(r'^4 + rr'^3 + r^2r'^2 + r^3r' + r^4\right).$$

Volendo introdurre la massa totale M del cono tronco, poichè questa è $= \frac{1}{3}\pi a\delta\left(r'^2 + rr' + r^2\right)$,

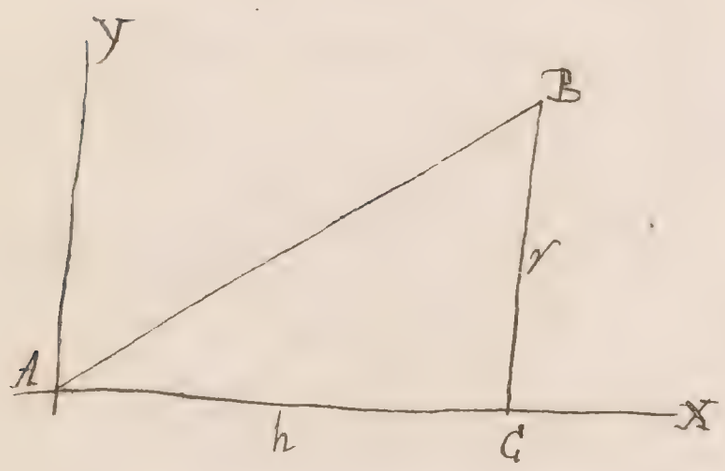
avremo $S = \frac{3}{10}M\cdot\frac{r'^4 + rr'^3 + r^2r'^2 + r^3r' + r^4}{r'^2 + rr' + r^2}$, o più semplicemente $S = \frac{3}{10}M\cdot\frac{r'^5 - r^5}{r'^3 - r^3}$.

Facendo $r' = 0$, abbiamo il momento di un cono di raggio r, e di massa M rispetto al suo asse

$$S = \frac{3}{10}M\cdot r^2$$

Momento d'inerzia di un cono retto circolare rispetto ad una retta perpendicolare all'asse, e condotta pel vertice.

Sia r il raggio della base, h l'altezza, AY ~~la~~ l'asse



a cui vogliamo riferire il momento, per questa retta faccia - mo una sezione meridiana, sia AB la generatrice contenuta in questa sezione, AX l'asse del cono, l'equazione di AB riferita agli assi AX, AY sarà $y = \frac{r}{h}x$, quindi il momento del cono rispetto ad AY sarà $S = \frac{1}{4}\pi\delta\int_0^h \frac{r^4}{h^4}x^4\,dx + \pi\delta\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^4\,dx = \frac{\pi\delta}{20}\left[r^4h + 4r^2h^3\right]$

$$S = \frac{\pi r^2h\delta}{20}\left[r^2 + 4h^2\right] = \frac{3}{20}M\left(r^2 + 4h^2\right),$$

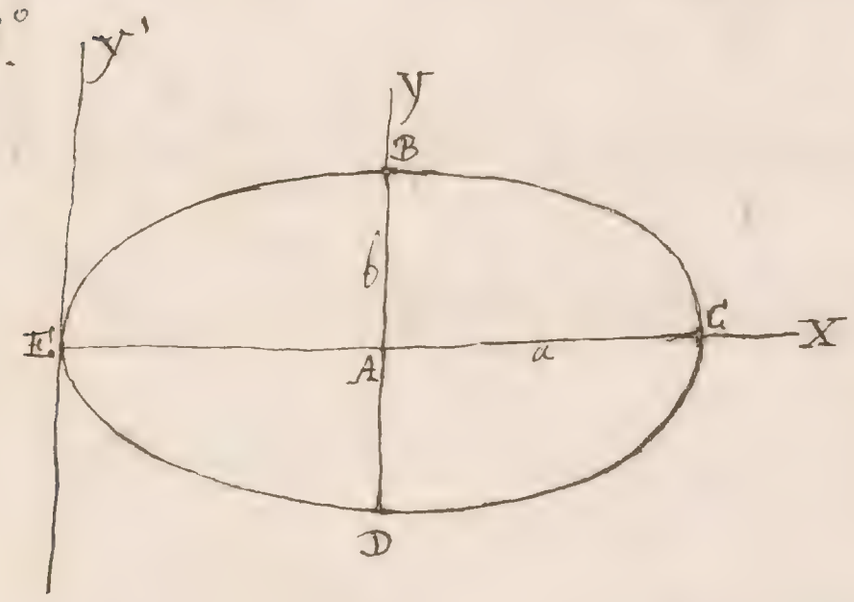
M essendo la massa del cono.

Momento d'inerzia dello stesso cono rispetto ad una retta perpendicolare all'asse e condotta pel centro di gravità.

L'ascissa del centro di gravità del cono è $x=\frac{3}{4}h$, dunque il momento che cerchiamo è $S=\frac{3}{20}Mr^2+\frac{12}{20}Mh^2-\frac{9}{16}Mh^2=\frac{3}{20}Mr^2+\frac{3}{80}Mh^2$.

Momento d'inerzia d'un ellissoide di rivoluzione rispetto al suo asse di rivoluzione, rispetto d'un'asse perpendicolare a questo, e rispetto ad un'asse parallelo a quest'ultimo, e condotto ~~pel vertice~~ per uno dei vertici dell'asse di rotazione.

1°.



Sia $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ l'equazione della ellisse generatrice riferita al centro, il momento d'inerzia dell'ellissoide rispetto all'asse di rivoluzione AX sarà

$$S=\frac{1}{2}\pi\delta\int_{-a}^{+a}y^4dx=\frac{1}{2}\pi\delta\frac{b^4}{a^4}\int_{-a}^{+a}(a^4-2a^2x^2+x^4)dx=\frac{1}{2}\pi\delta\frac{b^4}{a^4}\left[a^5-\frac{2a^5}{3}+\frac{a^5}{5}\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2\delta\cdot\frac{2}{5}b^2=\frac{2}{5}Mb^2,$$ M essendo la massa totale del solido.

2° Per avere il momento d'inerzia dello stesso solido rispetto ad AY ci serviamo della formola $S=\frac{1}{4}\pi\delta\int_{-a}^{+a}y^4dx+\pi\delta\int_{-a}^{+a}x^2y^2dx$, ed ho subito il momento d'inerzia

$$S=\frac{1}{5}Mb^2+\frac{2\pi\delta b^2}{a^2}\left[\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right]=\frac{1}{5}M\left(a^2+b^2\right).$$

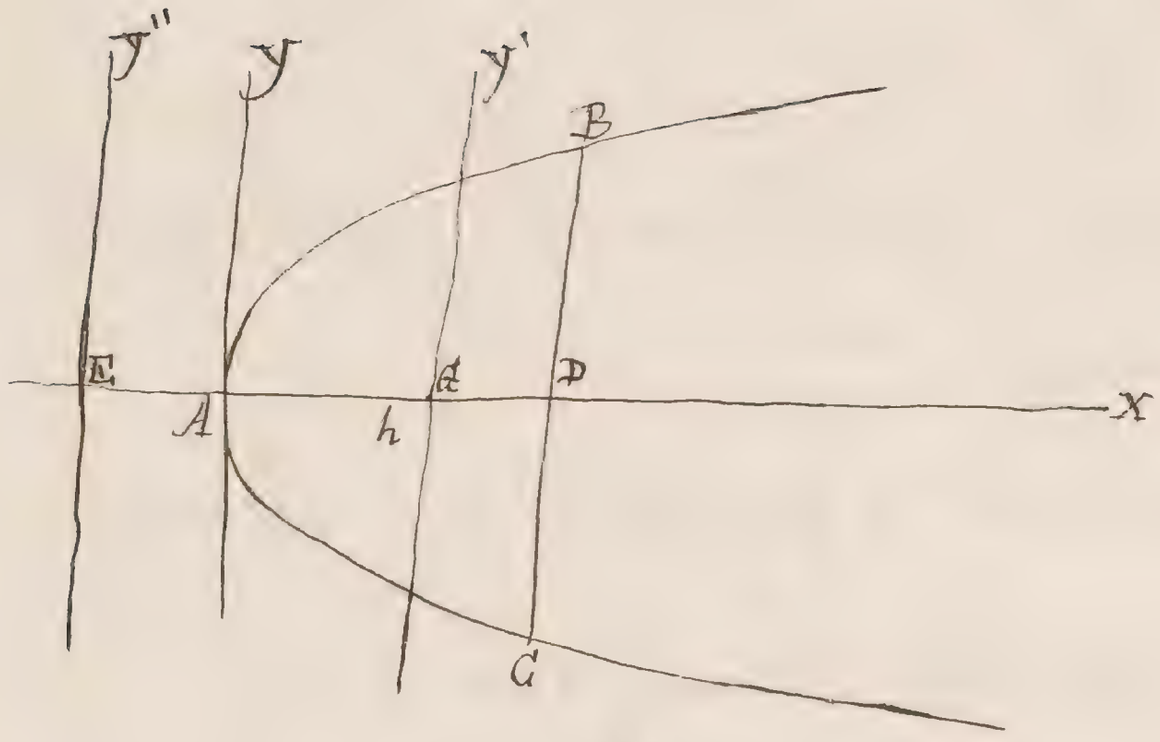
3° Avuto questo momento abbiamo tosto il momento rispetto ad EY', che sarà

$$S=\frac{1}{5}Mb^2+\frac{1}{5}Ma^2+Ma^2=\frac{1}{5}M\left(6a^2+b^2\right).$$

Facendo in tutte queste formole $b=a$, abbiamo

1° Il momento d'inerzia della sfera rispetto ad un diametro $S=\frac{2}{5}Ma^2$,

2° Il Momento d'inerzia della sfera rispetto ad una tangente $S=\frac{7}{5}Ma^2$.



Momento d'inerzia di un segmento di paraboloide di rivoluzione generato dalla rivoluzione della parabola, avente per equazione $y^2 = px$, attorno all'asse delle x. Detto anche paraboloide ellittico, rispetto al suo asse di rivoluzione, rispetto all'asse Ay condotto pel vertice perpendicolare ad AX, e rispetto ad ogni asse parallelo a questo, uno condotto pel centro di gravità del segmento, l'altro coniugato colla direttrice della parabola generatrice BAC.

1° Sia h l'altezza del segmento, sarà il 1° dei momenti richiesti $S = \frac{1}{2}\pi\delta\int_0^h p^2x^2dx = \frac{1}{6}\pi\delta p^2h^3$, ove la massa del segmento è $M = \pi\delta\int_0^h pxdx = \frac{1}{2}\pi\delta ph^2$, dunque $S = \frac{1}{3}Mph = \frac{1}{3}Mc^2$. 2c essendo la corda del segmento generatore.

2° Il secondo Momento, ossia il momento rispetto ad Ay è

$$S = \frac{1}{6}Mc^2 + \pi\delta\int_0^h px^3dx = \frac{1}{6}Mc^2 + \frac{1}{2}\pi\delta ph^2\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{6}Mc^2 + \frac{1}{2}Mh^2.$$

3° L'ascissa del centro di gravità del segmento di paraboloide è

$$AG = X = \frac{\int_0^h x\cdot px\,dx}{\int_0^h px\,dx} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3}h,$$ dunque il momento d'inerzia del segmento rispetto alla retta Gy' è $S = \frac{1}{6}Mc^2 + \frac{1}{2}Mh^2 - \frac{4}{9}Mh^2 = \frac{1}{6}Mc^2 - \frac{1}{18}Mh^2$.

4° Per ottenere il momento d'inerzia del segmento rispetto alla direttrice Ey'' osserviamo che $AE = \frac{1}{4}p$, epperciò che $EG = \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}h$, avremo il momento domandato

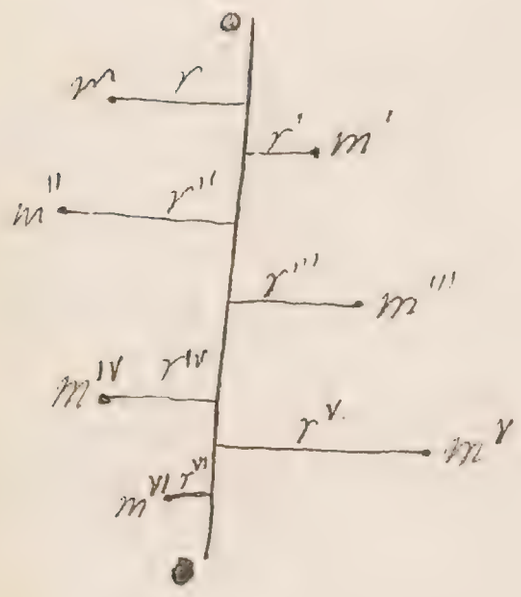
$$S = \frac{1}{6}Mc^2 - \frac{1}{18}Mh^2 + \left(\frac{1}{4}p + \frac{2}{3}h\right)^2 M = \frac{1}{2}Mc^2 + \frac{7}{18}Mh^2 + \frac{1}{16}Mp^2.$$

~~Momento di inerzia di un segmento di paraboloide~~

Lezione 32ª.

Ciò premesso ritorniamo al problema generale – Determinare le leggi del moto rotatorio intorno ad un'asse di un sistema qualunque di masse soggette ad un numero qualunque di forze.

Cominciamo a distinguere due casi essenziali; o le forze applicate alle masse del sistema loro impulsi, in questo caso il moto prodotto è un moto eguabile di rotazione, ossia le masse hanno in ciascun istante la stessa velocità; - od oltre gli impulsi loro applicate alle masse delle forze motrici, e il moto sarà vario, ossia la velocità angolare sarà funzion del tempo. Esamineremo nei questi due casi, e sarà anche parte del nostro problema la determinazione degli sforzi che sostengono i punti fissi in ogni istante del moto per cagione degli impulsi iniziali, che dopo un tempo qualunque.



Sia O O l'asse di rotazione, sieno m, m', m''--- le masse componenti il sistema, sieno r, r', r''--- le loro distanze dall'asse, e v, v', v''--- le loro velocità assolute. In qualunque tempo le masse descrivono archi simili, ossia proporzionali ai raggi r, r', r''---, quindi

v : v' : v'' :------ :: r : r' : r'' :---- , ossia $\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = \frac{v''}{r''} =$ ------ Fra tutte le masse ve ne sarà una la cui distanza dall'asse sarà l'unità, sia questa m^{XV} per esempio, nell'equazione continua dove abbiamo scritta avremo un membro $\frac{v^{XV}}{1}$, ossia v^{XV}, a questa velocità diamole un nome, consacriamole una lettera particolare w, sarà w la velocità di tutte le masse, che sono alla distanza dall'asse, sostituendo a v^{XV} questa lettera w, l'equazione continua precedente diventa $\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = \frac{v''}{r''} = \text{---} = w$,

si può scrivere nelle seguenti equazioni —

$$v = rw,\quad v' = r'w,\quad v'' = r''w,\quad v''' = r'''w, \text{ ---- —}.$$

w si chiama velocità angolare del sistema, e si trova dividendo la velocità di un punto qualunque per la distanza di questo punto dall'asse.

Supponiamo, che un sistema faccia intorno all'asse n giri nel tempo T (con moto uniforme), si domanda la velocità angolare di questo sistema.

Se T è la durata di n giri, $\frac{T}{n}$ sarà la durata di un giro, ora i punti situati alla distanza 1 dall'asse descrivono intorno a questo una circonferenza di lunghezza $= 2\pi$, dunque la velocità di questi punti, ossia $w = \frac{2\pi n}{T}$. Generalmente s'osserva la durata di una rivoluzione, allora $n = 1$, $w = \frac{2\pi}{T}$, e la velocità v di un punto situato a distanza r dall'asse è $= \frac{2\pi r}{T}$. Alcune volte si osserva anche la durata di una parte di rivoluzione; supponiamo, che si trovi, che nel tempo θ il sistema si aggira per un angolo di α gradi, si domanda la velocità angolare del sistema.

Un punto situato a distanza 1 dall'asse nel tempo θ percorre un'arco di lunghezza $= \frac{\pi\alpha}{180}$, dunque $w = \frac{\pi\alpha}{180.\theta} = \frac{\pi}{\theta}.\frac{\alpha}{180}$. Data la velocità angolare $w = 3,^{m.}75$, si domanda quanti giri il sistema fa all'ora. L'ora è composta di 3600'', dividendo ~~2π~~ w per ~~2π~~ avremo la porzione di circonferenza, che il sistema percorre in un secondo, moltiplicando questo rapporto per 3600 avremo il numero di circonferenze, che il sistema ~~passa~~ in un'ora.

Il raggio medio della terra è $r = 6366197^{m.}$, la terra fa intorno al suo asse una rivoluzione in un giorno Sidereo, il giorno Sidereo consta di 86284'' di tempo medio, si domanda la velocità angolare della terra prendendo per unità il secondo.

Dividiamo 2π per 86284, il quoziente sarà la velocità angolare, dunque $w = \frac{2\pi}{86284} = \frac{3,141592}{43142}$ ~~$\frac{m.}{00,15}$~~,

$= 0,^{m.}000073$

Per avere la velocità dei punti dissono alla superficie della ~~terra~~ dalla terra supposta ~~fisica~~
sferica e di raggio r, moltiplichiamo ω per r, la velocità sarà $v = 464,3223\overset{m.}{4}1$.
dall'equatore
Supposto r il raggio all'equatore, la nostra distanza dall'asse è $= \frac{1}{2} r\sqrt{2}$, poichè noi
siamo circa ai 45° di latitudine, quindi la nostra velocità è presa a poco $= 300^{m.}$
Con questi preliminari passiamo alla soluzione del nostro problema.
Ritenuto tutte le denominazioni precedenti, fingiamo che al principio del moto
si diano impulsi tali alle masse da parte loro conespine le velocità iniziali v, v', v'' ---
Supponiamo che ciascun impulso faccia un'angolo col piano perpendicolare all'asse,
e sia D quest'angolo, v si può riguardare come risultante di due velocità $v\cos D$, $v\operatorname{sen} D$,
una giacente nel piano perpendicolare all'asse, l'altra parallela all'asse. Questa
è elisa dall'asse, resta $v\cos D$; o questa sarà perpendicolare ad r, o farà un'angolo con r;
Supponiamo, che faccia un'angolo μ, allora $v\cos D$ si può ancora intendere risolute
in due, una perpendicolare al raggio r, l'altra diretta secondo il raggio, che saranno
espresse da $v\cos D \operatorname{sen}\mu$, $v\cos D\cos\mu$. La 2ª è elisa dalla resistenza dell'asse, resta
$v\cos D\operatorname{sen}\mu$, che sola produce movimento. Ciò posto siamo nel caso di più masse m, m' ---
sollecitate dagli impulsi $v\cos D\operatorname{sen}\mu$, $v'\cos D'\operatorname{sen}\mu'$, -- perpendicolari ai raggi r, r', ---,
quindi le quantità di moto impresse alle masse sono $mv\cos D\operatorname{sen}\mu$, $m'v'\cos D'\operatorname{sen}\mu'$, ----
Le ~~quote~~ velocità ~~furono~~ furono proporzionali ai raggi r --- il problema sarebbe risoluto, poichè
ciascuna massa si muoverebbe evidentemente con la velocità impressale.
Generalmente le velocità imprese non sono proporzionali ai r, r', r'' ----, per conseguenza
le velocità attuali, le quali sono proporzionali ai raggi non saranno eguali alle
velocità imprese. Chiamiamo w la velocità angolare comune attribuita ~~ai~~ punti
situati all'unità di distanza, le velocità attuali saranno rw, r'w, r''w, ---, e le

quantità di moto attuali saranno mrw, $m'r'w$, $m''r''w$, ---- ; queste operano perpendicolarmente ai raggi, ossia nelle stesse linee, che le forze impresse, le forze perdute sono dunque $mv\cos\delta\,\mathrm{sen}\mu - mrw$, $m'v'\cos\delta'\,\mathrm{sen}\mu' - m'r'w$, $m''v''\cos\delta''\,\mathrm{sen}\mu'' - m''r''w$, ----, ma le forze perdute devono farsi equilibrio per mezzo della resistenza dei vincoli, perchè vi sia equilibrio deve esser nulla la somma dei momenti di rotazione di queste forze rispetto all'asse, dunque

$$mr\left[v\cos\delta\,\mathrm{sen}\mu - rw\right] + m'r'\left[v'\cos\delta'\,\mathrm{sen}\mu' - r'w\right] + m''r''\left[v''\cos\delta''\,\mathrm{sen}\mu'' - r''w\right] + \text{----} = 0.$$

Quest'equazione si può scrivere simbolicamente come segue

$$\Sigma\, mrv\cos\delta\,\mathrm{sen}\mu = w\Sigma\, r^2 m. \quad \text{Quindi ricaviamo} \quad w = \frac{\Sigma\, mrv\cos\delta\,\mathrm{sen}\mu}{\Sigma\, r^2 m}.$$

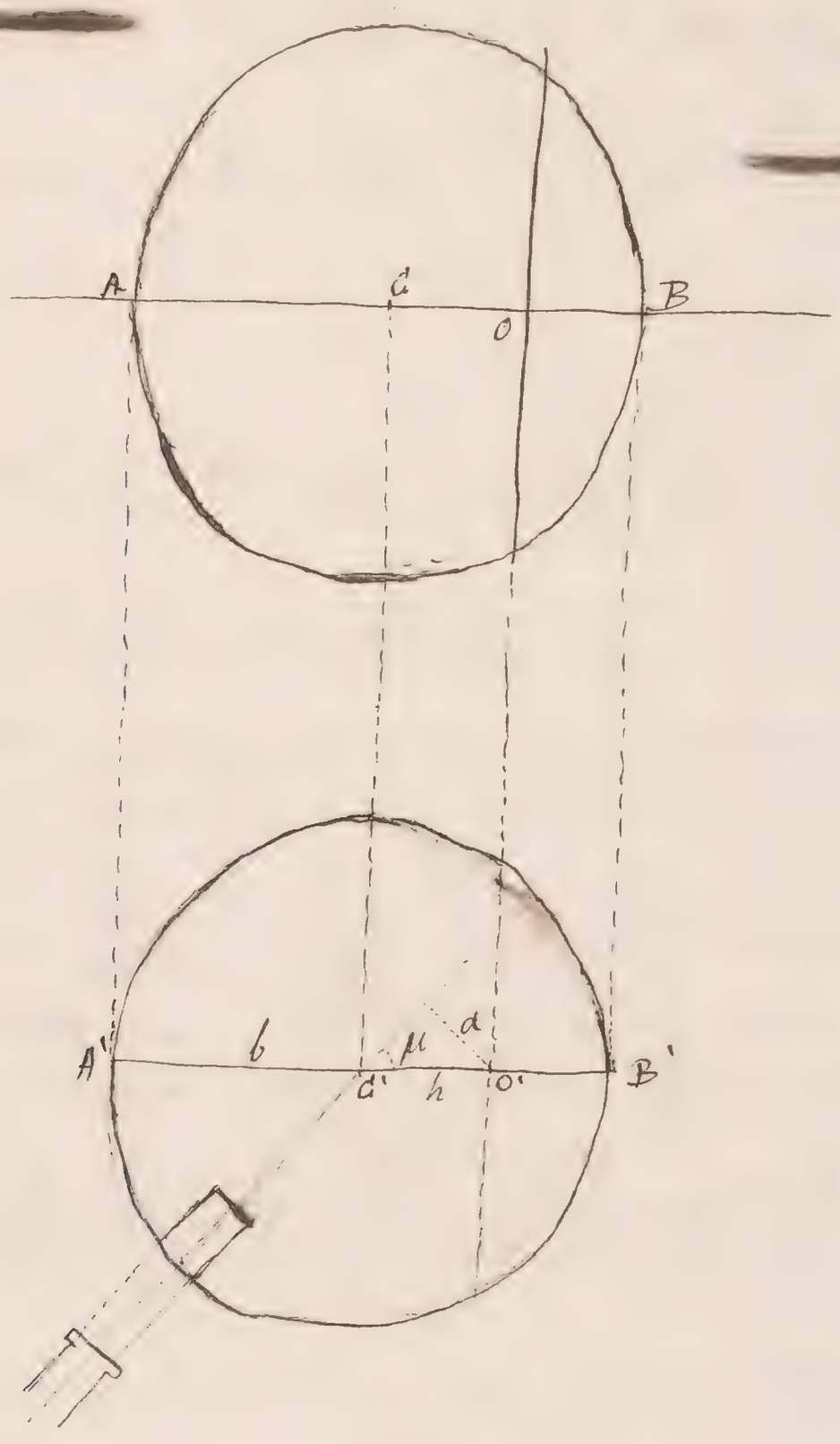
Il numeratore di questa frazione non è altro che la somma algebrica dei momenti di rotazione delle quantità di moto impresse, il denominatore è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse comune di rotazione, la velocità angolare si ha dunque dividendo ----.

E ciò che abbiam detto di un sistema discreto è ancora vero per un sistema continuo, se non che in questo caso al denominatore invece di $\Sigma\, r^2 m$ bisogna mettere $\int r^2 dm$; mv significa l'intensità d'un impulso perciò sostituiamo Fdt ad mv, la formola diventa allora

$$w = \frac{\Sigma\, Fr\cos\delta\,\mathrm{sen}\mu}{\int r^2 dm}.$$ Ordinariamente di ciascuno delle n un solo impulso F distanza a, allora $w = \frac{Fa}{S}$, chiamando ancora con una lettera sola S il momento d'inerzia.

Esempio. Una sfera di raggio $b = 1^{m.}$ può rotare intorno ad un'asse OO' situato alla distanza h dal centro, nel piano orizzontale AB che passa pel centro della sfera ossia nel prolungamento di questo piano è collocato un cannone spianato e la cui direzione passa pel centro della sfera; Cacciamo dalla sfera un pezzo cilindrico di diametro eguale a quello del cannone, il qual pezzo mettiamo come palla nel cannone; il cannone è collocato in modo, che la direzione del suo asse coincide con la

Direzione dell'asse del vuoto cilindrico fatto nella sfera. È data la massa M della sfera totale, la massa m del pezzo, che abbiamo tolto, la velocità c di questo, quando esce dal cannone, si domanda la velocità angolare del sistema dopo l'urto del pezzo contro la sfera, fatta astrazione dalla resistenza dell'aria, dagli attriti, dallo spostamento di molecole, che può avvenire per l'entrata del pezzo nella sfera.



In questo caso $F = mc$, $d = h \operatorname{sen} \mu$, μ essendo l'angolo, che la Direzione del tiro fa con $A'B'$, $S = \left(\frac{2}{5} b^2 + h^2\right) M$,

quindi $\omega = \frac{m \cdot c \cdot h \operatorname{sen} \mu}{M\left(\frac{2}{5} b^2 + h^2\right)}$.

Supponiamo, che abbiam prefate le masse m, M, e abbiam trovati i loro pesi $p = 3^{\text{chil.}}$, $P = 524^{\text{chil.}}$.

Supponiamo inoltre che $\mu = 90°$,

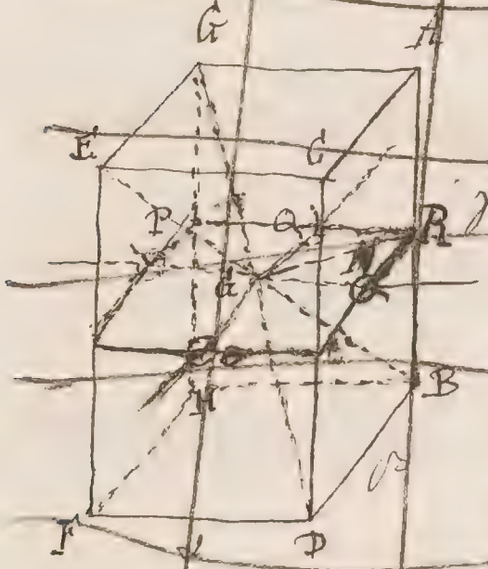
$h = \frac{1}{2} b$, sarà $\omega = c = 800^{\text{m.}}$ sarà

$$\omega = \frac{p \cdot c \cdot h \operatorname{sen} \mu}{P\left(\frac{2}{5} b^2 + h^2\right)} = \frac{3 \cdot 800 \cdot \frac{1}{2}}{524 \cdot \frac{13}{20}}$$

$$= \frac{750 \cdot 20}{524 \cdot 13} = \frac{3750}{1703} = 2,20;$$

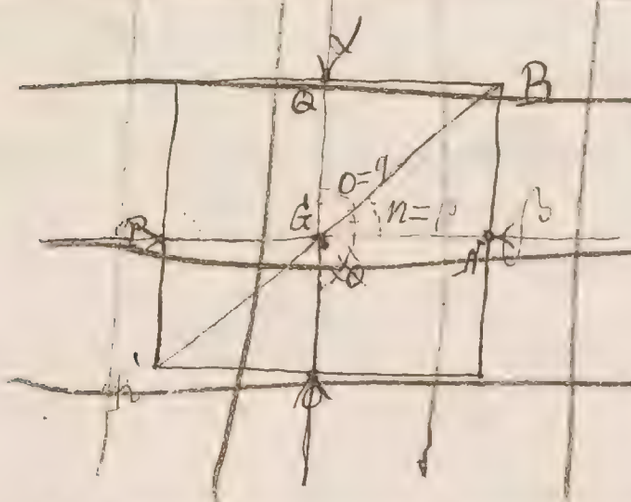
Questo risultato dimostra, che i punti della sfera situati alla distanza 1 dall'asse OO' in un secondo descrivono uno spazio di $2^{\text{m.}},20$, dunque questi punti a descrivere uno spazio $2\pi = 6,2830$ impiegano $\left(\frac{6,28}{2,20}\right)^{\text{secondi}} = 2'',73$, già la sfera impiega $2'',73$ a fare un giro intorno all'asse OO'.

Altro esempio.



Sia un parallelepipedo rettangolo che può rotare intorno all'asse AB. Da cui siano tolti quattro pezzi attivi eguali per modo rotante alle quattro facce nei loro centri N, O, P, Q, e fatti diversi tiri di cannone con i pezzi tolti dal parallelepipedo nelle direzioni dei cilindri vuoti che ne sono nel parallelepipedo. Dati i lati a, b, c del parallelepipedo, le velocità dei 4 projetti all'uscir del cannone, che supponesi tutte eguali a C, la massa m di ciascun projetto, la massa M del parallelepipedo, [illegible], si domanda con che velocità angolare prenderà a muoversi il sistema.

La quantità di moto impressa al sistema in questo caso sono mC cos n, mC cos o, mC cos p, mC cos q, m. o/p. q essendo o, n, p, q gli angoli che le ripetute direzioni dei tiri fanno con AB, ora $\cos n = \cos p = \frac{BB'}{RR'}$, $\cos o = \cos q = \frac{\alpha}{RR'}$, inoltre denotate le lunghezze delle direzioni dei tiri dall'asse sono $\frac{\beta}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha}{2}$, dunque



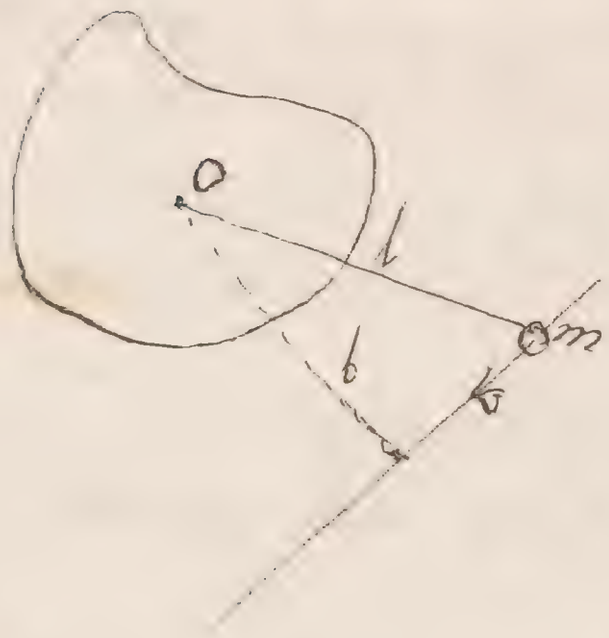
$$\mathbb{F}d = mc\,\frac{\alpha^2+\beta^2}{RR'} = mc\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \text{ ma abbiamo } S = \frac{1}{3}M(\alpha^2+\beta^2),$$

dunque $w = \dfrac{3mc\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{M(\alpha^2+\beta^2)} = 3\cdot\dfrac{m}{M}\cdot\dfrac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Lezione 33ª

Terminato il caso di un sistema continuo rotante intorno ad un asse in virtù di impulsi dati ad esso al principio del moto, fingiamo ad esso, che a un tal sistema rotante con velocità angolare Ω dopo un qualunque tempo si imprima una novella quantità di moto, domandi quale effetto essa produrrà nel sistema.

Supponiamo, che la nuova quantità di moto si sia introdotta nel sistema per cagione di una massa m, che prima si muoveva liberamente, la quale venne tutto ad un tratto a far parte del sistema con una velocità v, siccome b la distanza della direzione della velocità v dall'asse O, l la distanza della massa m dall'asse O; evidentemente all'istante in cui la massa m viene ad aggiungersi al sistema le quantità di moto di cui esse sono mv, ed $r\Omega dm$ a cui ciascun elemento del sistema contiene;



supponiamo che Ω' sia la velocità angolare di cui prende a muoversi il sistema dopo questo tempo, la quantità di moto attuale di ciascun elemento di tutto il sistema sarà $r\Omega' dm$.

Ora le forze attuali sivolte in senso contrario fanno equilibrio alle forze impresse, dunque la somma dei momenti di rotazione di queste forze è eguale alla somma dei momenti di rotazione delle forze attuali, dunque

$$mvb + \int \Omega r^2 dm = \int \Omega' r^2 dm + \int \Omega' r'^2 dm',$$

essendo dm' l'elemento della massa m, r' la distanza di questo elemento dall'asse. Siccome Ω è costante per tutti gli elementi di massa dm, ed Ω' è costante per tutti gli elementi dm e dm', la equazione tradotta possiamo scriverla in quest'altro modo col mettere Ω, Ω' fuori dei segni $\int$. Ci avremo

$$\Omega' \left[\int r^2 dm + \int r'^2 dm' \right] = mvb + \Omega \int r^2 dm,$$

ed avremo

$$\Omega' = \frac{\Omega \int r^2 dm + bmv}{\int r^2 dm + \int r'^2 dm'}.$$

e il novello impulso è diretto in senso contrario alla velocità primitiva del sistema in vece di v nella formola di Ω metteremo $-v$, e se vogliamo che distrugga il primo impulso dovrà essere $\Omega \int r^2 dm - bmv = 0$, e per conseguenza $mv = \frac{\Omega \int r^2 dm}{b}$.

Quando il sistema urta in un'altro sistema fisso e resistente indefinitamente, il 1° sistema, il secondo soffre una percossa dal primo capace di imprimergli, se fosse libero, una quantità di moto $mv = \frac{\Omega \int r^2 dm}{b}$, in cui b è la distanza della normale commune alle due superficie dall'asse.

Nel corpo rotante la somma dei momenti di rotazione delle quantità di moto attuali è eguale ad $\Omega \int r^2 dm$, o compendiosamente ad ΩS, ΩS è dunque un momento rotatorio, ora esso dipende da Ω, dalla massa del corpo, e dalle distanze dei suoi elementi dall'asse, col crescere della massa cresce l'inerzia ossia la tendenza del sistema a conservare il suo moto primitivo. Diremo dunque che il momento rotatorio ΩS è dipendente da Ω, dalle distanze degli elementi del corpo dall'asse di rotazione, e dalla forza d'inerzia, per cui ciascuna molecola tende a conservare lo stato suo di quiete o di moto in cui fu messa da una o più forze che agirono su di essa, ma un momento rotatorio è eguale al prodotto di una forza per una retta. Esso dipende dunque sempre da una forza: ed a una retta, ΩS è dunque il momento rotatorio intorno all'asse della forza d'inerzia del corpo rotante. Siccome Ω è la velocità angolare del corpo ossia il rapporto tra la velocità di un'elemento qualunque del corpo e la sua distanza dall'asse, perciò abbiamo che detto momento d'inerzia la quantità S, trascurando Ω il quale non è che un rapporto costante per tutta la massa del corpo rotante.

Quando un sistema si muove con velocità angolare ω, ciascuna molecola venendo a un tratto ad esser soggetta all'azione di una forza acceleratrice φ continua, la formola antecedente non serve più a determinare la velocità angolare del sistema poichè questa varierà ad ogni istante, e la sua azione si continua.

Per iscoprir questa velocità, che varia una funzione del tempo consideriamo un elemento dm del sistema, posto a distanza r dall'asse, e supponiamo per fare il caso più generale che la forza φ operi su quest'elemento facendo col piano perpendicolare all'asse un'angolo D, e che la proiezione di questa forza sul detto piano faccia con r un'angolo μ, una parte della forza φ sarà distrutta dalla resistenza dell'asse fisso, e la sola parte che produca movimento sarà la componente perpendicolare ad r, la quale è $= \varphi \cos D \operatorname{sen} \mu$.

a questa forza acceleratrice corrisponde la forza motrice $\varphi\, dm \cos D \operatorname{sen} \mu$, il cui momento rotatorio è $r\varphi\, dm \cos D \operatorname{sen} \mu$, ~~Ho ripensato~~ La somma dei momenti rotatorii delle forze impresse è dunque $\int r\varphi \cos D \operatorname{sen} \mu\, dm$.

Alla fin del tempo t sia w la velocità angolare del sistema, e variando da un'istante all'altro, alla fin del tempo $t+dt$ la velocità angolare sarà diventata $w+dw$, ossia sarà aumentata della quantità dw. Moltiplicando quest'aumento per r, $r\,dw$ darà la velocità attuale acquistata dall'elemento dm, ora a questa velocità corrisponde la forza acceleratrice $\frac{r\,dw}{dt}$, e la forza motrice $\frac{r\,dw}{dt}\,dm$, di cui il momento rotatorio è $r^2 \frac{dw}{dt}\,dm$, dunque $\int r^2 \frac{dw}{dt}\,dm$ è la somma dei momenti rotatorii delle forze attuali motrici del sistema.

(io posto la forza impressa dovendo far equilibrio alle forze attuali rivolte in senso contrario, la somma dei momenti di rotazione di quelle dovrà essere eguale alla somma dei momenti di rotazione di queste, onde

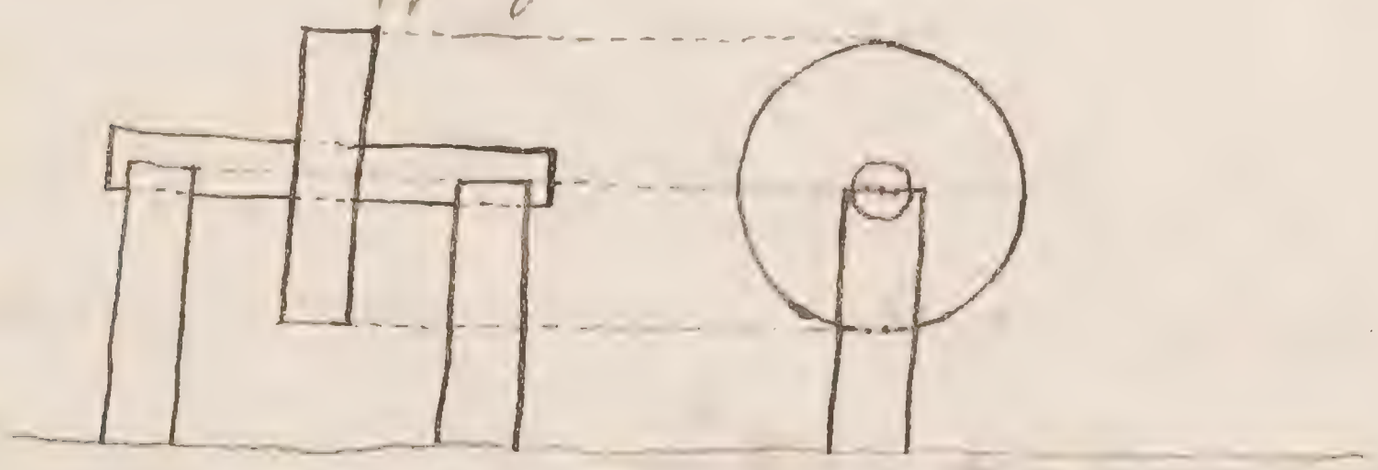
$$\int \frac{dw}{dt} r^2 dm = \int r\varphi \cos\beta \operatorname{sen}\mu \, dm .$$

$\frac{dw}{dt}$ essendo quantità costante rispetto alle coordinate dell'elemento dm prendiamo nella terra fuori del legno $\int$, avremo allora

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\int r\varphi \cos\beta \operatorname{sen}\mu \, dm}{\int r^2 dm} .$$

$\frac{dw}{dt}$ possiamo chiamarla la forza acceleratrice angolare, e diremo, che la forza accelerat. angolare nel moto vario di rotazione è eguale al quoziente della somma dei momenti delle forze impresse divisa pel momento d'inerzia del sistema rotante.

Facciamo una applicazione.



Un disco circolare gira intorno ad un'asse cilindrico con velocità angolare iniziale Ω si domanda, tenendo conto dell'attrito, quale sarà la velocità angolare del disco dopo un certo tempo, quanti giri questo avrà fatti in questo tempo, e che tempo impiegherà ad arrestarsi.

Sia P il peso del disco o ruota, p il peso dell'asse cilindrico, o albero della ruota, R il raggio della ruota, r il raggio dell'albero, l'attrito dell'albero e della ruota sui pali o piuoli che li sostengono

è proporzionale alla pressione, che questi sopportano, la pressione ~~sia~~ è la stessa, che se la ruota fosse in riposo, ma questa è $= P+p$, dunque se f sia il coefficiente dell'attrito, il quale dipende dalla sostanza della ruota e dell'albero, la forza motrice proveniente dall'attrito è $= f(P+p)$.

Questa forza è la sola, che agisca continuamente sul nostro sistema, poichè si oppone in direzione tangenziale ~~sia opposta~~ il suo momento è $= fr(P+p)$, inoltre il Momento d'inerzia della ruota è $= \frac{P}{2g}(R^2+r^2)$, il momento d'inerzia dell'albero è $= \frac{p}{2g}r^2$, dunque la forza acceleratrice angolare è $\frac{dw}{dt} = \frac{-2gfr(P+p)}{P(R^2+r^2)+pr^2} = -g.\frac{2fr(P+p)}{P(R^2+r^2)+pr^2}$

In questa formola f, g, P, p, R, r sono costanti, per conseguenza il moto è equabilmente ritardato, e vi sarà un tempo in cui la velocità sarà spenta.

Integrando questa espressione ed osservando, che al principio la velocità angolare l'abbiamo supposta $= \Omega$, abbiamo $\Omega - w = gt.\frac{2fr(P+p)}{P(R^2+r^2)+pr^2}$.

Facendo in questa formola $w=0$, abbiamo la durata totale del moto $T = \frac{\Omega}{g}.\frac{PR^2+Pr^2+pr^2}{2fr(P+p)}$.

Per sapere quanti giri la ruota avrà fatti nel tempo T, chiamiamo y lo spazio descritto dai punti situati alla distanza r dall'asse nel tempo t, sarà evidentemente $w = \frac{dy}{dt}$, e quindi $\frac{dy}{dt} = \Omega - gt.\frac{2fr(P+p)}{P(R^2+r^2)+pr^2}$.

Contando lo spazio y dal principio del moto troviamo integrando questa formola $y = \Omega t - \frac{2fr(P+p)}{P(R^2+r^2)+pr^2}\cdot\frac{1}{2}gt^2$. Sostituendo T a t abbiamo

lo spazio totale descritto nel tempo T

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{g}\cdot\frac{PR^2+Pr^2+pr^2}{2fr(P+p)} = \frac{\Omega^2}{g}\cdot\frac{PR^2+Pr^2+pr^2}{4fr(P+p)}.$$

Dividendo questo spazio per 2π avrassi il numero dei giri fatti dalla ruota prima di fermarsi.

Lezione 34ª.

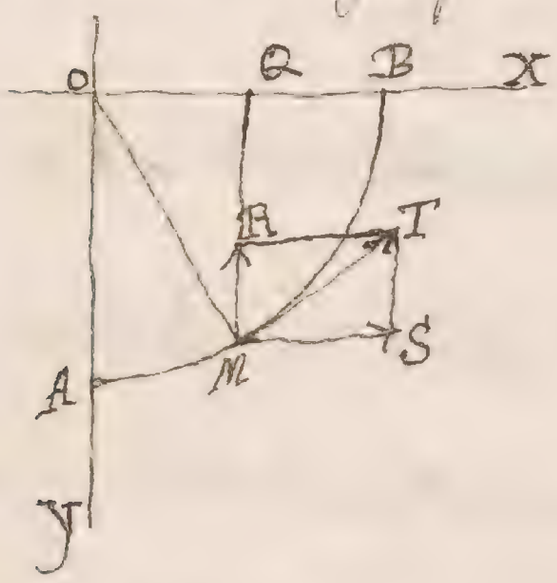
Per compiere la soluzione del problema generale a cui siamo arrivati restano a determinare le pressioni sofferte dai cardini e la percossa da questi sofferta inizialmente a cagione degli impulsi dati al sistema.

Riferiamo il sistema a tre assi ortogonali di cui uno sia l'asse fisso, e sia questo l'asse delle z, e gli altri due delle x e delle y mobili col sistema. Supponiamo dato al sistema un'impulso unico capace di produrre la quantità di moto F, e che la direzione dell'impulso giaccia in un piano perpendicolare all'asse. Il piano dei due assi mobili essendo arbitrario lo conduciamo per la direzione dell'impulso F, essendo anche arbitraria la direzione degli assi mobili prendiamo l'asse delle y parallelo alla direzione dell'impulso. Supponiamo ancora, che i due cardini sieno alle altezze ζ, ζ' sopra il piano delle xy, e che la direzione dell'impulso sia ad una data lunga a dall'asse. Determiniamo quali sieno le forze da applicarsi ai cardini, perchè togliendo questi il moto continui con la stessa velocità, tali forze rappresenteranno evidentemente le resistenze, che i cardini oppongono agli sforzi esercitati sovr'essi dal sistema rotante, e saranno perciò eguali ~~a questi~~ in intensità e direttamente opposte a questi.

Quando togliamo i cardini e sostituiamo ad essi le dette forze, queste e le forze impresse devono produr lo stesso effetto che prima producevano le forze attuali, se dunque

Sieno p, q le forze una parallela all'asse delle x, l'altra parallela a quella delle y che dobbiamo sostituire al cardine, che è a dist.za $\frac{1}{5}$ dal piano delle xy. p', q' le forze parallele agli assi delle x e delle y che dobbiamo sostituire all'altro cardine, le forze p, q, p', q' e la forza impressa F dovranno far equilibrio alle forze attuali, che ora andiamo a determinare.

Consideriamo un' elemento dm le cui coordinate sieno x, y, z, e la cui distanza dall'asse sia $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se w sia la velocità angolare, la velocità assoluta dell'elemento dm sarà rw, e la forza attuale, che lo sollecita, $rw\,dm$; questa forza essendo tangenziale al circolo descritto dall'elemento dm, possiamo proiettarla sul piano delle xy senza che cangi la sua grandezza. Proiettiamo anche sullo stesso piano il circolo a cui questa forza è tangente, sicchè sia AMB il circolo, MT la forza, se questa la scomponiamo in due una MS parallela all'asse delle x, l'altra MR parallela all'asse delle y, sarà



$MS : MT :: MQ : MO :: y : r$ ed

$MR : MT :: OQ : MO :: x : r$ e quindi

$MS = rw\,dm \cdot \frac{y}{r} = wy\,dm$, $MR = rw\,dm \cdot \frac{x}{r} = wx\,dm$; queste forze, e le analoghe a queste applicate agli altri elementi del sistema rivolte in senso contrario devono far equilibrio alle forze p, q, p', q', F, dovrà dunque essere

$$p + p' - w\int y\,dm = 0 \qquad q\zeta + q'\zeta' + w\int x\,dm = 0 \quad (V.\ Stat.^a)$$

$$q + q' - F + w\int x\,dm = 0 \qquad + w\int yz\,dm - p\zeta - p'\zeta' = 0$$

L'ultima di queste equazioni ci dia $Fa - w\int y^2\,dm - w\int x^2\,dm = 0$

che $w = \frac{Fa}{\int r^2\,dm}$, come già sappiamo, le prime quattro servono a determinare p, p', q, q'. Nelle prime due equazioni in vece di $\int y\,dm$, $\int x\,dm$

poffiamo mettere My, Mx, $x.y$ essendo le coordinate del centro di gravità del sistema, M la massa, di questo, ed avremo per determinare $p.q.p'.q'$ le equazioni seguenti

$$p+p'-\omega My=0 \quad , \quad q\zeta+q'\zeta'+\omega\int x\zeta\,dm=0$$
$$q+q'-F+\omega Mx=0 \quad , \quad p\zeta+p'\zeta'-\omega\int y\zeta\,dm=0$$

Se l'impulso F non è diretto in un piano perpendicolare all'asse, si scomponga indue uno parallelo all'asse, l'altro giacente in un piano perpendicolare all'asse, si calcolino gli sforzi sostenuti dai cardini per l'azione del 1° impulso, come si insegnò nella Statica, e gli sforzi sostenuti per l'azione del 2° impulso, come ora abbiamo insegnato, componendo insieme questi sforzi si avranno gli sforzi totali sostenuti dai cardini.

Calcoliamo adesso gli sforzi che sopportano i cardini durante il moto in virtù della forza centrifuga.

Perciò supponiamo tolti i cardini, e sostituite parallelamente alle x le forze $\Pi.\Pi'$, e parallelamente alle y le forze $\mathcal{K}.\mathcal{K}'$; la velocità essendo rw la forza centrifuga sarà $=\frac{r^2w^2}{r}=rw^2$, e quindi la forza motrice corrispondente $=rw^2dm$; questa forza che è diretta secondo il prolungamento del raggio la scomponga in due una parallela all'asse delle $x = xw^2dm$, l'altra parallela all'asse delle $y = yw^2dm$, Tra la sommadi queste forze rivolte in senso contrario, le forze $\Pi.\Pi'$, $\mathcal{K}.\mathcal{K}'$ dovrà essere equilibrio; quindi le relazioni seguenti

$$\Pi+\Pi'=w^2\int x\,dm=w^2Mx \quad , \quad \mathcal{K}\zeta+\mathcal{K}'\zeta'=w^2\int y\zeta\,dm$$
$$\mathcal{K}+\mathcal{K}'=w^2\int y\,dm=w^2My \quad , \quad \Pi\zeta+\Pi'\zeta'=w^2\int x\zeta\,dm$$

donde si hanno $\Pi,\Pi',\mathcal{K},\mathcal{K}'$.

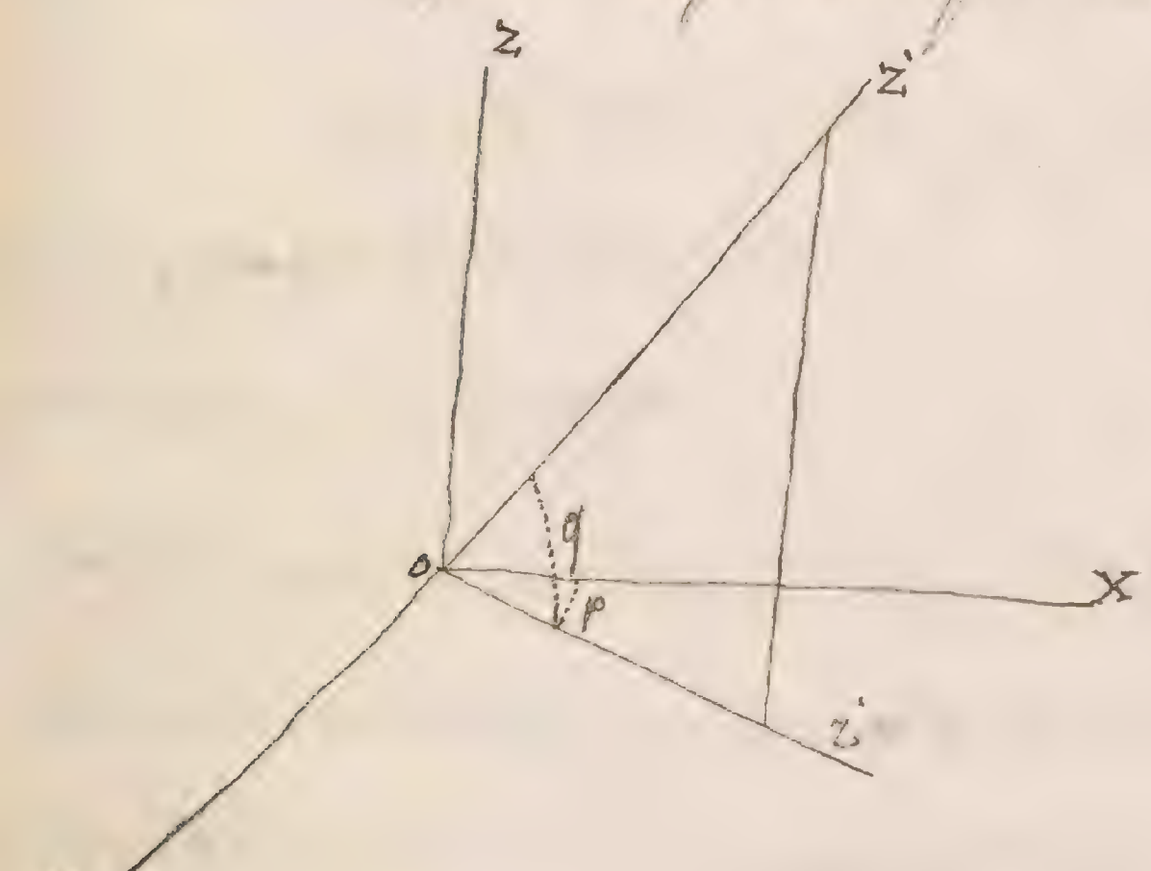
Ogni in queste equazioni, come in quelle trovate superiormente per determinare la pressione sostenute dai cardini per l'impulso primitivo dovrà i due integrali $\int x\zeta\,dm$, $\int y\zeta\,dm$, di cui

• bisogna, che studiamo bene il significato prima di analizzare queste equazioni.

Lezione 35ª

Lo studio degli integrali $\int x z\,dm$, $\int y z\,dm$, e del suo compagno $\int x y\,dm$ è invincibilmente connesso collo studio dei momenti d'inerzia, come fra poco vedremo, perciò riprendiamo lo studio di questi, e vedremo fra poco ad introdurci nel calcolo degli integrali suddetti.

Abbiamo già risolta in un'altra Lezione una parte del problema. Dato il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un'asse trovare il momento d'inerzia dello stesso sistema rispetto ad un'altr'asse qualunque; abbiamo cioè insegnato il modo di trovare il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un'asse quando è dato il momento rispetto ad un'asse parallelo, resta che cerchiamo il modo di trovare il momento d'inerzia rispetto ad un'asse quando si conosce il momento rispetto ad un'asse comunque inclinato rispetto al primo.



Sia OZ l'asse rispetto a cui compiamo il momento d'inerzia S del sistema, e vogliasi il momento d'inerzia Σ dello stesso sistema rispetto all'asse OZ'.

OZ' non è abbastanza determinato, se di conosce soltanto la sua inclinazione con OZ, ossia l'angolo ZOZ', d'altronde non sappiamo se inclinando OZ' ad angolo ZOZ' con OZ in un piano od in un'altro il momento d'inerzia non varii, non basta dunque per avere Σ di conoscere S ed l'angolo ZOZ', ma bisogna che OZ' sia completamente determinato nello spazio. Per compiere questa determinazione tiriamo pel punto O due assi OX, OY perpendicolari

ad Oz, projettiamo Oz' sul piano di questi due assi, sia Oz_1 la projezione, Oz' sarà determinata quando conosceremo l'angolo p che la projezione Oz_1 fa con OX, e l'angolo q, che Oz' fa con questa projezione, avvertendo di misurare p da $0°$ fino a $360°$ da destra verso sinistra, e l'angolo q da $0°$ fino a $90°$ positivamente o negativamente cioè al disopra od al disotto del piano xy. Oz' essendo determinato per gli angoli p, q, quantunque non conosciamo Σ, sappiamo però già, che desso sarà una funzione di S, p, q. Vediamo cercando questa funzione, che contiene ancora altre quantità.

Per trovar questa funzione facciamo girare il sistema di assi Oz, OX, OY intorno ad Oz come sopra sinchè OY coincida con Oz_1, se x, y, z erano le coordinate di un punto rispetto agli assi Oz, OX, OY e chiamiamo x_1, y_1, z_1 le coordinate dello stesso punto rispetto ai nuovi assi, avremo

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\operatorname{sen} p - y\cos p \\ y_1 &= x\cos p + y\operatorname{sen} p \\ z_1 &= z \end{aligned}\right\};$$

Facciamo quindi girare il nuovo sistema di assi intorno all'asse delle x di questo sistema sinchè l'asse Oz_1 coincida con Oz', avremo un novello sistema di assi, chiamiamo x', y', z' le coordinate del punto (x, y, z) rispetto agli assi di questo sistema, sarà

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_1 \\ y' &= y_1\operatorname{sen} q - z_1\cos q \\ z' &= y_1\cos q + z_1\operatorname{sen} q \end{aligned}\right\}, \text{ e quindi } \left\{\begin{aligned} x' &= x\operatorname{sen} p - y\cos p \\ y' &= x\cos p\operatorname{sen} q + y\operatorname{sen} p\operatorname{sen} q - z\cos q \\ z' &= x\cos p\cos q + y\operatorname{sen} p\cos q + z\operatorname{sen} q, \end{aligned}\right.$$

cioè posto $S = \int (x^2+y^2)\,dM$, $\Sigma = \int (x'^2+y'^2)\,dM$, e questi integrali devono essere estesi fra i limiti che abbracciano la massa del sistema, avremo dunque Σ sostituendo nel suo valore sotto il segno $\int$ ad x', y' i suoi valori in x, y, z, e intendendo esteso il nuovo integrale fra gli stessi limiti che l'integrale, il quale ci dà il valore di S,

$$\Sigma = \int\Big[\begin{aligned} &x^2(\operatorname{sen}^2 p + \cos^2 p\operatorname{sen}^2 q) + y^2(\cos^2 p + \operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q) + z^2\cos^2 q - 2xy\operatorname{sen} p\cos p\cos^2 q \\ &- 2xz\cos p\operatorname{sen} q\cos q - 2yz\operatorname{sen} p\operatorname{sen} q\cos q\Big]\,dM$$

$$= (\operatorname{sen}^2 p + \cos^2 p\operatorname{sen}^2 q)\int x^2\,dM + (\cos^2 p + \operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q)\int y^2\,dM + \cos^2 q\int z^2\,dM - 2\operatorname{sen} p\cos p\cos^2 q\int xy\,dM$$

$$- 2\cos p\operatorname{sen} q\cos q\int xz\,dM - 2\operatorname{sen} p\operatorname{sen} q\cos q\int yz\,dM;$$

$$=$$

Gli integrali $\int x^2 dM$, $\int y^2 dM$, $\int z^2 dM$, $\int xy\, dM$, $\int xz\, dM$, $\int yz\, dM$ dovendo essere estesi fra i limiti della massa del sistema non sono in realtà che sei numeri, chiamiamoli, per abbreviare le formole, A, B, C, D, E, F. sarà

$$\Sigma = (\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2 q)A + (\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2 q)B + \cos^2 q \cdot C - 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos^2 q \cdot D$$
$$- 2\cos\varphi \operatorname{sen} q \cos q \cdot E - 2\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} q \cos q \cdot F.$$

Questa formola risolve il problema, poichè qualunque non contenga S, tuttavia questo non potendo congiungersi che col cangiare la posizione del sistema rotante nello spazio esso è contenuto implicitamente in A, B, ed è = A+B.
Questa formola contiene inoltre i momenti del sistema rispetto agli assi OX, OY, e gli integrali D, E, F.
Esaminiamo adesso come varii Σ facendo variare φ, q.

Σ è sempre positivo e sempre finito, cioè non è mai nè zero, nè infinito, gustiamo quindi cercare qual sarà il sistema di valori di φ e di q, che rende Σ massimo o minimo. Perciò bisogna, che differenziamo Σ rispetto a φ, e rispetto a q, e che poniamo quindi $\left|\frac{d\Sigma}{d\varphi}\right| = 0$, $\left|\frac{d\Sigma}{dq}\right| = 0$; seguendo tali differenziazioni hanno le equazioni seguenti;

$$A\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos q - B\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos q - D\cos q(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) + E\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} q - F\cos\varphi\operatorname{sen} q\cos q = 0$$

(1)

$$A\cos^2\varphi\operatorname{sen} q\cos q + B\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen} q\cos q - C\operatorname{sen} q\cos q + 2D\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen} q\cos q - E\cos\varphi(\cos^2 q - \operatorname{sen}^2 q) - F\operatorname{sen}\varphi(\cos^2 q - \operatorname{sen}^2 q) = 0.$$

Tra queste equazioni facendo debitamente l'eliminazione di q trovasi una equazione della forma $G\tan g^3\varphi + H\tan g^2\varphi + K\tan g\varphi + L = 0$, che essendo di 3° grado ha necessariamente una radice reale. Ciò vuol dire, che Σ vi ha un momento massimo o minimo, ma de ve ne ha uno massimo o minimo ve ne sarà necessariamente uno minimo o massimo, poichè Σ è sempre positivo e finito, questo Σ minimo o massimo dovrà ancora esser dato dalla stessa equazione, ma se una equazione di 3° grado ha due radici reali ha anche reale la terza, [illegible] l'equazione

finale trovata ha dunque le tre radici reali. Di queste tre radici reali una dà il valor mass. di Σ, l'altra dà il minimo, la 3ª darà né un massimo né un minimo, ma soltanto tale che, sostituita nelle equazioni $\left(\frac{d\Sigma}{d\varphi}\right)=0$, $\left(\frac{d\Sigma}{dq}\right)=0$, le soddisferà, l'asse corrispondente a questa radice si chiama l'asse medio del momento medio.

Questi assi e gli altri due assi a cui corrispondono Σ massimo e Σ minimo si chiamano

Assi principali rispetto al punto O.

Lezione 36ª

Nel valore di Σ sono contenuti, come già accennammo, i tre momenti d'inerzia rispetto ai tre assi primitivi Oz, OX, OY, che denoteró con ~~le tale~~ i simboli S_z, S_y, S_{xc} e sono

$$S_z=\int(x^2+y^2)\,dM=A+B \quad , \text{ e i tre integrali definiti } \int xy\,dM=D,\ \int xz\,dM=E,\ \int yz\,dM=F,$$

$$S_y=\int(x^2+z^2)\,dM=A+C$$

$$S_x=\int(y^2+z^2)\,dM=B+C$$

Conoscendo dunque A, B, C, D, E, F si può passare dai momenti rispetto ad un sistema di assi ai momenti rispetto agli assi principali, o rispetto ad altri assi, ci resta a vedere cosa sieno D, E, F rispetto agli assi principali per poter passare dai momenti rispetto agli assi principali ad altri momenti qualsiasi.

Perciò sostituiamo negli integrali $\int x'y'\,dM$, $\int x'z'\,dM$, $\int y'z'\,dM$ invece di x', y', z' i loro valori in ρ, q

troviamo che $\int x'y'\,dM = A\,\mathrm{sen}\rho\cos\rho\,\mathrm{sen}q - B\cos\rho\,\mathrm{sen}\rho\,\mathrm{sen}q - D[\cos^2\rho\,\mathrm{sen}q - \mathrm{sen}^2\rho\,\mathrm{sen}q] - E\,\mathrm{sen}\rho\cos q + F\cos\rho\cos q$

$$= \frac{1}{\tan q}\left[\frac{d\Sigma}{d\rho}\right]$$

(1). $\int x'z'\,dM=\frac{1}{2\,\mathrm{sen}q}\cdot\left[\frac{d\Sigma}{d\rho}\right]$. (2). $\int y'z'\,dM=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{d\Sigma}{dq}\right]$, ora $\left(\frac{d\Sigma}{d\rho}\right)=0$, $\left[\frac{d\Sigma}{dq}\right]=0$,

Dunque quando l'asse delle z' è un'asse principale come nel nostro caso ~~ecc~~

$E=\int x'z'\,dM=0$, $F=\int y'z'\,dM=0$.

Per rendere la proposizione generale resta da far girare gli assi delle x' e delle y' attorno all'asse

delle Σ', poichè sinora non abbiamo fatto girare il sistema primitivo che attorno agli assi OZ, OX'', ora variando in questo modo il sistema, e chiamando x'', y'', z'' le coordinate del punto x', y', z' rispetto ai nuovi assi, le ~~formule che danno x'', y'', z'' per x', y', z' sono della forma~~ $\begin{cases} x'' = hx' + Ky' \\ y'' = ix' + ly' \\ z'' = z' \end{cases}$

~~Dunque $\int x'' y'' dM = i \int y' z' dM +$~~

le formule che danno x'', y'', z'' per x', y', z' ~~abbiamo~~ sono della forma

$\begin{cases} x'' = hx' + Ky' \\ y'' = ix' + ly' \\ z'' = z' \end{cases}$, dunque $\int x'' z'' dM = \int x' z' dM = h \int x' z' dM + K \int y' z' dM = 0$

e $\int y'' z'' dM = \int y' z' dM = i \int x' z' dM + l \int y' z' dM = 0$

Da questo teorema risulta che se uno degli altri due assi per es.° l'asse delle y'' è anche principale, anche l'asse delle x'' è asse principale.

Infatti se l'asse delle y'' è asse principale oltre alle equazioni $\int x'' z'' dM = 0$ $\int y'' z'' dM = 0$ avrà ancora l'altra $\int x'' y'' dM = 0$, ora quando un'asse per es.° OZ' è tale, che $\int x'' z' dM = 0$, $\int y'' z' dM = 0$ esso è principale, poichè dalle equazioni (1), (2) risulta allora $\left(\frac{d\Sigma}{dp}\right) = 0$, $\left(\frac{d\Sigma}{dq}\right) = 0$, dunque l'asse delle x'' per cui $\int x'' z'' dM = 0$, $\int x'' y'' dM = 0$, è un'asse principale.

Supponiamo adesso, che abbiamo fatto il sistema primitivo in modo, che l'asse delle Z sia già un'asse principale e proponiamoci di trovare gli altri due assi principali.

L'asse delle Z essendo asse principale abbiamo $\left.\begin{matrix} \int xz\, dM = 0 \\ \int yz\, dM = 0 \end{matrix}\right\}$ ossia $\left.\begin{matrix} D = 0 \\ E = 0 \end{matrix}\right\}$,

e quindi le equazioni (1) più semplici, (Lez.ne 35ª),

$\left.\begin{matrix} 2(A-B)\operatorname{sen} p \cos p \cos q - 2F' \cos p \operatorname{sen} q \cos q = 0 \\ (A\cos^2 p + B\operatorname{sen}^2 p - C)\operatorname{sen} 2q - 2F \operatorname{sen} p \cos 2q = 0 \end{matrix}\right\}$ queste equazioni ci danno i valori di p e q che determinano gli altri

due assi principali, ora il solo modo di soddisfare convenientemente al problema è di fare $\cos p = 0$, il che da $p = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tang} 2q = \frac{2F}{B-A}$; questo risultato dimostra, che quando un'asse è principale i suoi due compagni sono ad esso perpendicolari, e che essi fanno colla loro proiezione su di un stesso piano xOy due angoli i cui doppii hanno la stessa tangente, ora questi angoli sono uno complemento dell'altro, le proiezioni dei due assi sul piano xOy sono per l'uno Oy, per l'altro il prolungamento di Ox, dunque i due assi sono perpendicolari uno all'altro. Dunque i tre assi principali di qualunque corpo sono dotti per qualunque punto sono tra loro perpendicolari.

Nella maggior parte dei corpi, che avremo a considerare, uno o due o tre assi principali si conoscono senza calcolo.

Basta infatti osservare, che se un corpo omogeneo è simmetrico intorno ad un'asse, quest'asse è un'asse principale, poiché se lo prendiamo per asse delle x, e prendiamo due elementi del corpo i quali sieno situati a egual distanza da esso, a questi elementi corrisponderanno le coordinate x, y, z e $x, -y, -z$, e per conseguenza nella somma $\int xz\,dM$, $\int xy\,dM$ ci sarà un termine $xz\,dM$ o $xy\,dM$ ve ne sarà un'altro $-xz\,dM$, o $-xy\,dM$ che lo distrugge, e comprenderemo subito, che

I tre assi principali che passano pel centro di una elissoide omogenea sono i tre assi di figura,

I tre assi principali che passano pel centro di figura di un parallelepipedo rettangolo ed omogeneo sono i tre assi di figura,

I tre assi principali di un cilindro omogeneo retto e la cui base è simmetrica rispetto a due rette tirate nel suo piano sono le due rette e l'asse del cilindro,

I tre assi principali di un solido di rivoluzione sono l'asse di figura, e due rette qualunque ad esso perpendicolari, ecc. ecc.

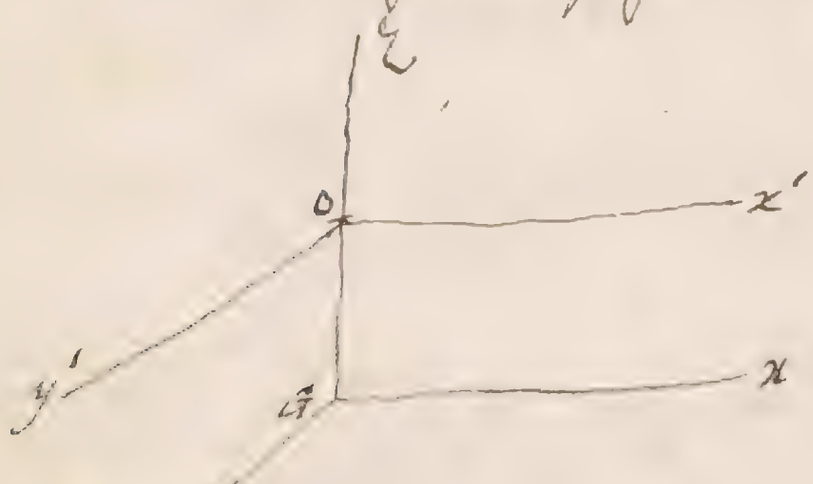
Esiste ancora un'altro teorema, che ci da una infinità di assi principali di un corpo quando si conoscono gli assi principali che passano pel suo centro di gravità, ed è:

Quando di un corpo si conoscono gli assi principali ~~rispetto~~ condotti pel suo centro di gravità, per un punto qualunque di uno di questi assi se ne tirano due parallele agli altri due assi, queste due parallele e l'asse che passa per quel punto sono ancora assi principali.

Per dimostrare questa verità supponiamo che G sia il centro di gravità, e Gx, Gy, Gz sieno gli assi principali che passano per questo centro, sarà perciò

$$\int xy\,dM = 0, \quad \int xz\,dM = 0, \quad \int yz\,dM = 0.$$

per un punto qualunque O, pel quale di Gz si tirino Ox', Oy' parallele



di Gx, Gy, se facciamo OG = a, e chiamiamo x', y', z' le coordinate di un punto (x, y, z) rispetto agli assi Ox', Oy', Oz sarà x' = x, y' = y, z' = z − a, e quindi

$$\int x'y'\,dM = \int xy\,dM = 0$$

$$\int x'z'\,dM = \int xz\,dM - a\int x\,dM$$

$$\int y'z'\,dM = \int yz\,dM - a\int y\,dM$$

, ma poichè G è il centro di gravità $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, dunque

$$\int x'y'\,dM = 0, \quad \int x'z'\,dM = 0, \quad \int y'z'\,dM = 0,$$

Dunque Oz, Ox', Oy' sono tre assi principali.

Premesso tutto ciò vediamo quale sia la formola, che ci da il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un'asse, che fa coll'assi principali condotti per un suo punto gli angoli f, g, h, quando si conoscono i momenti d'inerzia S_z S_y S_x del sistema rispetto ai detti assi principali.

Prendiamo per assi iniziali i tre assi principali, sarà per questi assi $D=0, E=0, F=0$, e la equazione (pag.a 159) che da Σ diventerà

$$\Sigma = A(\operatorname{sen}^2\rho + \cos^2\rho \operatorname{sen}^2 q) + B(\cos^2\rho + \operatorname{sen}^2\rho \operatorname{sen}^2 q) + C\cos^2 q .$$

Nel nostro caso $A+B = S_z$ $\quad \cos h = \operatorname{sen} q$

$A+C = S_y$ $\quad \cos g = \cos q \operatorname{sen}\rho$

$B+C = S_x$ $\quad \cos f = \cos\rho \cos q$. Dunque

$$A = \frac{S_z + S_y - S_x}{2} , \quad B = \frac{S_z + S_x - S_y}{2} , \quad C = \frac{S_x + S_y - S_z}{2} ,$$

$\operatorname{sen} q = \cos h$, $\cos q = \operatorname{sen} h$, $\operatorname{sen}\rho = \dfrac{\cos g}{\operatorname{sen} h}$, $\cos\rho = \dfrac{\cos f}{\operatorname{sen} h}$, e finalmente

$$2\Sigma = \left(S_z + S_y - S_x\right)\left(\frac{\cos^2 g}{\operatorname{sen}^2 h} + \frac{\cos^2 f \cos^2 h}{\operatorname{sen}^2 h}\right) + \left(S_z + S_x - S_y\right)\left(\frac{\cos^2 f}{\operatorname{sen}^2 h} + \frac{\cos^2 g \cos^2 h}{\operatorname{sen}^2 h}\right) + \left(S_x + S_y - S_z\right)\operatorname{sen}^2 h$$

$$= S_x\left(\operatorname{sen}^2 h + \frac{\cos^2 f + \cos^2 g \cos^2 h - \cos^2 g - \cos^2 f \cos^2 h}{\operatorname{sen}^2 h}\right) + S_y\left(\operatorname{sen}^2 h - \frac{\cos^2 f + \cos^2 g \cos^2 h - \cos^2 g - \cos^2 f \cos^2 h}{\operatorname{sen}^2 h}\right)$$

$$+ S_z\left(-\operatorname{sen}^2 h + \frac{\cos^2 f + \cos^2 g \cos^2 h + \cos^2 g + \cos^2 f \cos^2 h}{\operatorname{sen}^2 h}\right)$$

$$= S_x\left(\operatorname{sen}^2 h + \cos^2 f - \cos^2 g\right) + S_y\left(\operatorname{sen}^2 h - \cos^2 f + \cos^2 g\right) + S_z\left(\frac{-\operatorname{sen}^4 h + (1+\cos^2 h)(\cos^2 f + \cos^2 g)}{\operatorname{sen}^2 h}\right)$$

poichè $\cos^2 f + \cos^2 g + \cos^2 h = 1$ $\quad \operatorname{sen}^2 h = 1 - \cos^2 h$

$$2\Sigma = 2 S_x \cos^2 f + 2 S_y \cos^2 g + 2 S_z \cos^2 h , \quad \Sigma = S_x \cos^2 f + S_y \cos^2 g + S_z \cos^2 h .$$

Il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un asse principale chiamiamolo momento principale, la formola che abbiamo trovata ci insegna che per conoscere il momento d'inerzia di qualunque corpo rispetto a qualunque asse basta conoscere i momenti d'inerzia principali, e che se di costruisce un ellissoide coi tre assi degli

assi principali ed inversamente proporzionali alle radici quadrate dei momenti principali, la parte dell'asse dato compresa tra il centro e la superficie dell'ellissoide è inversamente proporzionale alla ~~radice~~ del momento ricercato.

Lezione 37ª

Facciamo alcuni esempi di ricerche di momenti d'inerzia di corpi di cui si conoscono i momenti principali:

1° Sia un parallelepipedo rettangolo pel centro si conducono tre assi principali che sono i tre assi ~~principali~~ di figura. Si conoscono i tre momenti principali corrispondenti ai tre lati del parallelepipedo a.b.c;

$$\frac{S}{x} = \frac{1}{12} M(b^2+c^2)$$

$$\frac{S}{y} = \frac{1}{12} M(a^2+c^2)$$

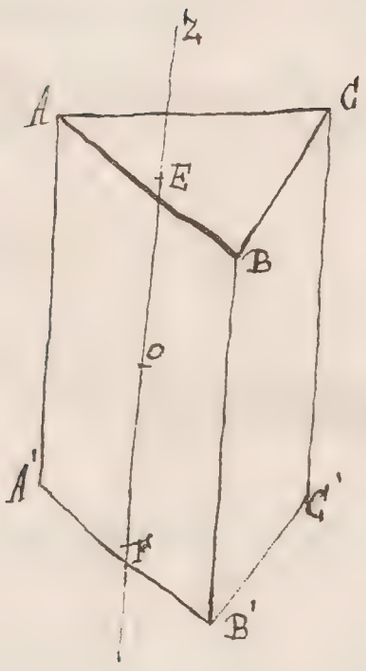
$$\frac{S}{z} = \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$$

si domanda il momento d'inerzia dello stesso parallelepipedo rispetto alla diagonale del parallelepipedo.

In questo caso $\cos^2 f = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\cos^2 g = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\cos^2 h = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$,

epperò $\Sigma = \frac{1}{12} \cdot \frac{M}{a^2+b^2+c^2} \left\{ a^2(b^2+c^2) + b^2(a^2+c^2) + c^2(a^2+b^2) \right\}$

$$= M \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$



Di un prisma triangolare son dati i spigoli $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $AA'=d$ ed una retta EF parallela allo spigolo AA' si domandano gli assi principali del prisma che passano pel punto di mezzo O di EF.

Per O conduciamo un piano perpendicolare ad OE, ed in esso piano conduciamo due assi OX, OY, e riferiamo il prisma agli assi Ox, Oy di OE preso per asse delle z, evidentemente sarà $\int xz\,dM = 0$, $\int yz\,dM = 0$, Oz è dunque un'asse

principale. Gli altri due assi principali saranno nel piano delle xy; per rinvenirli abbiamo la formola $\tang 2p = \frac{2D}{A-B}$, nella quale p è l'angolo, che un'asse principale fa coll'asse delle x, D è $= \int xy\,dM$, $A = \int x^2 dM$, $B = \int y^2 dM$. Avuto così un valore di p si avrà un secondo asse principale, il 3° sarà perpendicolare a questo.

Vi sono dei corpi, che hanno degli assi principali, rispetto a cui i momenti d'inerzia sono due o tre eguali; per es° in un cilindro circolare retto in cui sono assi principali l'asse del cilindro, e due diametri della base perpendicolari tra di loro i momenti d'inerzia rispetto al 2° ed al 3° asse sono eguali, in una sfera i tre momenti rispetto a tre assi principali condotti nel centro sono eguali, così in un cubo ed in generale in tutti i solidi che sono divisi dai tre piani ortogonali che contengono gli assi principali in otto parti eguali e simmetriche rispetto ai tre assi i tre momenti principali sono eguali, vediamo cosa diventi Σ_1 in questi casi;

sia 1° $S_x = S_y$ sarà $\Sigma_1 = S_x(\cos^2 f + \cos^2 g) + S_z \cos^2 h$, e perchè $\cos^2 f + \cos^2 g = 1 - \cos^2 h = \sen^2 h$,

$$\Sigma_1 = S_x \sen^2 h + S_z \cos^2 h$$

questa formola è indipendente da f e da g, e le rette corrispondenti una superficie conica, la cui generatrice fatta l'angolo h coll'asse delle z, rispetto a tutte le generatrici di questa superficie il momento è lo stesso; se $h = 90°$ allora $\sen h = 1$, $\cos h = 0$, e $\Sigma_1 = S_x = S_y$, cioè se in un corpo due momenti principali sono eguali, nel piano degli assi principali rispetto ai quali i momenti sono eguali ogni retta è asse principale. Dunque nel circolo, nel quadrato qualunque retta si conduca nel loro centro il loro momento d'inerzia rispetto a tal retta è sempre lo stesso.

2° Sia $S_x = S_y = S_z$ sarà $\Sigma_1 = S_x = S_y = S_z$, dunque in un corpo i tre momenti principali sono eguali a qualunque asse tirato per lo stesso punto in cui si incontrano gli assi dei momenti eguali corrispondono momenti d'inerzia eguali, e qualunque di questi assi è asse principale.

Ritorniamo al problema, che ci condusse a queste ricerche sui momenti d'inerzia. Questo problema era quello della ricerca delle percosse che sostengono i perni di un sistema quando a questo si dà un'impulso, e delle pressioni che soffrono i perni stessi quando il sistema rota intorno ad essi quabilmente, abbiamo trovate allora (pag.ª 155-156) queste formole per le percosse

$$P+P'-\omega M Y=0 \qquad q\zeta+q'\zeta'+\omega\int x\zeta\,dm=0$$

$$Q+Q'-F'+\omega M X=0 \qquad P\zeta+P'\zeta'-\omega\int y\zeta\,dm=0$$

ci eravamo arrestati perchè non conoscevamo la natura degli integrali $\int x\,dm$, $\int y\zeta\,dm$, ora che questi integrali li conosciamo, cioè sappiamo donde provengono, in quali casi essi siano nulli, ecc. analizziamo un poco queste formole.

Primieramente cominciamo a ricercare se sia possibile di dare all'urto un'impulso in modo tale, che i perni non soffrano scossa, perciò facciamo nelle formole $P=0$, $P'=0$, $Q=0$, $Q'=0$, e vedremo quali condizioni ne risultino. Le equazioni risultanti sono $\omega M Y=0$ $\omega\int x\zeta\,dm=0$ le due ultime $\omega M X=F$ dicono, che l'asse di rotazione $\omega\int y\zeta\,dm=0$ deve essere asse principale rispetto al punto in cui esso è incontrato dal piano della percossa, la 1ª dice che il centro di gravità deve essere nel piano meridiano perpendicolare alla direzione dell'impulso, finalmente la 2ª dice, che $X=\frac{F}{M\omega}$, x è la distanza del centro di gravità dall'asse di rotazione, siccome a questa distanza, poste le condizioni basta per ottenere la percossa del centro togliamole il nome x, che suppone sempre un y ed un z, e chiamiamola K, avremo $K=\frac{F}{M\omega}$, ma la distanza dall'asse del punto ove è

applicata la percossa abbiamo $\omega = \frac{Fa}{S}$, S essendo il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. Dunque $K = \frac{FS}{MFa} = \frac{S}{Ma}$, ora quando si domanda come si debba dare un'impulso perchè la percossa sofferta dai cardini sia nulla, la quantità incognita è a, quest'ultima equazione ci da $a = \frac{S}{MK}$.

Il momento S si può sempre esprimere col prodotto Mh^2, h essendo una certa linea, che i primi Geometri che studiarono queste cose chiamarono raggio di giazione, e che è evidentemente la distanza, alla quale bisognerebbe concentrare tutta la massa del corpo perchè il momento rispetto all'asse di rotazione non cangiasse, sostituiamo Mh^2 ad S nella

$$a = \frac{h^2}{K}.$$

Il punto a cui si deve applicare l'impulso affinchè non produca azione sui perni si chiama Centro di percossa.

Da tutto quello che finora si è detto risulta che se l'asse di rotazione non è asse principale non havvi Centro di percossa, e che per determinarlo quando l'asse di rotazione è asse principale bisogna pel Centro di gravità del sistema e per l'asse condurre un piano, pel punto rispetto al quale l'asse è principale condurre un piano perpendicolare all'asse questo sarà il piano della percossa, la sua direzione sarà perpendicolare al piano condotto pel centro di gravità ed alla distanza a dall'asse, (il punto in cui questa direzione incontra il piano del centro di gravità) sarà il Centro di percossa.

[illegible]

Corollario. La distanza a del centro di percossa dall'asse è sempre maggiore della distanza K del centro di gravità dall'asse.

Infatti se A sia il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un'asse condotto pel centro di gravità parallelamente all'asse di rotazione, sarà $S = A + MK^2$, ma $a = \frac{S}{MK}$, dunque

$a = \frac{A}{MK} + K$ e per conseguenza $a > K$.

Lezione 38ª.

Se l'asse di rotazione passa per centro di gravità, allora $K=0$, $F=0$, $x=\infty$, non vi è dunque ~~possibile~~ in questo caso centro di percossa.

Supponiamo applicati al sistema due impulsi, e supponiamoli paralleli; chiamo le loro intensità F F', da, a' le loro distanze dall'asse di rotazione, per determinare gli sforzi sostenuti dai cardini avremo le equazioni

~~$p+p'+\omega\int y\,dm=0$~~

$$p+p'-\omega My=0 \qquad p\zeta+p'\zeta'-\omega\int yz\,dm=0$$

$$q+q'-F-F'+\omega MX=0 \qquad q\zeta+q'\zeta'+\omega\int xz\,dm=0$$

} e per determinare la velocità angolare ω con cui prende a muoversi il

sistema $\omega = \frac{Fa+F'a'}{S}$. In queste formole facendo $p=0$, $p'=0$, $q=0$, $q'=0$ abbiamo le condizioni $y=0$, $F+F'=\omega MX$, $-\int yz\,dm=0$, $\int xz\,dm=0$ perchè i punti non soffrano scossa. Le due ultime condizioni dicono, che l'asse di rotazione deve essere asse principale rispetto al punto in cui esso è incontrato dal piano delle percosse, la 1ª dice, che il centro di gravità deve essere nel piano meridiano perpendicolare alla direzione delle percosse, alla 2ª equazione si può soddisfare in più modi; facendo $X=0$, resta $F=-F'$, dunque in questo caso anche quando l'asse passa pel centro di gravità si potranno dare al sistema gli impulsi in modo tale, che i punti non soffrano scossa, e perciò bisogna che i due impulsi facciano una coppia.

Esaminiamo ancora se nel caso di un solo impulso sia possibile di darlo in modo, che un punto soltanto sopporti sforzi, ossia che sia $p=0$, $q=0$, ma non $p'=0$, $q'=0$.

Le equazioni che rispondono a questa questione sono le seguenti;

$p' = \omega M y$ $\quad p'\zeta' = \omega \int y z\, dm$, $\omega = \frac{Fa}{S}$; queste equazioni sono soddisfatte dagli

$q' = F - \omega M x$ $\quad q'\zeta' = -\omega \int x z\, dm$ stessi valori di p', q' se si verifica la

equazione di condizione $My\zeta' - \int yz\, dm = 0$, e se $a = \frac{S\zeta'}{Mx\zeta' - \int xz\, dm}$.

Passiamo ora all'altro problema, che già abbiamo messo in equazione di quello della determinazione delle pressioni che i perni sostengono quando un sistema rota egualmente intorno ad un'asse con velocità angolare ω.

Le equazioni del problema, chiamando π, π'; $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ le pressioni sofferte dai cardini, sono

$\pi + \pi' = \omega^2 \int x\, dm = \omega^2 M x$, $\pi\zeta + \pi'\zeta' = \omega^2 \int xz\, dm$

$\mathcal{X} + \mathcal{X}' = \omega^2 \int y\, dm = \omega^2 M y$ $\quad \mathcal{X}\zeta + \mathcal{X}'\zeta' = \omega^2 \int yz\, dm$.

Se vogliamo che le pressioni sui cardini sieno nulle, bisognerà che sieno soddisfatte le condizioni

$x = 0$, $y = 0$, $\int xz\, dm = 0$, $\int yz\, dm = 0$, dunque girando l'asse intorno a cui rota con moto eguabile un sistema è uno degli assi principali che passano pel centro di gravità del sistema allora la forza centrifuga non fa soffrire alcun sforzo ai perni.

Se l'asse di rotazione è bensì un'asse principale, ma non passa pel centro di gravità allora le equazioni, che determinano le pressioni sui perni, sono

$\pi + \pi' = \omega^2 M x$, $\pi\zeta + \pi'\zeta' = 0$; siccome i cardini possiamo considerarli posti dovunque

$\mathcal{X} + \mathcal{X}' = \omega^2 M y$, $\mathcal{X}\zeta + \mathcal{X}'\zeta' = 0$ sull'asse di rotazione, supponiamo, che uno di essi sia

sul piano delle xy, e sia per y^o $\zeta = 0$, avremo allora $\pi' = 0$, $\mathcal{X}' = 0$, $\pi = \omega^2 M x$, $\mathcal{X} = \omega^2 M y$;

queste equazioni dicono, che il solo perno, il quale è sul piano delle xy sostiene una pressione $= \omega^2 M X$

chiamando X la distanza del centro di gravità dall'asse che è $= \sqrt{x^2 + y^2}$.

Diamo a questa formola una interpretazione meccanica; se tutta la massa fosse raccolta nel

centro di gravità la forza centrifuga di questo sarebbe $= M\omega^2 K$, la pressione sul perno dunque è la stessa, che eserciterebbe tutta la massa raccolta nel centro di gravità e rotante con velocità angolare ω.

Da tutto quanto abbiamo detto raccogliamo ancora, che ~~non~~ non è possibile di dare ad un sistema un'impulso in modo, che i perni non soffrano scossa al principio del moto e non soffrano pressioni durante il moto, e che si adempia a queste due condizioni mettendo il sistema in movimento per mezzo di due percosse eguali e di segno contrario.

Raccogliamo inoltre, che quando un sistema rigido prende a rotare intorno ad uno dei suoi assi principali il quale non passa pel centro di Gravità le forze attuali si riducono ad una risultante unica e questa passa pel centro di percossa.

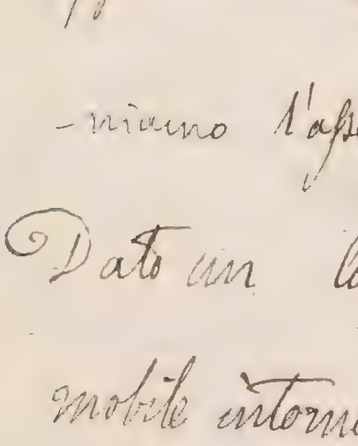
Quest'ultimo teorema è facile a dimostrarsi -

Infatti quando un sistema rota intorno ad uno dei suoi assi principali, il quale non passa pel centro di gravità havvi in quel sistema centro di percossa, e si può benissimo supporre, che desso sia in moto per cagione di un'impulso iniziale dato nel centro di percossa, perchè ogni piano normale all'asse e normalmente a qualunque piano meridiano vi si dato l'impulso non vieta anzi la velocità angolare $\omega = \frac{Ia}{S}$: ora quando si dà ad un sistema un'impulso nel centro di percossa, i perni non soffrono veruna scossa, non vi ha forza perduta, e l'impulso si impiega tutto a produr movimento, ossia equivale alle forze attuali; le forze attuali equivalendo ad un'impulso unico dato nel centro di percossa, ~~fa~~ hanno dunque una risultante unica che passa pel punto fissato.

Lezione 39.ª

Resta a considerarsi il moto rotatorio di un corpo a cui sono applicate delle forze motrici, ma non giacciono di molti ragionamenti per trovare le equazioni di questo movimento. Basta infatti che nelle formole trovate pel caso del sistema solante in virtù di un' impulso iniziale unico si sostituisca al valore di w ad aF la somma dei momenti di rotazione delle forze motrici rispetto all'asse del sistema, e nei valori delle pressioni N, N', X, X' sofferte dai cardini sostituire ad w il suo nuovo valore con questa avvertenza, che per questo nuovo valore non si intende il risultato della sostituzione in $w = \frac{aF}{S}$ della somma dei momenti di rotazione delle forze motrici ad aF, ma bensì la velocità, che a ciascun intervallo di tempo piccolissimo dt, prende l'incremento $dw = \frac{aF}{S} dt$, in cui con aF rappresento la somma dei momenti di rotazione delle forze motrici.

Applichiamo la formola $\frac{dw}{dt} = \frac{aF}{S}$ al caso dei corpi gravi. Per fare il caso più semplice supponiamo l'asse di rotazione del sistema orizzontale, il problema si enuncia allora così — Dato un corpo qualunque continuo o discontinuo, omogeneo o non omogeneo, mobile intorno ad un'asse orizzontale ed impresso al corpo un' impulso, oppure abbandonato il corpo all' azione della gravità in una posizione non d'equilibrio determinare le leggi del moto di un tal corpo.



Rappresenti O G H una sezione fatta nel corpo verticalmente e pel centro di gravità, sia O il punto in cui questa sezione incontra l'asse, e la verticale condotta per O passa pel centro di gravità G, il corpo è in una posizione d'equilibrio, ma se togliamo il corpo da questa posizione esso prenderà

in virtù della forza di gravità a dondolare di qua e di là dalla posizione d'equilibrio, ossia dalla verticale OZ. Per determinare le leggi di questo moto osserviamo che in questo caso le forze motrici sono tante quante le molecole del corpo e sono tutte parallele fra loro, ed hanno una risultante unica eguale al peso del corpo, applicata nel centro di gravità, e diretta verticalmente.

Ciò posto sia g la posizione del centro di gravità, quando il corpo è rimosso dalla sua posizione d'equilibrio, sarà la verticale Hg la direzione della forza motrice del nostro sistema, e se M rappresenta la massa di questo sarà $dF = Mg.OH$; ora OH è variabile e varia col variare dell'angolo GOg, l'angolo GOg è la distanza $OG = Og$ chiamiamoli φ, K, siccome $OH = K \operatorname{sen}\varphi$, sarà

$dF = Mg.K\operatorname{sen}\varphi$, e $\frac{dw}{dt} = \frac{gMK\operatorname{sen}\varphi}{S}$.

Questa è la equazione differenziale del moto del pendolo composto.

assolutamente $w = \frac{d\varphi}{dt}$, ma siccome crescendo t diminuisce φ, perciò scriviamo $w = -\frac{d\varphi}{dt}$, avremo $\frac{dw}{dt} = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, e quindi $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{gMK\operatorname{sen}\varphi}{S}$.

Questa equazione integrata ci da φ ed w in funzione di t, avvertendo di determinare le costanti arbitrarie in modo che $dal\ t = 0$ corrisponda $\varphi = \alpha$, ed $w = \Omega$, se α sia l'angolo iniziale di Og con OZ ed Ω la velocità iniziale impressa al corpo che noi abbiamo supposta nulla. Ma non abbiamo bisogno di fare questa integrazione, poichè l'abbiamo già fatta una volta pel pendolo semplice; l'equazione differenziale del moto del pendolo semplice è infatti

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\varphi$, essendo l la lunghezza del pendolo.

Le così il pendolo semplice di lunghezza l, come il nostro pendolo composto sono soggetti alle condizioni iniziali, Siccome così l, come $\frac{S}{MK}$ sono costanti, le equazioni del moto di due pendoli saranno le stesse se invece di l sostituiremo nella equazione del pendolo semplice $\frac{S}{MK}$; Se dunque prendiamo due pendoli uno semplice, l'altro composto, e prendiamo il pendolo semplice di lunghezza $OQ = \frac{S}{MK}$, e li facciamo oscillare insieme, oscilleranno con le stesse leggi.

Sia Q il punto tale, che $OQ = \frac{S}{MK}$, detto oscillerà come se tutta la massa fosse in Q ossia come se fosse solo; Questo punto si chiama centro d'oscillazione.

N.B. Prima di leggere - Questo punto si chiama... Dei centri d'oscillazione ... una infinità ---. La formola che determina la distanza ---... Quindi l'asse dei centri d'oscillazione ---

La formola che determina la distanza dell'asse dei centri di oscillazione dall'asse di sospensione determina il centro di percossa, dunque, quando esiste in una sistema pesante mobile intorno ad un asse orizzontale un Centro di percossa, esso è sull'asse dei centri d'oscillazione.

I centri d'oscillazione in un pendolo composto vi sono una infinità, che sono tutti situati sulla retta parallela all'asse a distanza $\frac{S}{MK}$ da questo; questa retta è detta asse dei Centri di Oscillazione. Quindi l'asse dei Centri di oscillazione è sempre più lontano dall'asse di sospensione che il centro di gravità.

Facciamo un' esempio. Una linea senza peso, porta due masse di volume insensibile, sono M, M' Si attacca questa linea ad un punto fisso O tale che $OM = a$, $OM' = a'$, si fa oscillare questo sistema intorno al punto O, si domanda la durata di una oscillazione di questo pendolo

Sostituiamo a questo pendolo un pendolo semplice di lunghezza $l = \frac{Ma^2 + M'a'^2}{Ma + M'a'}$, la durata delle oscillazioni di questi pendoli essendo la stessa, la durata della oscillazione del pendolo proposto sarà $\frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}} = \frac{\pi\sqrt{\frac{Ma^2 + M'a'^2}{Ma + M'a'}}}{\sqrt{g}}$.

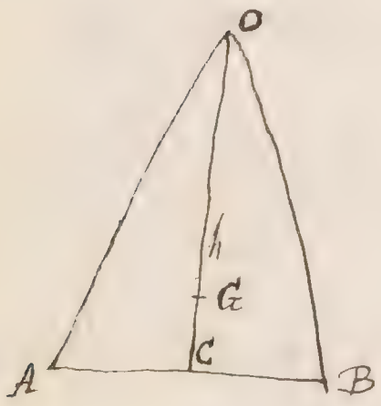
Da questa formola vediamo, che volendo fare un pendolo tale che la durata delle sue oscillazioni sia grandissima basta che una delle masse per es. M' la attacchiamo al disotto del punto O; infatti allora $\frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}} = \frac{\pi\sqrt{Ma^2 + M'a'^2}}{\sqrt{(Ma - M'a')g}}$, e questa frazione diventa tanto più grande quanto più M'a' s'avvicina ad Ma; quando M'a' = Ma, la durata diventa infinita, vi ha infatti in tal caso equilibrio tra le due masse; se M'a' > Ma, la durata diventa immaginaria, e ciò perchè in questo caso il pendolo si rovescia, e la massa M' viene a porsi al disotto del punto O, e si mette a oscillare intorno ad O senza più risalire.

Possiamo ancora proporci quest'altro problema relativo allo stesso pendolo. Le masse M, M' sono da una stessa parte del disotto del punto O di sospensione, il pendolo è nella posizione d'equilibrio, gli do un' impulso agente di fuori imprimendogli la velocità Ω, potranno avvenire due casi, o il pendolo si solleverà fino ad una certa altezza donde cadrà mettendosi ad oscillare intorno ad O, oppure passerà il colmo e discenderà dall' altra parte prendendo un moto di rotazione intorno al punto O nel piano verticale di OMM', si domanda Data Ω, se il pendolo dondolerà o roterà intorno ad O.

La risposta è evidente, se $\Omega < \sqrt{2g \cdot 2l}$ il pendolo dondolerà, se $\Omega > \sqrt{2g \cdot 2l}$ il pendolo roterà, se $\Omega = \sqrt{2g \cdot 2l}$ il pendolo salirà fino al colmo, ma [redacted] dopo un tempo infinito.

Altro Esempio.

Un cono circolare, retto, pesante omogeneo può oscillare intorno ad un'asse orizzontale di sospensione, che passa pel suo vertice. Si domanda la durata delle oscillazioni minime di questo pendolo, e la durata della salita sino al colmo, quando la velocità iniziale del pendolo è $> \sqrt{2g \cdot 2l}$.



Sia OAB una sezione fatta nel cono normalmente all'asse di sospensione, sia h l'altezza del cono, r il raggio, M la massa, sarà $S = \frac{3}{10} Mr^2 + \frac{3}{8} Mh^2$, $MK = \frac{3}{4} Mh$, e per conseguenza la lunghezza del pendolo semplice le cui oscillazioni sono isocrone a quelle del pendolo proposto sarà

$$l = \frac{\frac{3}{10} r^2 + \frac{3}{8} h^2}{\frac{3}{4} h} = \frac{5r^2 + 16h^2}{20h}.$$

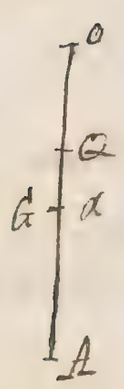
ciò posto la durata di una oscillazione minima è

$$t = \frac{\pi \sqrt{\frac{5r^2 + 16h^2}{20h}}}{\sqrt{g}},$$

e la durata della salita dello stesso pendolo sino al colmo, quando gli si dà un'impulso capace di imprimergli una velocità maggiore di $\sqrt{2g \cdot 2l}$, ossia dovuta ad un'altezza $H > 2l$, è, se il pendolo inizialmente era nella posizione d'equilibrio

$$t = \frac{\pi l}{\sqrt{2Hg}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2l}{H} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{2l}{H}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{2l}{H}\right)^3 + \cdots \right].$$

Cerchiamo ancora il Centro d'oscillazione di qualche linea e figura geometrica pesante omogenea.

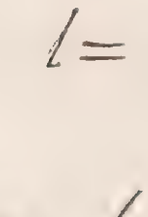


Una retta pesante omogenea di lunghezza a sospesa ad un'asse orizzontale che passa per una sua estremità O ha il suo momento d'inerzia rispetto a quest'asse, che è $S = \frac{1}{3} Ma^2$, M essendo la massa della retta, ed il momento di rotazione della massa intorno all'asse O che è $MK = \frac{1}{2} Ma$, il Centro d'oscillazione di questa retta è dunque alla distanza $OQ = \frac{2}{3} a$ dal punto O.

Per un parallelepipedo rettangolo di lati a, b, c sospeso ad un'asse che bisega la sua base superiore bc, e che è parallelo al lato c, abbiamo $S = \frac{1}{12} M(b^2 + 4a^2)$, $MK = \frac{1}{2} Ma$

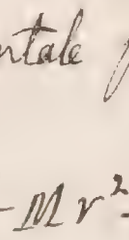
e quindi $l = \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2+4a^2}{a}$.

Per una sfera di raggio a sospesa ad un'asse orizzontale che passa per un punto O della sua superficie tangenzialmente a questa.



$S = \frac{7}{5} Ma^2$, $MK = Ma$, quindi $l = a + \frac{2}{5}a$.

Per un segmento sferico di cui a è il raggio, x la saetta, sospeso ad un'asse orizzontale che passa per un punto della sua base, e che è parallelo all'asse del segmento



$$S = MK^2 + \frac{Mx}{a-\frac{1}{3}x}\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2\right), \text{ quindi}$$

$$l = K + \frac{x}{K} \cdot \frac{\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2}{a-\frac{1}{3}x}$$; K poi è il raggio della base del segmento.

Per una lente convessa di due segmenti sferici uguali $l = \frac{2S}{2MK} = \frac{S}{MK}$, S ed MK essendo relativi ad uno dei segmenti.

Per un cilindro circolare retto di cui r è il raggio della base, h l'altezza, sospeso ad un'asse orizzontale parallelo alla base e ~~perpend~~ contenuto nel piano della base superiore,

$S = \frac{1}{4}Mr^2 + \frac{1}{3}Mh^2$, $MK = \frac{1}{2}Mh$, epperciò $l = \frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}h^2}{\frac{1}{2}h} = \frac{3r^2+4h^2}{2h}$.

Per un' ellissoide di rivoluzione i cui assi sono 2a, 2b, e 2a è l'asse di rivoluzione, sospeso ad un'asse orizzontale condotto per un vertice dell'asse 2a perpendicolarmente a quest'asse $S = \frac{1}{5}M(6a^2+b^2)$, $MK = Ma$, quindi $l = \frac{1}{5} \cdot \frac{6a^2+b^2}{a}$.

Per un segmento di paraboloide di rivoluzione la cui saetta è h, ~~la corda~~ il raggio della base c, sospeso ad un' asse orizzontale tirato pel vertice e perpendicolare all' asse di rivoluzione, $S = \frac{1}{6}Mc^2 + \frac{1}{2}Mh^2$, $MK = \frac{2}{3}Mh$, quindi $l = \frac{\frac{1}{6}c^2 + \frac{1}{2}h^2}{\frac{2}{3}h} = \frac{c^2+3h^2}{4h}$.

Lezione 40.ª

Vediamo ora alcune proprietà importanti del centro di oscillazione.

Si è dimostrato, che la distanza del centro di oscillazione dall asse di sospensione è $l = \frac{S}{Mk}$, ora se h è il raggio di girazione del pendolo rispetto ad un'asse parallelo all'asse di sospensione e condotto pel centro di gravità, sarà $S = M(h^2+K^2)$ e quindi $l = K + \frac{h^2}{K}$; questo valore di l dipendo da K e variando soltanto col variare di K dimostra, che, se descriviamo una superficie cilindrica facendo muovere una retta parallelamente all'asse di sospensione sin modo da mantenersi sempre alla distanza K dall'asse parallelo che passa pel centro di gravità, prendendo una generatrice qualunque di questa superficie per asse di sospensione sarà sempre $l = K + \frac{h^2}{K}$. Per tutti questi assi non variando l varia nemmeno la durata di una oscillazione, che è $t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$, quindi si presenta possiamo risolvere un bellissimo problema;

Determinare fra tutti gli assi paralleli ad un'asse condotto pel centro di gravità quale sia quello che preso per asse di sospensione e facendovi intorno oscillare il sistema fa sì che la durata dell'oscillazione è un minimo.

Basta infatti, perciò che abbiam già detto, che differenziamo t rispetto a K, e che poniamo $\frac{dt}{dK} = 0$, oppure, il che torna allo stesso, che differenziamo l rispetto a K, e che poniamo $\frac{dl}{dK} = 0$, ciò fatto troviamo che deve essere $K = h$, quindi il seguente teorema;

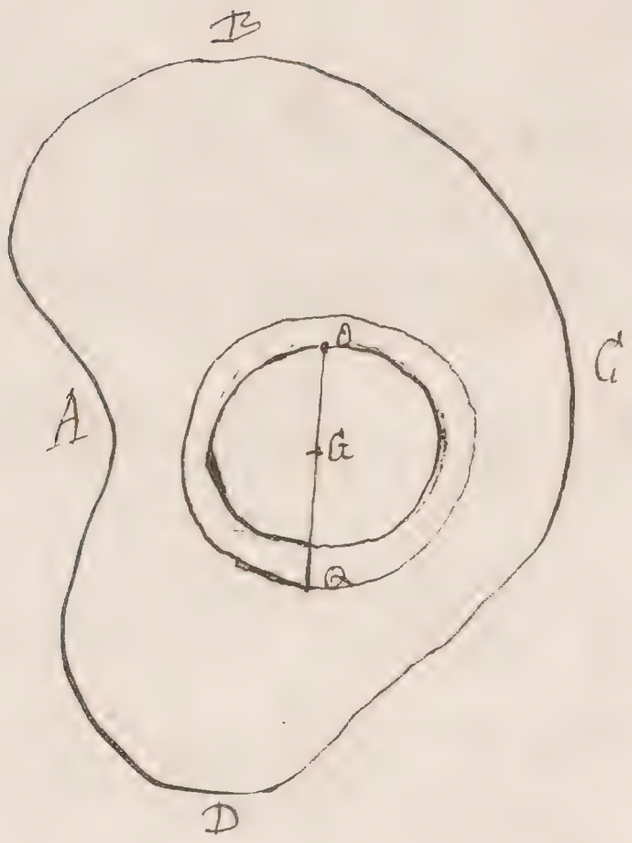
Se rispetto ad un'asse condotto pel centro di gravità il momento d'inerzia è Mh^2, rispetto ad un'asse parallelo e condotto a distanza h la durata della oscillazione è minima, e la lunghezza del pendolo semplice sincrono è doppia del raggio di girazione h, poichè se $K = h$, $l = 2h$.

Potendosi pel Centro di gravità condurre una infinità di assi proponiamoci ancora di trovare fra tutti gli assi immaginabili che si possono condurre in un corpo quello per cui la durata dell' oscillazione è minima.

Se minima se l è minima, ora fra tutti gli assi condotti parallelamente ad un'asse che passa pel Centro di gravità, e rispetto a cui il Raggio di giration è h, quello rispetto al quale la durata t è minima, è quello a cui corrisponde $l = 2h$, l è dunque minima fra gli altri minimi se h è minimo, dunque l'asse rispetto a cui la durata dell' oscillazione è minima è parallelo all'asse principale del Momento minimo, che passa pel Centro di gravità, ed è alla distanza h corrispondente al Momento minimo dal Centro di gravità.

Esempio. In un parallelepipedo rettangolo i lati sono a, b, c, e $a > b > c$, si domanda quale è l'asse intorno a cui facendo oscillare il parallelepipedo la durata dell oscillazione diventa $\overline{t}$ minima.

In questo esempio l'asse di Momento minimo, che passa pel Centro di gravità, è parallelo al lato a, ed il Momento rispetto a quest'asse è $= \frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$, dunque $h = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}$, bisogna dunque per avere l'asse richiesto condurre un'asse parallelo all'asse al lato a, ed alla distanza $K = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}$ dal centro di gravità. Tutti gli assi paralleli a questo e posti alla stessa distanza dal Centro di gravità godono della stessa proprietà, che rispetto ad essi la durata dell oscillazione è minima. Generalmente questi assi non sono tutti nell'interno del parallelepipedo, perché sieno tutti nell' interno è necessaria la condizione $\frac{b}{c} < \sqrt{2}$ se $c < b$, ovvero $\frac{c}{b} < \sqrt{2}$ se $b < c$.



Rappresenti ABGDA la sezione fatta pel centro di gravità di un corpo perpendicolarmente ad un asse orizzontale di sospensione, e sia O il punto in cui questa sezione incontra l'asse; sia ancora Q il punto in cui l'asse dei centri d'oscillazione incontra questa sezione, dico che, se si rovescia il corpo e si prende per asse di sospensione l'asse dei centri di oscillazione, l'asse primitivo di sospensione diverrà asse dei centri di oscillazione del corpo rovesciato.

Sia l la lunghezza del pendolo semplice sincrono al nostro pendolo composto, S il momento d'inerzia di questo rispetto all'asse di sospensione, K la distanza GO dal centro di gravità all'asse e sia l' la lunghezza del pendolo semplice sincrono al pendolo rovesciato, S' il momento d'inerzia di questo pendolo rispetto all'asse dei centri di oscillazione, che è il nuovo asse di sospensione; K' la distanza GQ dal centro G a questo asse, sarà $l = \frac{S}{MK}$, $l' = \frac{S'}{MK'}$, ma $K' = l - K$,

$S' = S + M(K'^2 - K^2) = S + M(l^2 - 2lK)$, dunque $l' = \frac{S + M(l^2 - 2lK)}{Ml - MK}$, poichè $S = MK$

$l' = \frac{Kl + l^2 - 2Kl}{l - K} = \frac{l(l-K)}{l-K} = l$, dunque se un corpo si fa oscillare intorno all'asse dei centri di oscillazione le oscillazioni sono della stessa durata, e l'asse dei centri di oscillazione coincide col 1° asse di sospensione. Finalmente se centro in G descriviamo i due cilindri GO, GQ rispetto a gli assi paralleli al 1° asse di sospensione e condotti per un punto della circonferenza di questi due cilindri le oscillazioni saranno della stessa durata, le $GO = GQ$ le due superficie cilindriche in cui sono collocati questi assi si confondono in una sola; ora $GO = GQ$ quando GO è un massimo o un minimo dunque due superficie cilindriche tali che prendendo le loro generatrici per assi di sospensione le oscillazioni sono della minima durata, superficie che si confondono in una sola, quando $l = 2K$, Ricevendo il raggio di rotazione corrispondente all'asse di minimo momento che passa pel centro di

eguale al raggio d'girazione minimo intorno al centro d'gravità, poichè se h tira questo raggio, allora $l = 2h$, dunque i due cilindri in cui sono collocati gli assi a cui corrispondono oscillazioni di minima durata si confondono in un solo.

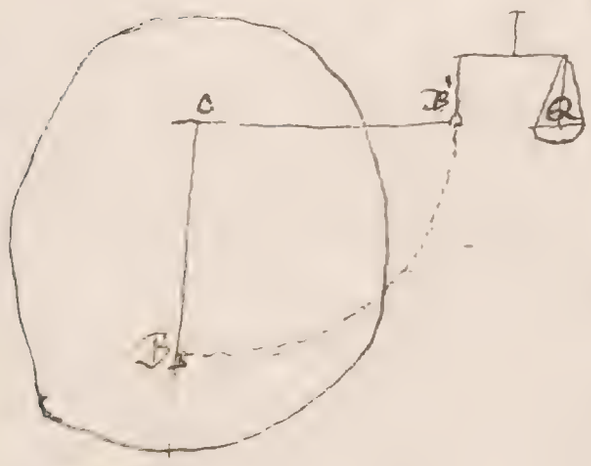
Da tutto ciò risulta un metodo sperimentale per verificare se un pendolo è regolare, e per trovarne il centro d'oscillazione quando non lo fosse.

Se del pendolo fu già notato il centro d'oscillazione e si prese la lunghezza l in modo da fargli fare un dato numero di oscillazioni in un dato tempo, per verificare se si è operato bene prendasi il centro di oscillazione per punto di sospensione e si veda se il pendolo fa ancora lo stesso numero di oscillazioni nello stesso tempo, se si trova non fare lo stesso numero di oscillazioni si avvicina o si allontana dal punto di sospensione quel punto che si credeva essere centro di oscillazione fintantochè si trovi fare lo stesso numero di oscillazioni.

Vediamo ancora un'altro uso che si fa del centro d'oscillazione.

Ho un corpo irregolare ed eterogeneo ho bisogno di conoscere sperimentalmente il momento d'inerzia di questo corpo, come farò? ---

Prendo il corpo, lo sospendo ad un'asse, lo fo oscillare per archi piccolissimi, conto il numero d'oscillazioni, che esso fa nel tempo T, avrò $\frac{T}{n} = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$, e quindi $l = \frac{T^2}{\pi^2 n^2} g$, ma $S = MK^2 l$, il peso P del corpo è $P = Mg$, dunque $S = PK^2 \cdot \frac{T^2}{\pi^2 n^2}$. Per determinare sperimentalmente PK legno la traccia OB



del piano verticale, che passa per l'asse di sospensione, sul piano normale all'asse di sospensione, a questa traccia sostituisco una verga rigida che lego invariabilmente col corpo. a questa verga in B attacco un'uncino, la sollevo quindi, e con essa il corpo, finchè sia orizzontale, e la attacco per l'uncino al braccio di una bilancia posta nel piano OBB'. All'altro braccio

della bilancia attacco dei pesi fintantochè vi sia equilibrio tra questi e il peso del corpo che tende a far girare questo intorno all'asse. Le troverò che il peso Q è tale da produr questo equilibrio, chiamando a la lunghezza della verga OB avrò evidentemente $Qa = PK$, e quindi

$$S = Qa \cdot \frac{T^2}{n^2 \pi^2}.$$

Lezione 41.ª

Supponiamo che si abbia non più un tal corpo, ma un sistema di corpi tutti legati invariabilmente insieme, e che di questo sistema si voglia il tempo di oscillazione rispetto ad un'asse, conoscendo i tempi che ciascun corpo per se impiega a fare una oscillazione intorno allo stesso asse, i pesi di ciascun corpo, e le distanze dei loro centri di gravità dall'asse di sospensione.

Siano $\theta, \theta', \theta'', \theta''' \ldots$ i tempi
$p, p', p'', p''' \ldots$ i pesi
$K, K', K'', K''' \ldots$ le distanze dei centri di gravità

} chiamiamo
$m, m', m'' \ldots$ le masse,
$l, l', l'' \ldots$ le lunghezze dei pendoli sincroni a ciascun corpo,
$s, s', s'' \ldots$ i momenti d'inerzia di ciascun corpo

e S il momento del sistema totale, K ~~il momento~~ la distanza del suo centro di gravità dall'asse, M la sua massa, L la lunghezza del pendolo sincrono a tutto il sistema, T la durata di una oscillazione; Supponiamo, che tutti i centri di gravità dei diversi corpi siano sullo stesso piano verticale

sarà $L = \frac{S}{MK}$, ma $S = s + s' + s'' + \ldots$, $MK = mK + m'K' + m''K'' + \ldots$, $s = lmK$, $s' = l'm'K'$

$s'' = l''m''K'', \ldots$, dunque $L = \frac{\Sigma mlK}{\Sigma mK}$, giacchè $\theta = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$, $L = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{\Sigma mK\theta^2}{\Sigma mK}$, $T = \sqrt{\frac{\Sigma mK\theta^2}{\Sigma mK}}$,

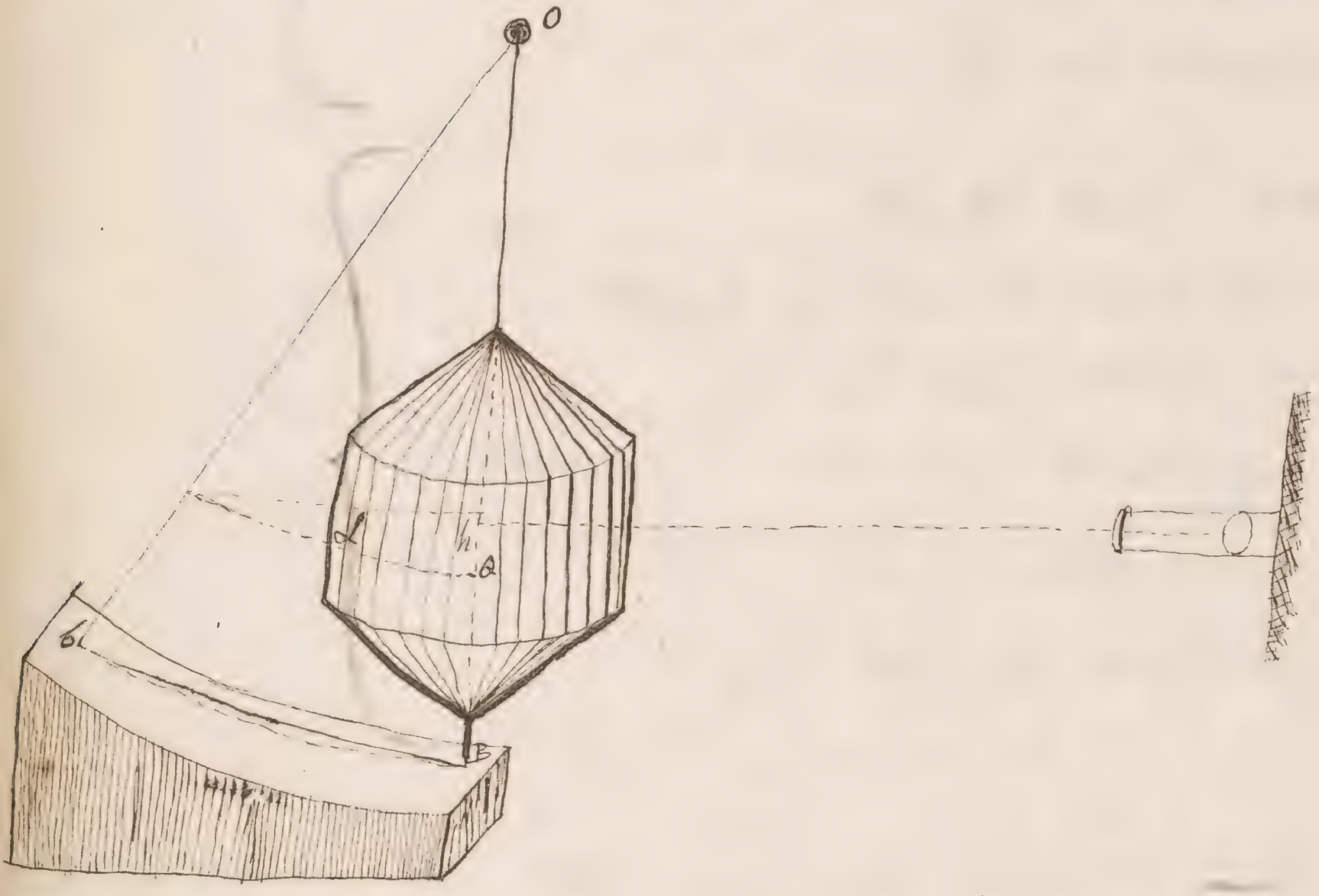
oppure $L = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{\Sigma pK\theta^2}{\Sigma pK}$, $T = \sqrt{\frac{\Sigma pK\theta^2}{\Sigma pK}}$.

Risolviamo ancora un problema il quale è di grandissimo uso nella Meccanica della guerra, cioè nella Artiglieria.

Misurare la velocità con cui la palla esce da un cannone.

Per fare questa misura vi son diversi metodi; vi son dei metodi geometrici, come quello di far passare

la palla entro ad un tamburo rotante, e misurare l'angolo che ha descritto il tamburo nel tempo del passaggio della palla entro ad esso; vi son dei metodi fisici appoggiati sulla teoria dell'elettro-magnetismo, che noi qui non esporremo; vi son finalmente dei metodi meccanici, e questi sono i più adoperati, uno di questi metodi è il seguente;



si sospende ad un fulcro O un pendolo di forma qualunque terminato inferiormente da un'incude B, si colloca sotto questo un pezzo di legno incavato circolarmente, il quale si copre con uno strato di polvere, si fa il tiro ~~la palla~~ in direzione perpendicolare alla superficie del corpo, che serve di pendolo, la palla si caccia entro a questo, e gli fa descrivere intorno al perno O un'arco, il quale vien segnato sulla polvere dall'incude B, si misura la corda bB di quest'arco, e questa basta per determinare la velocità, con cui la palla si cacciò nel pendolo.

Questo strumento si chiama pendolo balistico di Robins, poichè fu Benjamin Robins Ingegnere inglese, che immaginò questo strumento nel 1743.

Resta a trovarsi la formola per avere la velocità della palla quando si conosce la corda bB dell'arco descritto dal pendolo, la massa di questo, la massa della palla, ecc.

Sieno dati

θ ~~Lung~~ durata di una oscillazione minima del pendolo,

M massa del pendolo, con la palla in massa della palla,

a distanza della direzione della palla dall'asse di sospensione,

b distanza dello stile dall'asse di sospensione,

K distanza del centro di gravità del pendolo dall'asse di sospensione,

c lunghezza della corda 6B;

chiamiamo

V la velocità incognita della palla,

S il momento d'inerzia del pendolo con la palla,

Ω la velocità angolare iniziale del pendolo,

l la lunghezza del pendolo semplice sincrono al pendolo balistico,

h l'altezza a cui si solleva il centro di oscillazione,

α l'ampiezza dell'arco, che questo centro descrive,

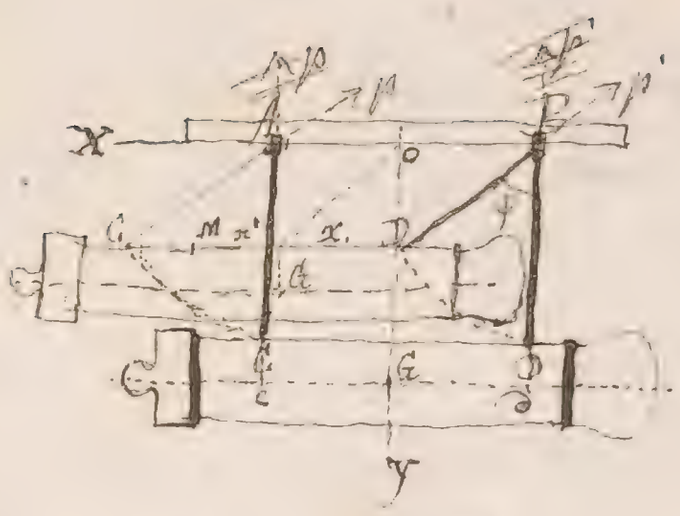
Sarà $\Omega = \frac{mVa}{S}$, ~~Dunque~~ Ω sarà la velocità iniziale assoluta del centro di oscillazione, ora a questa velocità è dovuta l'altezza $\frac{l^2\Omega^2}{2g}$, dunque $h = \frac{l^2\Omega^2}{2g} = \frac{l^2 m^2 V^2 a^2}{2g S^2}$, ma

$h = l(1-\cos\alpha) = 2l\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{l}{2b^2}\cdot 4b^2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{lc^2}{2b^2}$, dunque $\frac{l^2 m^2 V^2 a^2}{2g S^2} = \frac{lc^2}{2b^2}$, e quindi

$V = \frac{cS\sqrt{g}}{bma\sqrt{l}}$, ora ~~S=~~ $S = MlK$, $l = \frac{g\theta^2}{\pi^2}$, dunque finalmente

$$V = \frac{cMK\sqrt{gl}}{bma} = \frac{cMKg\theta}{\pi bma} = \frac{M}{m}\cdot\frac{Kg}{ab}\cdot\frac{\theta}{\pi}\cdot c$$

Questo metodo per determinare la velocità iniziale della palla quando che dal cannone è adottato, quando si esperimentano cannoni di grosso calibro; quando si hanno da esperimentare pezzi piccoli, come bisogno, falconetti si usa un'altro metodo, che consiste nel sospendere il cannone stesso a guisa di pendolo.



In questa esperienza il cannone bisogna sospenderlo per mezzo di due cordoni, epperciò il problema della determinazione della velocità della palla, conoscendo l'arco φ descritto dai cordoni, diventa più complicato.

E sia V la velocità incognita della palla, v la velocità iniziale con cui il cannone rincula, sia m la massa della palla, M la massa del cannone, sarà $MV = mV$, epperciò $V = \frac{m}{M} v$, ora le masse M, m son dati di determinarsi, il problema sarà dunque risoluto quando conosceremo la velocità iniziale del cannone cioè v.

Per determinar v supponiamola cognita e vediamo le equazioni del movimento che prende il cannone per cagione della velocità iniziale v e del suo peso.

Supponiamo il cannone appeso in modo che la verticale che passa pel suo centro di gravità G passi pel punto di mezzo dell'asse orizzontale di sospensione, e che l'asse del cannone sia orizzontale, chiamiamo e supponiamo il cannone omogeneo e tale che il suo centro di gravità sia sull'asse, il che succederà ordinariamente; chiamiamo β la lunghezza di ciascun cordone, α la metà della distanza AB dei punti di sospensione, π il peso del cannone, 2a il suo diametro, che supporremo costante; prendiamo per assi di coordinate OX orizzontale ed OY verticale avente l'origine in O punto di mezzo di AB, non introduco la 3ª coordinata z, poichè della non varierà col tempo, per conseguenza $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$
Pel Teorema di D'Alembert, se chiamiamo p, p' le forze che bisognerebbe sostituire ai cordoni, perchè il moto del cannone non variasse togliendo questi, abbiamo, che π, p, p' devono far equilibrio alle forze attuali rivolte in senso contrario, ora le equazioni in cui sono racchiuse le condizioni d'equilibrio di tutte queste forze sono le tre seguenti;

$$\left.\begin{aligned} -p\,\mathrm{sen}\,\varphi - p'\,\mathrm{sen}\,\varphi - \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dm = 0 \\ -p\cos\varphi - p'\cos\varphi + \pi - \int \frac{d^2y}{dt^2}\,dm = 0 \end{aligned}\right\} \quad +p\alpha\cos\varphi - p'\alpha\cos\varphi - \pi(\beta\,\mathrm{sen}\,\varphi) - \int\left[y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right]dm = 0;$$

Tra queste equazioni eliminando p, p' avremo l'equazione ricercata del movimento del cannone.

Per fare questa eliminazione basta che mettiamo le due prime equazioni sotto la forma $-\mathrm{sen}\,\varphi\,(p+p') = \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dm$; $-\cos\varphi\,(p+p') = \int \frac{d^2y}{dt^2}\,dm - \pi$, dividendo

allora la 1ª per la 2ª abbiamo $\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dm}{\int \frac{d^2y}{dt^2}\,dm - \pi}$, ossia

$$\operatorname{sen}\varphi \int \frac{d^2y}{dt^2}\,dm - \pi \operatorname{sen}\varphi = \cos\varphi \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dm .$$

In questa equazione abbiamo x, y che variano al variare di φ, poichè gli assi delle coordinate li pensiamo fissi, bisogna perciò, per avere una sola variabile nell'equazione, che cerchiamo di esprimere x, y per φ.

A questo fine diamo x', y' le coordinate di un punto qualunque del cannone rispetto a due assi paralleli ad ox, oy e condotti pel centro di gravità, x_1, y_1 le coordinate del centro di gravità rispetto agli assi ox, oy.

Sarà $\left.\begin{aligned} x &= x' + x_1 \\ y &= y' + y_1 \end{aligned}\right\}$ e quindi $\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{d^2y_1}{dt^2} \end{aligned}\right\}$, ora x', y' non variando col Tempo $\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y'}{dt^2} = 0$, dunque

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2}$; inoltre ~~$\frac{d^2x_1}{dt^2}$~~ x_1, y_1 non variano passando da un punto all'altro del cannone, dunque $\int \frac{d^2x_1}{dt^2}\,dm = \frac{d^2x_1}{dt^2} \cdot \int dm = \frac{d^2x_1}{dt^2} \cdot \frac{m}{g}$, $\int \frac{d^2y_1}{dt^2}\,dm = \frac{d^2y_1}{dt^2} \cdot \frac{m}{g}$,

e finalmente $\frac{m}{g}\left[\operatorname{sen}\varphi \frac{d^2y_1}{dt^2} - \cos\varphi \frac{d^2x_1}{dt^2}\right] = m \operatorname{sen}\varphi$; ma $x_1 = \beta \operatorname{sen}\varphi$, $y_1 = \beta\cos\varphi + \alpha$,

e per conseguenza $\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\beta \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \beta\cos\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\beta\cos\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \beta \operatorname{sen}\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \end{aligned}\right\}$; sostituendo questi valori nella equazione ultima, che abbiamo trovata, del movimento, abbiamo l'equazione del movimento, in cui entra soltanto più la variabile φ, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\beta}\operatorname{sen}\varphi$.

A questa equazione coincide con quella di un pendolo semplice di lunghezza β, dunque i punti G. D posti a distanza β dall'asse di sospensione e che nel movimento del cannone descrivono archi circolari di raggio β oscillano come se tutta la massa del cannone fosse in essi raccolta.

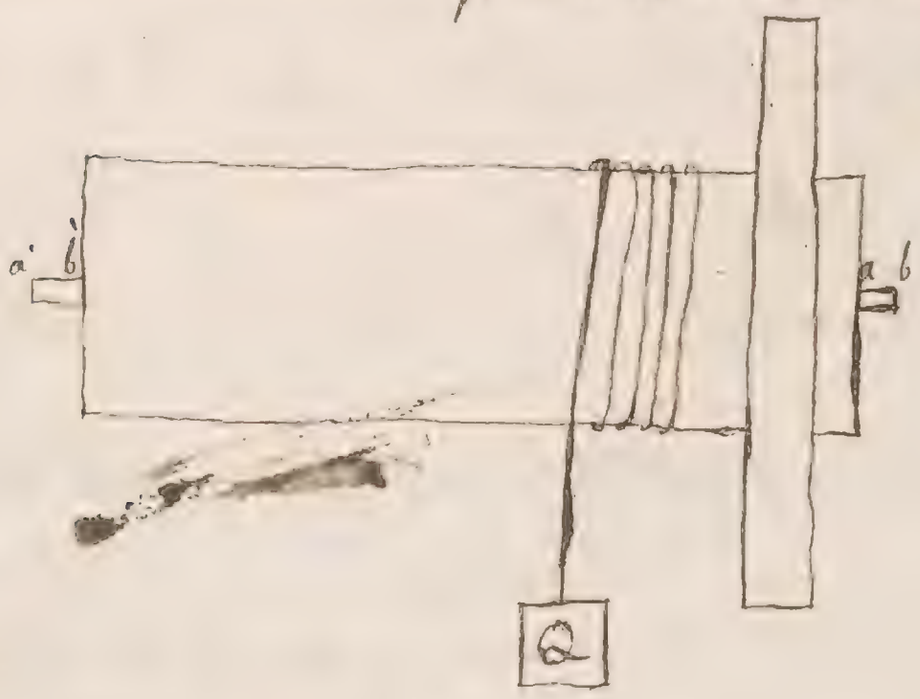
Ciò posto sia h l'altezza a cui è salito il Cannone in virtù della velocità iniziale $v = \beta\frac{d\varphi}{dt}$, sarà $h = \frac{v^2}{2g}$, poichè φ essendo la lunghezza dell'arco descritto dai punti situati a distanza 1 dall'asse, βv è la velocità assoluta iniziale del nostro pendolo semplice, ora $h = \beta(1 - \cos\varphi) = 2\beta \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\varphi$. Dunque

$\frac{P}{g} v^2 = \frac{1}{4} g V^2 \pi^2 \varphi$, e $v = 2\sqrt{\frac{g V}{P}} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\varphi$. Avuta v abbiamo

$$V = \frac{\pi}{gm} \cdot 2\sqrt{\frac{g V}{P}} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\varphi = \frac{2\pi V^2}{m\sqrt{gP}} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\varphi,$$ e se p sia il peso della palla

$$V = \frac{\pi}{p} \cdot 2\sqrt{\frac{g V}{P}} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\varphi.$$

Risolviamo ancora un problema di moto rotatorio.



Un semplice cilindro è sostenuto da un'albero cilindrico, orizzontale nello stesso albero è infilzata una ruota,

a è il raggio della ruota,

P il peso di tutto il sistema, V il volume di tutto il sist.^a,

r il raggio dell'albero,

b il raggio del cilindro, h la lunghezza ab=a'b' della parte d'albero, che sporge dal cilindro, h' la lunghezza del cilindro, h'' lo spessore della ruota.

al cilindro s'avvolge una fune, che porta un peso Q, questo para rotare il cilindro la ruota e l'albero intorno all'asse di questo; supposto, che il sistema si muova per la sola azione del peso Q (sia che parta dalla quiete, e che soffra un'attrito, di cui è dato il coefficiente f. Si domanda alla fine di un tempo θ quale sarà la velocità angolare del sistema, e di quanto sarà disceso il peso Q.

Sia Ω la velocità angolare dopo il tempo θ, ω la velocità dopo un tempo qualunque t.

sarà $\frac{d\omega}{dt} = \frac{(Qb - f(P+Q)r)\,V}{\frac{P}{g}\pi r^4 h + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\pi b^4 h' + \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}\pi h''(a^4 - b^4)}$

$$= \frac{2gV}{P\pi} \cdot \frac{Qb - f(P+Q)r}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)}, \text{ equindi}$$

$$\omega = \frac{2gV}{P\pi} \cdot \frac{Qb - f(P+Q)r}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)}\, t \;\; \text{e}$$

$$\Omega = \frac{2gV}{P\pi} \cdot \frac{Qb - f(P+Q)r}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)} \cdot \theta.$$

Per sapere di quanto sarà disceso il peso Q, chiamiamo b la parte di fune, che si sviluppa in un tempo t, ~~cioè~~ l quella che si sviluppa nel tempo θ, avremo

$\frac{dl}{dt} = bw$, e quindi $l = \frac{1}{2} bwt$, se supponiamo, che al principio sia $t=0$,

$$L = \frac{1}{2} b \Omega \theta = \frac{\pi b g V}{P \pi} \cdot \frac{Qb - f(P+Q)r}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)} \cdot \theta^2$$

dalla L potremo anche calcolare il numero n di giri, che il sistema avrà fatti nel tempo θ. Avremo perciò $2n\pi b = L$, donde

$$n = \frac{gV}{2P\pi^2} \cdot \frac{Qb - f(P+Q)r}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)} \cdot \theta^2$$

Supponiamo che dopo il tempo θ togliamo il peso Q, cerchiamo quanto tempo la macchina impiegherà a fermarsi. Perciò facciamo $Q = 0$, avremo per la velocità angolare ω del sistema dopo un tempo t dal tempo θ, $\omega = \frac{gV}{P\pi} \cdot \frac{Qb - f(P+Q)r}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)} \theta - \frac{gV \cdot fr}{\pi [2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)]} t$

$$= \frac{gV}{P\pi} \cdot \frac{Qb\theta - f(P+Q)r(t+\theta)}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)}.$$

In questa formola facciamo $\omega = 0$, avremo trovato il tempo T impiegato dalla macchina per arrestarsi, che sarà $T = \theta \frac{Qb - f(P+Q)r}{f(P+Q)r}$

Volendo sapere il numero di giri fatti dalla macchina prima di arrestarsi, bisogna, che cerchiamo prima la lunghezza L' di fune che si sarà sviluppata nel tempo T.

Dalla formola $\frac{dl}{dt} = b\omega$ ho $l = \frac{bgV}{P\pi} \cdot \frac{Qb - f(P+Q)r}{2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)} \left[\frac{1}{2} Qb\theta t - \frac{1}{2} f(P+Q)rt^2 \right]$, e quindi

$$L' = \frac{b g V (Qb - f(P+Q)r)^2}{f \pi P^2 r [2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)]} \theta^2.$$ Ciò posto chiamando n' il numero dei giri ricercato

avremo $n' = \frac{L'}{2\pi b} = \frac{gV [Qb - f(P+Q)r]^2}{2f P^2 \pi^2 r [2hr^4 + h'b^4 + h''(a^4 - b^4)]} \theta^2$.

Nello stesso problema supponga si aumentata la massa della macchina di modo che in vece di P il suo peso sia P', voglia si sapere quanto tempo impiegherà per acquistare la stessa velocità Ω del caso precedente, di quanto sarà disceso in tal tempo il peso Q, e il tempo impiegato ad arrestarsi se dopo questo tempo togliamo il peso Q.

Sia θ_1 il tempo ricercato, per determinarlo avremo l'equazione

$$\frac{2gV}{P\pi}\cdot\frac{Qb-f(P+Q)r}{2hr^4+h'b^4+h''(a^4-b^4)}\theta=\frac{2gV}{P'\pi}\cdot\frac{Qb-f(P'+Q)r}{2hr^4+h'b^4+h''(a^4-b^4)}\theta_1,$$ donde

$$\theta_1=\frac{P'}{P}\cdot\frac{Qb-f(P+Q)r}{Qb-f(P'+Q)r}\cdot\theta;$$

sia I_1, dall'altezza, da cui sarà disceso Q in questo tempo, sarà

$$I_1=\frac{bgV(Qb-f(P'+Q)r)}{P'\pi\left[2hr^4+h'b^4+h''(a^4-b^4)\right]}\theta_1^2=\frac{bgV}{2hr^4+h'b^4+h''(a^4-b^4)}\cdot\frac{\left[Qb-f(P+Q)r\right]^2}{P\left[Qb-f(P'+Q)r\right]P'\pi}\cdot\theta^2=I_1\frac{\theta_1}{\theta}$$

sia T_1 il tempo che la macchina impiega ad arrestarsi se togliamo Q, sarà

$$T_1=\theta_1\frac{Qb-f(P'+Q)r}{fP'r}=\frac{P'}{P}\cdot\frac{Qb-f(P'+Q)r}{fP'r}\theta=\frac{Qb-f(P+Q)r}{fPr}\theta=T.$$

Per arrestare la macchina più presto e per gradi si appoggia ad essa un corpo detto freno il cui attrito consuma poco a poco il movimento.

Supponiamo dunque che nel 1° caso del nostro problema all'istante in cui si toglie il peso Q si introduca un'attrito proveniente da una pressione R_1 che produca attrito eserciti sulla ruota,
vediamo di determinare R in modo che il moto si estingua in un tempo dato T.

Supponiamo che il coefficiente dell'attrito del nuovo corpo sia ancora f, per determinare R avremo l'equazione $T=\theta\left[\frac{Qb}{f(P+Q)+fRa}-1\right]$, donde $f(P+Q)r+fRa=\frac{\theta Qb}{T+\theta}$.

Se $R=\frac{\theta}{T+\theta}\cdot\frac{b}{a}Q-\frac{r}{a}P$, e se supponiamo, dell'attrito si eserciti sulla ruota

$R=\frac{\theta[Qb-fPr]-T\cdot fPr}{(T+\theta)fr}=\frac{T}{\theta+T}P$; ed $R=\left\{\frac{\theta Qb}{T+\theta}-f(P+Q)r\right\}\frac{1}{fa}$.

~~Nel 2° Caso sarà $R = \frac{T-P}{\theta+P} P'$.~~

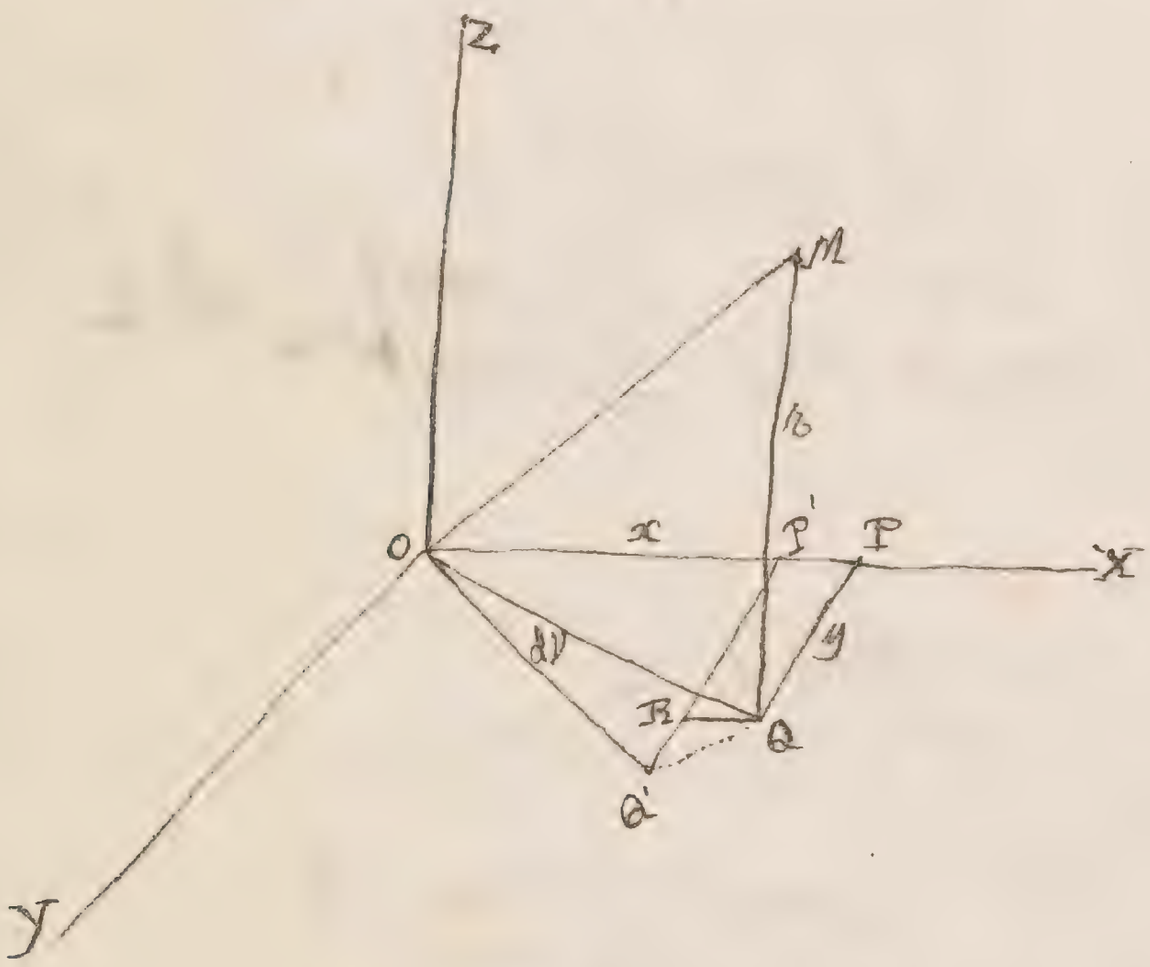
avvertasi, che abbiamo sempre supposta la fune, che porta il peso θ, senza peso.

Sezione 42ª.

Moto di un corpo intorno ad un punto fisso.

Prima di accingerci alla determinazione delle leggi di questo moto studiamone la natura

e cerchiamo di scomporlo in moti più semplici, come scomponevamo il moto di un punto libero nello spazio.



Supponiamo condotti nello spazio pel punto fisso O del corpo tre assi ortogonali fissi OX, OY, OZ, cioè non movenţisi col corpo. Consideriamo un punto del corpo le cui coordinate sono x, y, z in un determinato istante, evidentemente x, y, z saranno funzioni di t, epperciò dopo il tempo t+dt saranno diventate x+dx, y+dy, z+dz.

Poste queste denominazioni rifletta, che il punto M si muove parallelamente ai tre assi colle velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, e che $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ non varia col tempo, poichè M gira intorno ad O, di più le distanze scambievoli dei punti del corpo non variano, queste condizioni avendo lo scopo di fissare x, y, z escludono una infinità di moti, che potrebbero prendere i punti del corpo. Bisognerebbe trovare qualche carattere che distinguesse i moti possibili dai non possibili. Vediamo se possiamo trovar questo carattere, perciò prendiamo larga sintesi, che è la più piana e vediamo se con un certo numero di moti rotatorii semplici possiamo comporre un moto rotatorio qualunque.

Analizziamo il moto del punto M per un tempo dt, e supponiamo, che lo faccia girare di ds,

analizziamolo per un 2° intervallo dt, e supponiamo che si faccia intorno ad OY,
e che poi un 3° intervallo dt si faccia intorno ad OZ, supponiamo inoltre,
che abbiamo trovato, che le variazioni delle coordinate sono nel 1° tempo

$$\left.\begin{matrix} d'x \\ d'y \\ d'z \end{matrix}\right\} \text{nel } 2^\circ \left\{\begin{matrix} d''x \\ d''y \\ d''z \end{matrix}\right\} \text{nel } 3^\circ \left\{\begin{matrix} d'''x \\ d'''y \\ d'''z \end{matrix}\right\}$$

potremo concludere che nel tre
istanti in virtù delle tre rotazioni
intorno ai tre assi le variazioni delle
coordinate furono

$$\left.\begin{aligned} dx &= d'x + d''x + d'''x \quad \text{per la coordinata } x \\ dy &= d'y + d''y + d'''y \quad \text{per la coordinata } y \\ dz &= d'z + d''z + d'''z \quad \text{per la coordinata } z \end{aligned}\right\}.$$

Possiamo dare in vece di dx, dy, dz $d''x, d''y, d''z$, $d'''x, d'''y, d'''z$ gli angoli
$dD, d\mu, d\nu$ descritti dalle proiezioni del punto M sui tre piani coordinati delle yz, xz, xy
per la rotazione di M attorno agli assi OX, OY, OZ. Dovremo allora, considerando la rotazione
intorno ad OZ, per la similitudine dei triangoli $OQP, QQ'R$ la proporzione
QR ossia $d''x : QQ' :: y : OQ$, di più l'altezza del punto M all'origine delle coordinate
$Q'R$ ossia $d''y : QQ' :: x : OQ$ xy non variando col rotare di M intorno ad
OZ sarà $d''z = 0$. Dunque $d''x = y \cdot \frac{QQ'}{OQ}$, $d''y = x \frac{QQ'}{OQ}$, $d''z = 0$;
Ed il segno — a $d''y$ poichè supponge la rotazione positiva da y verso x, ed
in questa supposizione y non cresce della quantità $d''y$ ma diminuisce di questa
quantità portandosi Q da y verso x, ove $QQ' = OQ \cdot d\nu$. Dunque $\frac{QQ'}{OQ} = d\nu$.
e perciò $d'''x = y\,d\nu$, $d'''y = -x\,d\nu$, $d'''z = 0$. Ripetendo gli stessi ragionamenti troveremo,
che $d''x = -z\,d\mu$, $d''z = x\,d\mu$, $d''y = 0$ } supponendo la rotazioni positive da x verso z.
e che $d'z = -y\,dD$, $d'y = z\,dD$, $d'x = 0$ } da z verso y.
Finalmente se invece di $dD, d\mu, d\nu$ avremo le velocità angolari p, q, r con cui
il punto M ~~rota intorno~~ ha rotato successivamente intorno agli assi OX, OY, OZ avremo
$dD = p\,dt$, $d\mu = q\,dt$, $d\nu = r\,dt$, e quindi

$$\left.\begin{aligned} d'x &= 0 \\ d'y &= pz\,dt \\ d'z &= -py\,dt \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} d''x &= -qz\,dt \\ d''y &= 0 \\ d''z &= qx\,dt \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} d'''x &= ry\,dt \\ d'''y &= -rx\,dt \\ d'''z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

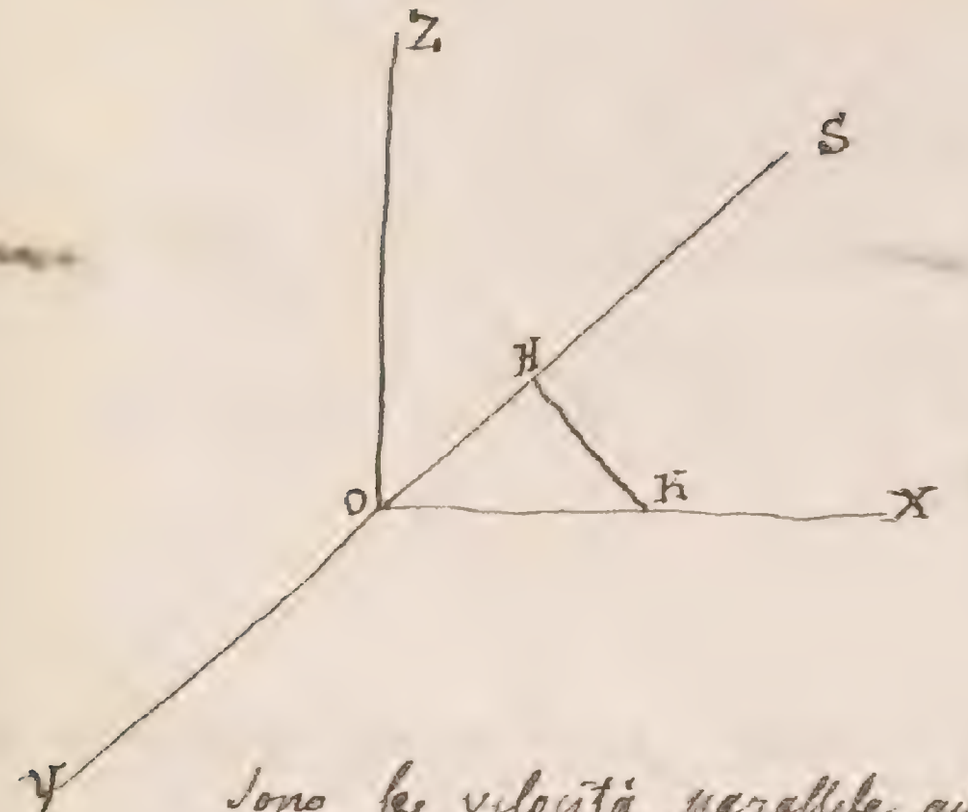
Donde
$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} dx &= (ry - qz)\,dt \\ dy &= (pz - rx)\,dt \\ dz &= (qx - py)\,dt \end{aligned}\right\}$$

. Queste sono le variazioni delle coordinate del punto M pel moto di questo nel tre tempi successivi dt, ossia per un istante infinitesimo 3dt, ora dt essendo un istante infinitesimo di tempo, poppiamo cambiare senza tema di errare 3dt in dt, e dire che i dx, dy, dz scritti ora sono le variazioni delle coordinate del punto M pel movimento di questo per un'istante dt.

Ciò posto risulta, che in un'istante dt il punto M si muove colle velocità parallele agli assi

$$\frac{dx}{dt} = ry - qz, \quad \frac{dy}{dt} = pz - rx, \quad \frac{dz}{dt} = qx - py.$$

Consideriamo in questa ipotesi i punti del corpo pei quali $x:y:z :: p:q:r$, i quali sono tutti situati su di una retta, le cui equazioni sono $x = \frac{p}{r}z$, $y = \frac{q}{r}z$, ossia $rx = pz$, $ry = qz$, $py = qx$, sarà per questi punti $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ qualunque siano i valori di p, q, r. Da ciò concludiamo, che mentre un corpo tende a girare intorno altri assi ortogonali con velocità angolari p, q, r, se si tira nel corpo una retta, che faccia cogli assi gli angoli i cui cosen sono $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, $\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, tutti i punti di questa retta non si muovono, ossia il corpo si muove intorno a questa retta come asse. Per sapere con che velocità angolare si muoverà intorno a tale retta posta che conosciamo la velocità angolare di un punto qualunque del corpo, consideriamo perciò un punto K situato sull'asse delle x a distanza $KH = 1$ dalla retta, che supponga essere OS,



per questo punto $\begin{cases} x = OK = \frac{KH}{\text{sen } SOX} = \frac{1}{\text{sen } SOX} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Dunque $\frac{dx}{dt} = 0$. $\frac{dy}{dt} = -\frac{r}{\text{sen } SOX}$

$\frac{dz}{dt} = \frac{q}{\text{sen } SOX}$, ma $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$

sono le velocità parallele agli assi del punto K, cioè velocità assolute i

Dunque $\Omega = \frac{\sqrt{q^2+r^2}}{\text{sen } SOX}$, ora $\text{sen } SOX = \frac{\sqrt{q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, Dunque

$\Omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$, ma Ω sono i che la velocità angolare del corpo intorno ad OS, poichè il punto K è alla distanza 1 dall'asse OS, la velocità angolare del corpo è dunque $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$. Questo risultato si dice che le velocità angolari si compongono come le velocità lineari.

Lezione 43ª

Ogni volta che un corpo rota intorno ad un'asse fisso con velocità angolare Ω, possiamo immaginare quella rotazione come risultante dalle tendenze del corpo a rotare intorno a tre assi ortogonali, che fanno coll'asse fisso gli angoli α, β, γ colle velocità angolari $\Omega\cos\alpha$, $\Omega\cos\beta$, $\Omega\cos\gamma$.

Quindi se sostituiamo queste velocità invece di p, q, r nelle equazioni (1) avremo le velocità parziali del corpo parallele agli assi.

Quando un corpo si muove intorno ad un punto fisso a ciascun istante esso si muove intorno ad un'asse fisso, che muta o varierà ad ogni istante di posizione o manterrà costantemente la stessa posizione, il problema dunque della determinazione delle leggi del moto rotatorio di un corpo intorno ad un punto fisso dipende dal problema, che già abbiam risoluto, della determinazione delle leggi del moto rotatorio intorno ad un'asse fisso.

Nel moto rotatorio intorno ad un punto fisso ~~quando~~ l'asse che cambia ad ogni istante ~~fisso~~ è detto asse istantaneo di rotazione, e se non cambia ad ogni istante è detto asse permanente di rotazione.

Il Problema attuale è di determinare le velocità angolari p, q, r con cui il corpo tende a rotare intorno ~~agli assi~~ a tre assi ortogonali fissi nello spazio e condotti pel punto fisso del corpo, quando a questo è applicato un numero qualunque di forze acceleratrici qualunque.

Cominciamo dal supporre dati al corpo tanti impulsi, e cerchiamo quali saranno i valori iniziali di p, q, r.

Prendiamo per assi di coordinate i tre assi principali del corpo, che passano pel punto fisso, sieno

$A=\int(y^2+z^2)dm$, $B=\int(x^2+z^2)dm$, $C=\int(x^2+y^2)dm$ i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli stessi assi, sieno F, G, H le somme dei momenti di rotazione rispetto agli stessi assi delle quantità di moto impresse al corpo, chiamiamo per maggior chiarezza u, v, w le velocità iniziali attuali parallele agli assi del corpo, avremo $u=ry-qz$, $v=pz-rx$, $w=qx-py$.

Le forze impresse fanno equilibrio alle forze attuali rivolte in senso contrario mediante la resistenza dei vincoli, ora perchè ciò sia basta che le somme dei momenti di rotazione delle forze impresse rispetto a tre assi sieno eguali alle somme dei momenti di rotazione delle forze attuali, sommiamo perciò i momenti delle forze attuali. Le velocità attuali avendo u, v, w, le quantità di moto elementari attuali sono $u\,dm$, $v\,dm$, $w\,dm$ parallelamente ai tre assi, ed i momenti di rotazione di queste sono

$$\left.\begin{array}{ll} \text{rispetto all'asse delle } x & \int(vz-wy)dm \\ \text{rispetto all'asse delle } y & \int(wx-uz)dm \\ \text{rispetto all'asse delle } z & \int(uy-vx)dm \end{array}\right\},$$

Quindi $F = \int (vz - wy)\,dm$, $G = \int (wx - uz)\,dm$, $H = \int (uy - vx)\,dm$. Sostituiamo nella 1ª equazione a v, w i suoi valori avremo

$$F = \int [pz^2 - rxz - qyz + pxy]\,dm \text{ , ossia}$$

$$F = p\int (y^2 + z^2)\,dm - r\int xz\,dm - q\int xy\,dm ,$$

poichè p, q, r non variando da un punto all'altro del corpo si ponno mettere fuori del segno $\int$, ora $\int (y^2 + z^2)\,dm = A$, $\int xz\,dm = 0$, $\int xy\,dm = 0$, dunque $F = pA$, e quindi $p = \frac{F}{A}$; le stesse operazioni fatte sulle altre due equazioni ci danno $q = \frac{G}{B}$, $r = \frac{H}{C}$.

Conchiudiamo da ciò, che al principio del moto il corpo rota intorno ad un'asse, che sia coglia gli assi principali condotti pel punto fisso gli angoli i cui cosini sono $\frac{F}{A\Omega}$, $\frac{G}{B\Omega}$, $\frac{H}{C\Omega}$, essendo Ω la velocità angolare assoluta di rotazione, la quale

$$\Omega = \sqrt{\frac{F^2}{A^2} + \frac{G^2}{B^2} + \frac{H^2}{C^2}} .$$

Supponiamo per fare un'esempio che si dia al corpo un'impulso unico; se l'impulso sarà dato da una massa μ con velocità V diretta in uno dei tre piani coordinati per es° in quello delle xy, sarà $F = 0$, $G = 0$, $H = \mu V \delta$, dicendo δ la distanza dall'origine alla direzione dell'impulso, e quindi $p = 0$, $q = 0$, $r = \frac{\mu V \delta}{C}$. Quando ad un corpo mobile intorno ad un punto fisso si dà un'impulso in una direzione perpendicolare ad uno degli assi principali del corpo condotto pel punto fisso, la rotazione si farà unica intorno ~~d'quest'asse principale~~ a quest'asse. In un piano normale ad

La l'impulso sarà diretto ~~quando~~ una retta facente cogli assi principali gli angoli h, K, i, il momento dell'impulso rispetto a questa retta sarà $\mu V \delta$, e quindi i momenti rispetto agli assi saranno $F = \mu V \delta \cos h$, $G = \mu V \delta \cos K$, $H = \mu V \delta \cos i$, e sarà $p = \frac{\mu V \delta \cos h}{A}$, $q = \frac{\mu V \delta \cos K}{B}$, $r = \frac{\mu V \delta \cos i}{C}$, $\Omega = \mu V \delta \sqrt{\frac{\cos^2 h}{A^2} + \frac{\cos^2 K}{B^2} + \frac{\cos^2 i}{C^2}}$.

Lezione 44.ª

Passiamo a determinare p, q, r nella continuazione del moto tenendo conto di tutte le forze acceleratrici applicate al sistema. Queste forze variano generalmente da un punto all'altro del sistema. Supponiamo che pel punto x, y, z le somme delle componenti delle forze acceleratrici parallele agli assi siano X, Y, Z, gli impulsi ricevuti ad ogni istante dall'elemento dm saranno $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$; $\int X\,dm$, $\int Y\,dm$, $\int Z\,dm$ sono dunque le forze impresse ed $\left.\begin{matrix}\int(Xy - Yx)\,dm \\ \int(Zx - Xz)\,dm \\ \int(Yz - Zy)\,dm\end{matrix}\right\}$ sono i momenti di rotazione delle forze impresse rispetto agli assi; questi integrali vanno estesi a tutta la massa del sistema, o meglio alla parte di massa soggetta alle forze acceleratrici.

Siano u, v, w le velocità attuali da cui è animata ciascuna molecola dm parallelamente agli assi dopo il tempo t, (avvertasi qui, che prendiamo per assi gli assi principali del corpo che passano pel punto fisso nella loro posizione che hanno dopo il tempo t, come nella lezione antecedente li prendevamo nella loro posizione iniziale) le forze acceleratrici corrispondenti saranno $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ e le forze motrici attuali saranno $\int \frac{du}{dt}\,dm$, $\int \frac{dv}{dt}\,dm$, $\int \frac{dw}{dt}\,dm$, ora

$u = ry - qz$, dunque $\frac{du}{dt} = y\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt} + r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt} = y\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt} + rv - qw$

$v = pz - rx$

$w = qx - py$

$$\frac{dv}{dt} = z\frac{dp}{dt} - x\frac{dr}{dt} + p\frac{dz}{dt} - r\frac{dx}{dt} = z\frac{dp}{dt} - x\frac{dr}{dt} + pw - ru$$

$$\frac{dw}{dt} = x\frac{dq}{dt} - y\frac{dp}{dt} + q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt} = x\frac{dq}{dt} - y\frac{dp}{dt} + qu - pv$$

Ai questi valori di $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ sostituendo ad u, v, w i suoi valori, e mettendo i risultati negli integrali $\int \frac{du}{dt}\,dm$, $\int \frac{dv}{dt}\,dm$, $\int \frac{dw}{dt}\,dm$, ciascuno di questi integrali sarà la somma di più integrali contenenti le velocità angolari p, q, r e $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, quantità, che potremo mettere

fuori di tegni Σ, poichè funzioni Δt; mettendo fuori queste quantità restano gli integrali $\int x\,dm$, $\int y\,dm$, $\int z\,dm$; ora questi integrali estesi a tutta la massa sono nulli quando il punto fisso è nel Centro di gravità del corpo, dunque in questo caso la somma delle forze attuali sono nulle. Se il punto fisso non è nel Centro di gravità le somme delle forze attuali sono le stesse come se tutta la massa fosse raccolta nel Centro di gravità.

Le forze impresse fanno equilibrio alle forze attuali rivolte in senso contrario per mezzo delle resistenze dei vincoli, le somme dei momenti di rotazione delle forze impresse ~~ossia delle forze~~ sono dunque eguali alle somme dei momenti di rotazione delle forze attuali, ora queste somme sono

$$\begin{cases} \int\left(\frac{du}{dt}y-\frac{dv}{dt}x\right)dm=\frac{dr}{dt}\int(y^2+x^2)\,dm+pq\int(y^2-x^2)\,dm=C\frac{dr}{dt}+pq(A-B) \\ \int\left(\frac{dw}{dt}x-\frac{du}{dt}z\right)dm=B\frac{dq}{dt}+pr(C-A) \\ \int\left(\frac{dv}{dt}z-\frac{dw}{dt}y\right)dm=A\frac{dp}{dt}+qr(B-C) \end{cases}$$

, Dunque

$$\begin{cases} H\,dt=C\,dr+(A-B)pq\,dt \\ G\,dt=B\,dq+(C-A)pr\,dt \\ F\,dt=A\,dp+(B-C)qr\,dt \end{cases}$$

, Per queste equazioni è contenuta la soluzione del problema della determinazione di p,q,r, ~~che~~ però non sono integrabili.

Vi ha un caso in cui queste equazioni si integrano ed è quando $F=G=H=0$, cioè quando o non vi è forza acceleratrice, o le forze acceleratrici passano tutte pel punto fisso.

Infatti le equazioni ci danno allora $dp = \frac{C-B}{A} qr\,dt$, $dq = \frac{A-C}{B} pr\,dt$, $dr = \frac{B-A}{C} pq\,dt$

e facendovi $pqr = \frac{d\varphi}{dt}$, abbiamo $qr\,dt = \frac{dp}{p}$, $pr\,dt = \frac{dq}{q}$, $pq\,dt = \frac{dr}{r}$, donde

$$p\,dp = \frac{C-B}{A} d\varphi, \quad q\,dq = \frac{A-C}{B} d\varphi, \quad r\,dr = \frac{B-A}{C} d\varphi, \text{ ed integrando}$$

$$p^2 = 2\frac{C-B}{A}\varphi + a^2, \quad q^2 = 2\frac{A-C}{B}\varphi + b^2, \quad r^2 = 2\frac{B-A}{C}\varphi + c^2.$$

a, b, c che ho introdotte in queste formole sono i valori iniziali di p, q, r.

Alle queste equazioni bisogna che introduciamo t invece di φ, perciò vediamo di esprimere φ per t. $d\varphi = pqr\,dt$, quindi $dt = \frac{d\varphi}{pqr} = \dfrac{d\varphi}{\sqrt{\left(2\frac{C-B}{A}\varphi + a^2\right)\left(2\frac{A-C}{B}\varphi + b^2\right)\left(2\frac{B-A}{C}\varphi + c^2\right)}}$

Quest'integrazione si può fare soltanto per approssimazione generalmente; quando il corpo nel 1° istante gira intorno ad un asse principale o ad un'asse vicinissimo a questo, quest'ultima integrazione si fa rigorosamente.

Infatti supponiamo, che al principio del movimento il corpo rotasse per es° intorno all'asse delle x, allora $b = c = 0$, e l'equazione diventa

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{(A-C)(B-A)}{BC}} \cdot 2\varphi\sqrt{2\frac{C-B}{A}\varphi + a^2}}$$ Per integrarla introduciamo p

invece di φ; poichè $p^2 = 2\frac{C-B}{A}\varphi + a^2$, $d\varphi = \frac{p\,dp}{\frac{C-B}{A}}$, $2\varphi = \frac{p^2-a^2}{\frac{C-B}{A}}$, ed avremo

$$dt = \frac{dp}{\sqrt{\frac{(A-C)(B-A)}{BC}}(p^2-a^2)}, \text{ donde } t\sqrt{\frac{(A-C)(B-A)}{BC}} + \log t = \frac{1}{2a}\log\frac{p-a}{p+a}$$

e quindi $\frac{p-a}{p+a} = e^{\text{cost.}} \cdot e^{2at\sqrt{\frac{(A-C)(B-A)}{BC}}}$. Per determinare la

costante osserviamo che a $t=0$ deve corrispondere $p=a$, ossia in quest'

equazione facendo $t=0$, $p=a$ risulta $e^{\text{cost.}} = 0$; L'equazione diventando

$p=a$ dimostra, che quando un corpo prende a rotare intorno ad un'asse

principale con velocità angolare a esso continua a muoversi colla stessa

velocità. Inoltre a $p=a$ corrispondendo $q=0$, e quindi $q=0$, $r=0$ risulta

che il corpo continua a rotare intorno allo stesso asse, ossia gli assi prin-

-cipali sono assi permanenti di rotazione.

Questo teorema è vero anche quando al sistema sono applicate delle forze,

che passano pel punto fisso.

Se il punto fisso è il centro di gravità il teorema è ancora vero ~~se~~ comunque le forze acceleratrici

~~sono applicate~~ sono applicate al sistema [redacted]. Infatti in questo caso le somme delle forze attuali tornano,

~~e~~ quindi le forze acceleratrici hanno dunque una risultante che passa pel punto fisso e

in conseguenza $F=0$, $G=0$, $H=0$.

Lezione 45.ª

Quando inizialmente il corpo gira intorno ad un'asse vicinissimo ad uno degli

assi principali per es.º all'asse delle x, l'integrazione delle equazioni

$$H dt = C dr + (A-B) pq dt$$

$$G dt = B dq + (C-A) pr dt$$

$$F dt = (B-C) qr dt + A dp$$

si eseguisce anche quando sia inoltre $F=G=H=0$

Infatti essendo la velocità di rotazione intorno all'asse

delle x, le velocità di rotazione b. c rispetto agli altri

due assi saranno piccolissime rispetto ad $\frac{dr}{dt}$, di più

Essendo $F=G=H=0$, se facciamo $\frac{C-B}{A}=L$ $\frac{A-C}{B}=M$, $\frac{B-A}{C}=N$, avremo (V. Leg.ª a

$p^2=2L\varphi+a^2$, $q^2=2M\varphi+b^2$, $r^2=2N\varphi+c^2$, e $d\varphi=pqr\,dt$, ora p,q,r son funzio

di a,b,c,t Dunque anche φ è funzione di a,b,c,t, e si può riguardare come ordinata di

una superficie di cui b,c sono le ascisse se si considerano b,c variabili, ora qualunque sieno

a e t quando $b=c=0$ si ha sempre $\varphi=0$. Dunque φ è piccolissimo quando b e c sono piccolissimi, p

in una superficie, che passa per l'origine l'ordinata di un punto vicinissimo a quella è piccolissi

e per conseguenza φ è trascurabile a fronte di a per tutta la durata del moto. Quindi si potrà,

sensibilmente $p=a$ per tutta la durata del moto. Ciò essendo le due prime equazioni della

pag.ª antec.ª bastano per determinare q ed r, che si riducono nel nostro caso alle seguenti

$dq=Mar\,dt$, per potere integrare differenziando avremo $\begin{cases} d^2q=Ma\,dt\,dr=MNa^2q\,dt^2 \\ d^2r=Na\,dt\,dq=MNa^2r\,dt^2 \end{cases}$

$dr=Naq\,dt$ donde ricavasi facilmente q ed r.

Ma siccome dall'essere i secondi membri di queste equazioni positivi o negativi dipende la forma

delle funzioni q ed r, è bene, che prima di integrare esaminiamo in quali casi i secondi membri

bri sieno positivi o in quali negativi.

A è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse delle x, cioè asse principale, B dunque

sarà massimo o minimo o medio. Se A è massimo o minimo evidentemente M, N hanno

di segni contrarii, per conseguenza MN è negativo, se A è medio M, N sono dello stesso segno, e

MN è positivo. Facciamo perciò successivamente le due ipotesi.

Se A è massimo o minimo poniamo $A=-MK^2$, e $MN=-M^2k^2$, avremo alle

$\frac{d^2q}{dt^2} = -M^2K^2a^2q$, $\frac{d^2r}{dt^2} = -M^2K^2a^2r$, e quindi

$$\left.\begin{aligned} q &= D\,\mathrm{sen}\,aMKt + E\cos aMKt \\ r &= D'\,\mathrm{sen}\,aMKt + E'\cos aMKt \end{aligned}\right\}$$

D, E, D', E' essendo le costanti dell'integrazione. Per determinare queste costanti esprimiamo le condizioni che quando $t=0$ deve essere $q=b$, $r=c$, avremo $E=b$, $E'=c$, dipoi $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ ricavate da queste equazioni devono soddisfare alle equazioni di 1° ordine da cui siamo partiti, questa condizione ci danno $D=\frac{c}{K}$, $D'=-bK$. Dunque finalmente

$$\left.\begin{aligned} q &= b\cos aMKt + \frac{c}{K}\,\mathrm{sen}\,aMKt \\ r &= c\cos aMKt - bK\,\mathrm{sen}\,aMKt \end{aligned}\right\}$$

$\mathrm{sen}\,aMKt$, $\cos aMKt$ non possono mai sorpassare l'unità quantunque grande sia t, sarà dunque sempre $q < b+\frac{c}{K}$, $r < c+bK$, ma b, c son piccolissimi; dunque q ed r sono sempre piccolissimi, e la rotazione è di sua natura stabile.

Se A è il momento medio dovremo fare $N = +MK^2$, poichè M ed N sono dello stesso segno, dovremo

$\frac{d^2q}{dt^2} = a^2M^2K^2q$, $\frac{d^2r}{dt^2} = a^2M^2K^2r$. Facendo l'integrazione e determinando le costanti come nel caso precedente trovasi

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{bK+c}{2K}e^{aMKt} + \frac{bK-c}{2K}e^{-aMKt} \\ r &= \frac{bK+c}{2}e^{aMKt} - \frac{bK-c}{2}e^{-aMKt} \end{aligned}\right\}$$

In queste equazioni e^{aMKt} potrà prendere un valore enorme al crescere di t, quindi

dire, che generalmente quando A è il momento medio la rotazione intorno all'asse di esso momento è instabile, che cioè se quando un corpo gira intorno ad un'asse

principale, rispetto a cui il momento è nè massimo nè minimo, è viene cosicchè un-
-pulso ad agire sul corpo, per cui questo sia obbligato a mettersi a rotare intorno ad un'asse
vicinissimo al primo, desso girerà intorno all'asse vicinissimo per un'istante solo, dopo il
quale prenderà a rotare successivamente intorno ad altri assi facenti angoli sempre più
grandi col primo asse di rotazione.

La terra rotò all'istante in cui uscì dalla mano del creatore intorno ad un suo asse principale rispetto a cui il suo momento
d'inerzia è massimo, la rotazione della terra è dunque stabile ossia si fa sempre intorno
ad un'asse vicinissimo al suo asse primitivo di rotazione, che è anche l'asse di figura, quantun-
-que in grazia delle forze perturbatrici provenienti dall'attrazione del sole sulla protuberanza equato-
-riale l'asse varii continuamente di posizione.

Da questo variar continuo dell'asse dipende il fenomeno della precessione degli equinozii.

Ora che sappiamo determinare adogni istante le velocità angolari, con cui il corpo tende a rotare
intorno ai suoi assi principali ricerchiamo quale sia la posizione degli assi principali nello
spazio adogni istante ossia dopo un tempo qualunque t ed il problema della determinazione
del moto rotatorio intorno ad un punto sarà completamente risoluto.

Perciò piantiamo tre assi assolutamente fissi la cui origine sia nel punto fisso, siano
x', y', z' le coordinate di un punto del corpo alla fine di un tempo t, x, y, z le trasformazioni di x', y', z'
siano α, β, γ gli angoli, che dopo il tempo t gli assi fissi fanno cogli assi mobili delle
α', β', γ'
$\alpha'', \beta'', \gamma''$
x, y, z, facciamo per brevità $\cos\alpha = a$, $\cos\beta = b$, $\cos\gamma = c$

$\cos\alpha' = a'$, $\cos\beta' = b'$, $\cos\gamma' = c'$

$\cos\alpha'' = a''$, $\cos\beta'' = b''$, $\cos\gamma'' = c''$

avremo le sei relazioni

$$x' = ax+by+cz \quad ; \quad x = ax' + a'y' + a''z' \quad .$$

(1) $$y' = a'x+b'y+c'z \quad ; \quad y = bx' + b'y' + b''z'$$

$$z' = a''x+b''y+c''z \quad ; \quad z = cx' + c'y' + c''z'$$

Chiamiamo u', v', w' le velocità progressive della molecola

m, le cui coord.e sono x', y', z', parallelamente agli assi fissi, ritenendo che

u, v, w erano le velocità progressive parallele agli assi mobili della stessa molecola,

avremo $u' = au + bv + cw \; ; \; v' = a'u + b'v + c'w ; \; w' = a''u + b''v + c''w$

$$u = a\frac{dx'}{dt} + a'\frac{dy'}{dt} + a''\frac{dz'}{dt} ; \; v = b\frac{dx'}{dt} + b'\frac{dy'}{dt} + b''\frac{dz'}{dt} ; \; w = c\frac{dx'}{dt} + c'\frac{dy'}{dt} + c''\frac{dz'}{dt} ,$$ ora

Dalle relazioni (1) differenziando rispetto a t abbiamo

$$\frac{dx'}{dt} = x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt} \quad , \text{ inoltre } \quad u = ry - qz$$

$$v = pz - rx$$

$$\frac{dy'}{dt} = x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt} \qquad w = qx - py \quad , \text{ dunque}$$

$$\frac{dz'}{dt} = x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}$$

$$ry - qz = a\left[x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}\right] + a'\left[x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}\right] + a''\left[x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}\right]$$

$$pz - rx = b\left[x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}\right] + b'\left[x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}\right] + b''\left[x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}\right]$$

$$qx - py = c\left[x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}\right] + c'\left[x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}\right] + c''\left[x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}\right] .$$

Queste tre equazioni devono essere soddisfatte per identità, cioè qualunque

siano i valori di x, y, z. Dunque dovrà essere

(2) (3) (4)

$$\cancel{r\,dt =} \; a\,da + b\,db + a''da'' = 0 \quad ; \; b\,db + b'db' + b''db'' = 0 \quad ; \; c\,dc + c'dc' + c''dc'' = 0$$

$$r\,dt = a\,db + a'db' + a''db'' \quad ; \quad p\,dt = b\,dc + b'dc' + b''dc'' \quad ; \quad q\,dt = c\,da + c'da' + c''dd'$$

$$-q\,dt = a\,dc + a'dc' + a''dc'' \quad ; \; -r\,dt = b\,da + b'da' + b''da'' \quad ; \; -p\,dt = c\,db + c'db' + c''db'' \quad ;$$

Ma tra le quantità $a,b,c,\ldots$ abbiamo anche le relazioni

$$a^2+a'^2+a''^2=1 \quad ; \quad ab+a'b'+a''b''=0$$

$$(\S)\quad b^2+b'^2+b''^2=1 \quad ; \quad (6)\ ac+a'c'+a''c''=0$$

$$c^2+c'^2+c''^2=1 \quad ; \quad bc+b'c'+b''c''=0$$

sembrerebbe dunque a prima vista che per determinare tali quantità vi fossero più equazioni che incognite, maciò non è. Infatti se differenziamo le equazioni (§) ricadiamo sulle tre prime equazioni delle terne (2), (3), (4), quelle tre ultime son dunque inutili, inoltre se differenziamo le equazioni (6) abbiamo che

$$a\,da+a'\,da'+a''\,da''=-bda-b'da'-b''da''$$

$$a\,da+a'\,da'+a''\,da''=-a\,da-a'\,da'-a''\,da''$$

$$b\,dc+b'\,dc'+b''\,dc''=-c\,db-c'\,db'-c''\,db''$$

sostituiamo in vece dei primi membri di queste equazioni i secondi membri nelle tre seconde equazioni delle terne (2), (3), (4), abbiamo $-r\,dt=b\,da+b'\,da'+b''\,da''$; $-q\,dt=a\,dc+a'\,dc'+a''\,dc''$ $-p\,dt=c\,db+c'\,db'+c''\,db''$, ora queste equazioni coincidono colle tre restanti equazioni, quelle tre ultime son dunque anch'esse inutili, dunque le equazioni (2), (3), (4) si riducono alle sole tre seguenti, che sono veramente utili

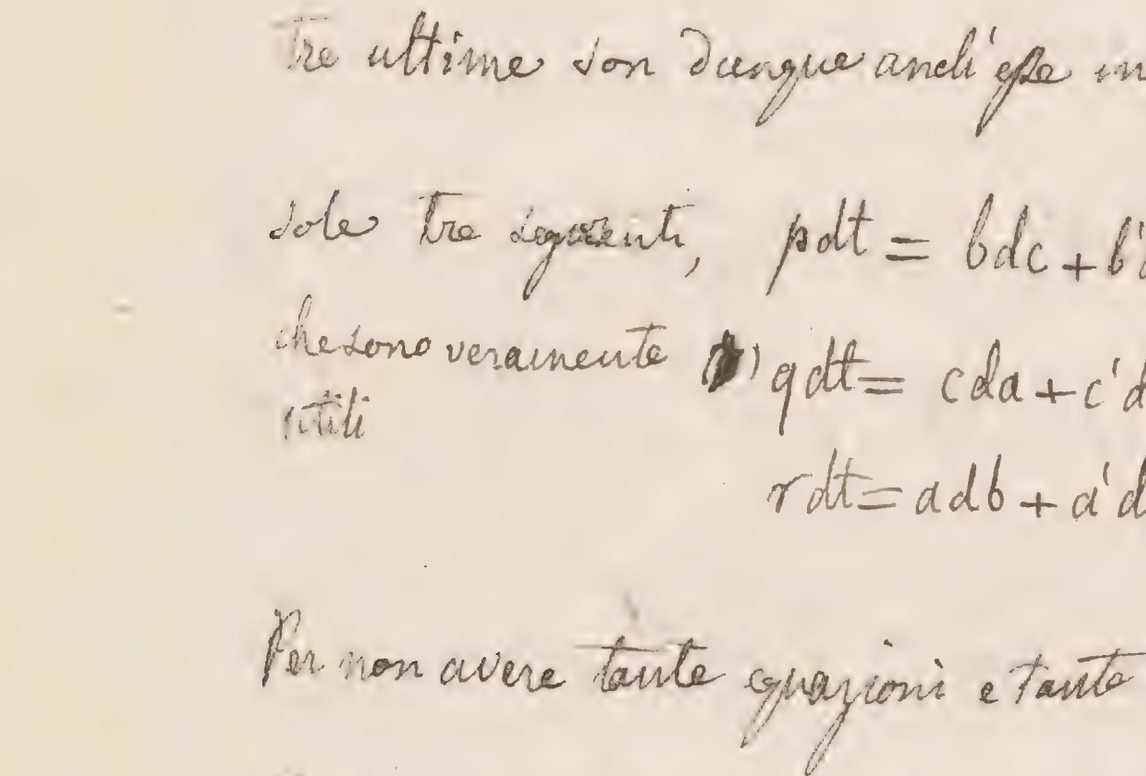
$$p\,dt=b\,dc+b'\,dc'+b''\,dc''$$

$$(\S)\quad q\,dt=c\,da+c'\,da'+c''\,da''$$

$$r\,dt=a\,db+a'\,db'+a''\,db''$$

quelle tre equazioni e le equazioni (5), (6) ci danno $a,b,c,a',b',c',a'',b'',c''$.

Per non avere tante equazioni e tante incognite proviamo introdurre altre variabili. Prendiamo per es.° per variabili l'angolo ψ che la traccia ON del piano delle xy col piano delle $x'y'$ fa con OX', l'angolo φ, che questa stessa traccia fa con OX, e l'angolo diedro θ che il piano NOX fa col piano NOX', ossia l'angolo che l'asse delle z' fa coll'asse delle z, i tre assi delle x,y,z saranno pienamente determinati rispetto agli assi fissi quando



conoscerenno φ, ψ, θ, perciò potremo esprimere $\alpha', \beta', \gamma', \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ per φ, ψ, θ; = la trigonometria sferica ce ne somministra i mezzi: infatti conoscendo dell'angolo solidotriedro formato da ON, OX, OX' gli angoli piani φ, ψ e l'angolo diedro compreso θ, abbiamo dalla trigonometria sferica $\cos XOX' = \cos\alpha = \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta$; similmente dell'angolo solido formato da ON, OX, OY' conoscendo gli angoli piani $XON = \varphi$, $NOY' = 90° - \psi$ e l'angolo diedro compreso $= 180° - \theta$, abbiamo $\cos XOY' = \cos\alpha' = \cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\theta$; finalmente, poichè l'angolo che l'asse delle z fa con l'asse delle z' è eguale all'angolo θ, abbiamo $\gamma'' = \theta$, dunque

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta \\ a' &= \cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\theta \\ c'' &= \cos\theta \end{aligned}\right\}$$

considerando l'angolo solido formato da OY, OX', ON abbiamo ancora

ora ~~$a'' = \sqrt{1 - a^2 - a'^2}$~~ $b = -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta$.

Ciò posto $a'' = \sqrt{1-a^2-a'^2}$, $c = \sqrt{1-a^2-b^2}$, $c'' = \sqrt{1-c^2-c''^2} = \sqrt{a^2+b^2-c''^2}$

$b' = \sqrt{1-a^2-c''^2} = \sqrt{1-a^2-b^2+c''^2-a'^2}$, $b'' = \sqrt{1-b^2-b'^2} = \sqrt{a'^2+c'^2+b^2} = \sqrt{a^2+a'^2-c''^2}$ dunque

$$a'' = \sqrt{1-\cos^2\varphi\cos^2\psi - \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta - \cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi - \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\psi\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta} = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$$

$$b' = \sqrt{1-\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi - \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\psi\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\varphi\cos^2\psi\cos^2\theta - \cos^2\varphi\cos^2\psi - \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{\cos^2\psi\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\psi\cos^2\varphi + 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta} = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta$$

$$b'' = \sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\theta\cos^2\varphi} = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta$$

$$c = \sqrt{1-\cos^2\varphi\cos^2\psi - \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\psi - \operatorname{sen}^2\psi\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta + 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}^2\psi\cos\psi\cos\theta} = \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta$$

$$c' = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\psi\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta} = \operatorname{sen}\theta\cos\psi.$$

Differenziando questi valori di a, b, c ----- e sostituendoli valori nelle equazioni (1)

avremo le equazioni
$$\left.\begin{aligned} p\,dt &= \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta\, d\psi - \cos\varphi\, d\theta \\ q\,dt &= \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\, d\psi + \operatorname{sen}\varphi\, d\theta \\ r\,dt &= d\varphi - \cos\theta\, d\psi \end{aligned}\right\}$$
per determinare φ, ψ, θ in funzione del tempo t.

Lezione 46.ª

Movimento di un corpo esteso, rigido, sollecitato da un numero infinito di forze applicate a ciascuna molecola continuamente e comunque variabili in grandezza e direzione.

Cominciamo anche qui a far l'analisi Geometrica del problema.

Consideriamo nel corpo tre assi fissi e mobili col corpo, le coordinate non variabili col tempo di una molecola rispetto a questi assi siano x, y, z, alla fine d'un tempo t la molecola avrà cambiato di posizione nello spazio, perciò riferiamola a tre assi assolutamente fissi nello spazio; siano x', y', z' le coordinate della molecola rispetto a questi assi, evidentemente x', y', z' saranno funzioni di t e di x, y, z. in tali funzioni facendo $x=0, y=0, z=0$ avremo le coordinate dell'origine degli assi mobili rispetto agli assi fissi, e dunque queste coordinate le chiamiamo α, β, γ, saranno α, β, γ tre funzioni della sola variabile t.

Per conoscere la posizione del corpo dopo un tempo qualunque bisogna determinare la posizione degli assi mobili rispetto agli assi fissi dopo questo tempo. Perciò ajutiamoci con un'altro sistema di assi, la cui origine coincida con quella degli assi mobili e tali che si mantengano sempre paralleli agli assi fissi, siano x_1, y_1, z_1 le coordinate della molecola (x, y, z) rispetto a questi assi. La posizione del corpo sarà determinata quando conosceremo α, β, γ e gli angoli φ, ψ, θ relativi agli assi delle x, y, z e delle x_1, y_1, z_1, come nella Lez.ª precedente.

Quindi è evidente, che il moto di un corpo libero si compone di due moti, uno di traslazione del punto $A.B.C$ rispetto agli assi fissi delle x'', y'', z'', l'altro di rotazione intorno a questo punto.

Considerando il corpo come dotato soltanto di questo 2° movimento ~~di luogo~~ gli assi delle x, y, z sono fissi. Si può dunque determinare la posizione degli assi mobili delle x, y, z rispetto agli assi nello stesso modo, che nel problema antecedentemente risoluto, prendendo cioè per variabili ausiliarie le velocità angolari di rotazione p, q, r del corpo intorno ai tre assi delle x, y, z.

Ciò posto le incognite da determinarsi sono dunque $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$.

Analizzato così il Problema passiamo ora a darne la soluzione completa.

Sia dm la massa della molecola (x, y, z), siano ad essa applicate le forze acceleratrici, le cui componenti parallele agli assi fissi sono X, Y, Z, le forze motrici impresse nel tempo dt alla molecola dm saranno $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$, per l'azione di queste forze la molecola passerà nel tempo dt alla posizione determinata dalle coordinate $x'' + dx''$, $y'' + dy''$, $z'' + dz''$, ed avrà dopo il tempo $t + dt$ parallelamente agli assi fissi le velocità assolute $\frac{dx''}{dt} + d.\frac{dx''}{dt}$, $\frac{dy''}{dt} + d.\frac{dy''}{dt}$, $\frac{dz''}{dt} + d.\frac{dz''}{dt}$. Ora le forze acceleratrici capaci di imprimere alla molecola dm le suddette velocità nel tempo dt sono $d.\frac{dx''}{dt}$, $d.\frac{dy''}{dt}$, $d.\frac{dz''}{dt}$ ossia $\frac{d^2x''}{dt^2}$, $\frac{d^2y''}{dt^2}$, $\frac{d^2z''}{dt^2}$, le forze motrici attuali della molecola dm sono dunque

$\frac{d^2x''}{dt^2}dm$, $\frac{d^2y''}{dt^2}dm$, $\frac{d^2z''}{dt^2}dm$, e quindi le forze da essa perdute nel tempo dt sono $\left(X - \frac{d^2x''}{dt^2}\right)dm$, $\left(Y - \frac{d^2y''}{dt^2}\right)dm$, $\left(Z - \frac{d^2z''}{dt^2}\right)dm$.

Queste forze pel principio di D'alembert devono farsi equilibrio per mezzo

Della resistenza dei vincoli, ora nel nostro caso il solo vincolo è la tenacità del corpo, che suppo-
-niamo assoluta, ma le condizioni d'equilibrio di un corpo tenuto dal solo vincolo della tena-
-cità sono le stesse condizioni d'equilibrio di un corpo rigido, dobbiamo dunque ritenere, che
le somme delle componenti parallele agli assi delle forze perdute sono nulle, e che le tre
somme dei momenti di rotazione delle stesse forze rispetto agli stessi assi sono nulle.

La 1ª condizione è espressa dalle tre equazioni

$$\int\left(X-\frac{d^2x''}{dt^2}\right)dm=0\ ,\quad \int\left(Y-\frac{d^2y''}{dt^2}\right)dm=0,\quad \int\left(Z-\frac{d^2z''}{dt^2}\right)dm=0$$

, in cui gli integrali che sono nei primi membri vanno estesi a tutta la massa del corpo.

Trasportiamoci agli assi delle x',y',z', faremo perciò $x''=x'+\alpha$, $y''=y'+\beta$, $z''=z'+\gamma$, e quindi sostituiremo. Sostituendo le equazioni diventano

$$\left.\begin{aligned}&\int X\,dm-\int\frac{d^2\alpha}{dt^2}dm-\int\frac{d^2x'}{dt^2}dm=0\\&\int Y\,dm-\int\frac{d^2\beta}{dt^2}dm-\int\frac{d^2y'}{dt^2}dm=0\\&\int Z\,dm-\int\frac{d^2\gamma}{dt^2}dm-\int\frac{d^2z'}{dt^2}dm=0\end{aligned}\right\}$$

, ora α,β,γ sono funzioni della sola variabile t, dunque se M sia la massa totale

$$\left\{\begin{aligned}&\int\frac{d^2\alpha}{dt^2}dm=\frac{d^2\alpha}{dt^2}\int dm=M\frac{d^2x}{dt^2}\\&\int\frac{d^2\beta}{dt^2}dm=M\frac{d^2y}{dt^2}\\&\int\frac{d^2\gamma}{dt^2}dm=M\frac{d^2z}{dt^2}\end{aligned}\right.$$

Inoltre i limiti degli integrali $\int\frac{d^2x'}{dt^2}dm$, $\int\frac{d^2y'}{dt^2}dm$, $\int\frac{d^2z'}{dt^2}dm$ essendo costanti

$$\frac{d.\int x'dm}{dt}=\int\frac{dx'}{dt}dm\ ,\ \text{e}\ \frac{d^2\int x'dm}{dt^2}=\int\frac{d^2x'}{dt^2}dm,\ \frac{d^2\int y'dm}{dt^2}=\int\frac{d^2y'}{dt^2}dm,\ \frac{d^2\int z'dm}{dt^2}=\int\frac{d^2z'}{dt^2}dm,$$

questa osservazione indica una semplificazione che possiamo fare nelle nostre equa-
-zioni, cioè di prendere per origine degli assi delle x',y',z' un punto tale, che sia
$\int x'dm=0$, $\int y'dm=0$, $\int z'dm=0$ cioè di prendere per origine il centro di gravità del corpo,

allora $\int \frac{d^2x'}{dt^2} dm = 0$. $\int \frac{d^2y'}{dt^2} dm = 0$, $\int \frac{d^2z'}{dt^2} dm = 0$ e le equazioni che

assicurano l'equilibrio delle forze perdute contro ogni rischio di moto progressivo

diventano $\left.\begin{aligned} \int X dm &= M \frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ \int Y dm &= M \frac{d^2\beta}{dt^2} \\ \int Z dm &= M \frac{d^2\gamma}{dt^2} \end{aligned}\right\}$ ora quando un punto materiale si muove liberamente sotto l'azione di forze acceleratrici, le cui componenti parallele alle assi ortogonali di coordinate sono $\frac{\int X dm}{M}$, $\frac{\int Y dm}{M}$, $\frac{\int Z dm}{M}$ le equazioni determinatrici del movimento sono (pag.a 40). chiamando α', β', γ' le coordinate del punto dopo il tempo t, $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\int X dm}{M}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{\int Y dm}{M}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{\int Z dm}{M}$,

dunque quando un corpo solido, libero si muove sotto l'azione di un numero qualunque di forze acceleratrici, il moto progressivo del suo centro di gravità è lo stesso, come se in esso fosse concentrata tutta la massa del corpo, e ad esso fossero applicate tutte le forze che sono applicate al corpo.

Scriviamo adesso le equazioni che assicurano l'equilibrio delle forze perdute contro ogni rischio di moto rotatorio, ossia le equazioni dei momenti di rotazione.

Riferiamo questi momenti agli assi delle x, y, z, le somme dei momenti delle forze acceleratrici impresse saranno $\left.\begin{aligned} &\int (Yz - Zy) dm \\ &\int (Zx - Xz) dm \\ &\int (Xy - Yx) dm \end{aligned}\right\}$ chiamiamo per brevità F, G, H queste somme; le somme dei momenti delle forze motrici attuali saranno

$$\int\left(\frac{d^2y''}{dt^2} z' - \frac{d^2z''}{dt^2} y'\right) dm \quad \int\left(\frac{d^2z''}{dt^2} x' - \frac{d^2x''}{dt^2} z'\right) dm, \quad \int\left(\frac{d^2x''}{dt^2} y' - \frac{d^2y''}{dt^2} x'\right) dm.$$

e quindi $\left\{\begin{aligned} F' - \int\left(\frac{d^2y''}{dt^2} z' - \frac{d^2z''}{dt^2} y'\right) dm &= \text{somma dei momenti delle forze perdute} = 0 \\ G' - \int\left(\frac{d^2z''}{dt^2} x' - \frac{d^2x''}{dt^2} z'\right) dm &= 0 \\ H' - \int\left(\frac{d^2x''}{dt^2} y' - \frac{d^2y''}{dt^2} x'\right) dm &= 0 \end{aligned}\right.$

Mettiamo ancora qui $x''=\alpha+x'$, $y''=\beta+y'$, $z''=\gamma+z'$, le equazioni diventeranno

$$\left.\begin{aligned} F' &= \int\left(\frac{d^2y'}{dt^2}z' - \frac{d^2z'}{dt^2}y'\right)dm \\ G' &= \int\left(\frac{d^2z'}{dt^2}x' - \frac{d^2x'}{dt^2}z'\right)dm \\ H' &= \int\left(\frac{d^2x'}{dt^2}y' - \frac{d^2y'}{dt^2}x'\right)dm \end{aligned}\right\}$$

Ora queste equazioni sono le equazioni del moto del corpo rispetto al centro di gravità riguardato come fisso. Dunque

Quando un corpo rigido e libero si muove sotto l'azione di forze acceleratrici qualunque la rotazione del corpo intorno al centro di gravità è la medesima come se questo stesse fisso.

Il nostro problema si riduce a determinare il moto progressivo di un punto materiale a cui sono applicate delle forze acceleratrici qualunque, e il moto rotatorio di un corpo intorno ad un asse fisso, esso è dunque risoluto, poichè sappiamo risolver gli altri due problemi a cui esso si riduce. In ogni caso, che ci potremo proporre di un tal movimento bisognerà, che cerchiamo sempre prima di tutto la posizione del centro di gravità, la massa del corpo, e i suoi momenti d'inerzia principali rispetto al centro di gravità.

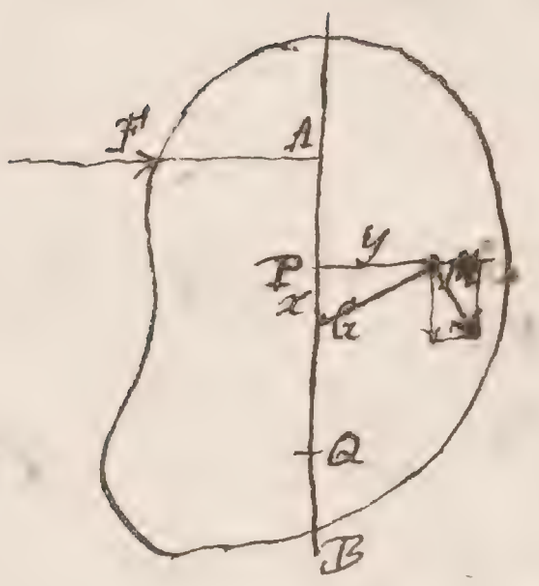
Il caso il più facile è di supporre che al corpo si dia un'impulso in una direzione, che passi pel centro di gravità, in tal caso vi ha un semplice moto di traslazione del centro di gravità, e tutti i punti del corpo descrivono curve parallele a quella, che questo descrive.

Se l'impulso giacia in uno di tre piani principali che passano pel centro di gravità per es. nel prendiamo questi per piani delle xy, xz, yz, sia il piano delle xy il piano dell'impulso; stante questo gli angoli D. M cogli assi delle x e delle y, mettiamo l'origine degli assi fissi nella posizione iniziale del centro di gravità, supponiamo che inizialmente gli assi fissi coincidano cogli assi mobili; il centro di gravità si muoverà equabilmente in linea retta con velocità $u=\frac{mv}{M}$, dinotando mv l'intensità dell'impulso, ed M la massa del corpo, e il corpo rotera equabilmente e permanentemente intorno all'

asse delle ζ con una velocità angolare Ω; sia a la distanza del centro di gravità dalla direzione dell'impulso, sarà $\Omega = \frac{a m V}{S_\zeta}$, S_ζ essendo il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse delle ζ.

Posciò dopo il tempo t il centro di gravità è alla distanza at sulla retta che esso percorre, e prendendo le coordinate $\begin{cases} x = at\cos\lambda \\ y = at\cos\mu \\ z = 0 \end{cases}$ rispetto agli assi fissi; i punti situati all'unità di distanza dal centro di gravità avranno descritto lo spazio $\omega t = \frac{a m V}{S_\zeta} t$, e l'angolo descritto dall'asse mobile delle x sarà $= \frac{a m V t}{S_\zeta} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$.

Lezione 47.ª



Nel problema antecedente supponiamo che la direzione dell'impulso sia normale all'asse delle y [illegible] giacendo però sempre in un piano normale ad un'asse principale, che passa pel centro di gravità G, sia u la velocità di traslazione del centro di gravità, ω la velocità angolare di rotazione del corpo attorno all'asse delle ζ, sarà

$$u = V\frac{m}{M}, \quad \omega = \frac{a m V}{S_\zeta} = \frac{a F}{S_\zeta}.$$

Consideriamo un punto del corpo proiettato sul piano della figura in M, la velocità di questo punto è u parallela alle y, di più essa gira con velocità angolare ω e con velocità assoluta $\omega\sqrt{x^2+y^2}$ attorno all'asse delle ζ, la quale si scompone nelle due $\begin{cases} -\omega y & \text{parallela alle } x \\ +\omega x & \text{parallela alle } y \end{cases}$, le componenti ortogonali della velocità del punto M sono dunque $\begin{cases} -\omega y & \text{parallelamente all'asse delle } x \\ u+\omega x & \text{parallelamente all'asse delle } y \end{cases}$.

se consideriamo un punto collocato sull'asse delle x, allora sarà $y=0$, e la componente della sua velocità si ridurranno poichè alla sola $u+wx$ parallela alle y, un tal punto si muove dunque in direzione perpendicolare all'impulso F.

Se questo punto non sarà collocato tra G e l'impulso ma sarà sulla parte negativa dell'asse delle x la sua velocità nel senso delle x sarà $u-wx$, ora, dato l'impulso ed il corpo, u ed w sono determinati, ed $\frac{u}{w}$ è per conseguenza costante, vi sarà dunque da G verso B un punto Q per cui $x=\frac{u}{w}$, ossia $u-wx=0$ nel punto cui velocità parallele alle y sono nulle starà fermo per un'istante di ossia finchè gli assi delle x e delle y non cangieranno di posizione, e quindi l'asse perpendicolare al piano della figura in Q potrà riguardarsi come asse istantaneo di rotazione.

Ora $u=\frac{F}{M}$, $w=\frac{Fa}{S}$, dunque $x=\frac{u}{w}=\frac{S}{Ma}$, ed $a=\frac{S}{Mx}$. Da questa ultima espressione sottraiamo ad a $AQ-x$ avremo $AQ=\frac{S+Mx^2}{Mx}$, ora $S+Mx^2$ è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse istantaneo di rotazione, e dunque sia eguale S' questo momento e facciamo $AQ=a'$, abbiamo $a'=\frac{S'}{Mx}$. Questa [pag. 168] precisamente la formula che ci da il Centro di percossa del nostro corpo considerato come mobile intorno all'asse istantaneo condotto per Q, inoltre questo asse è asse principale, l'impulso è diretto in senso normale al piano condotto pel centro di gravità G per quest'asse, il punto A è dunque il centro di percossa del sistema rispetto all'asse che sta immobile; e quindi concludiamo che al principio del moto del nostro corpo ci ha un'asse istantaneo attorno al esso gira il quale non soffre alcuna percossa. Dopo il 1° istante però quell'asse non potrà non soffrir pressione (v. pag.a 171), esso dunque si scuoterà ed il corpo prenderà a muovesi in altra guisa.

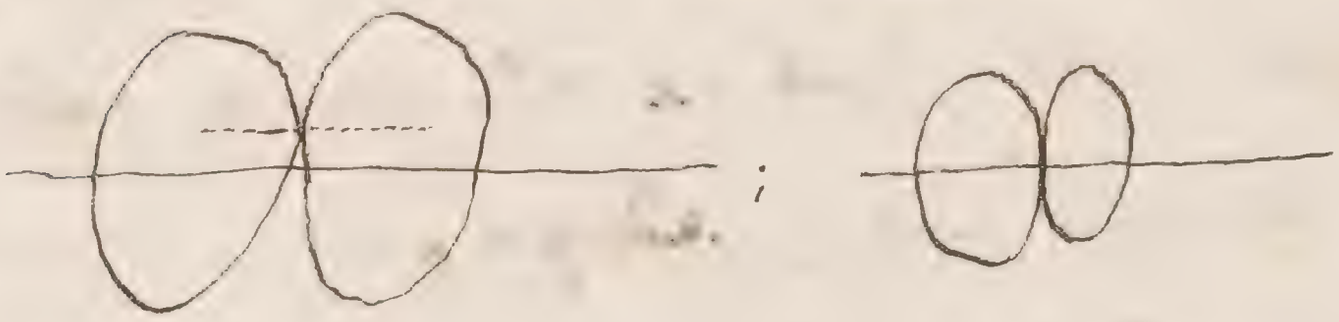
La Meccanica teorica dei Corpi solidi l'abbiamo studiata in tutta la sua estensione, non restaci dunque altro a fare che delle applicazioni.

Della Percossa.

Quando due corpi vengono ad incontrarsi con certe velocità e nell'incontro si toccano colle loro superficie, se immaginiamo il piano tangente comune alle due, e le velocità scomposte in due una normale al piano tangente, l'altra in questo piano, o le componenti normali saranno coppianti ed eguali, e i Corpi non si premeranno, o le componenti normali saranno coppianti ed ineguali, oppure non coppianti. Allora si ha urto, si ha percossa tra i due Corpi.

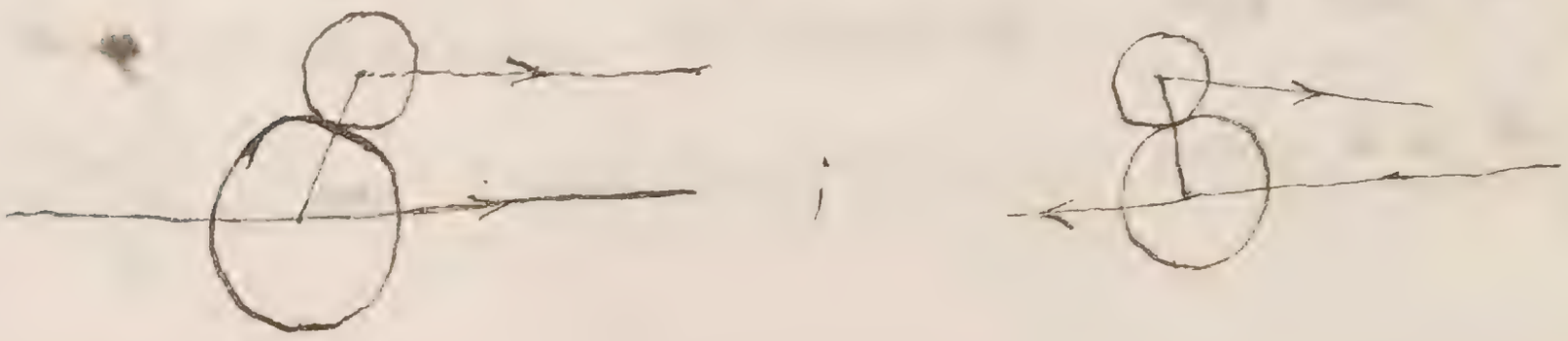
Noi trascuriamo adesso l'attrito, se tenessimo conto dell'attrito le forze tangenziali avrebbero anch'esse una influenza sulla percossa ogniqualvolta che non fossero coppianti ed eguali. Possono presentarsi varii casi rispetto alla direzione degli incontri.

Se i corpi che vengono ad urtarsi si muovono sulla stessa retta, e la normale



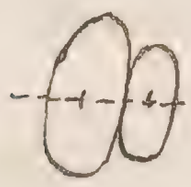
comune ai due corpi nel punto di contatto è parallela o coincidente con la direzione delle loro velocità, ossia se hanno velocità perpendicolari al piano tangente comune, la percossa è diretta.

Se le direzioni dei punti che vengono in contatto sono oblique al piano tangente, la percossa è obliqua.

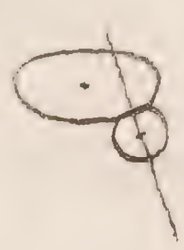


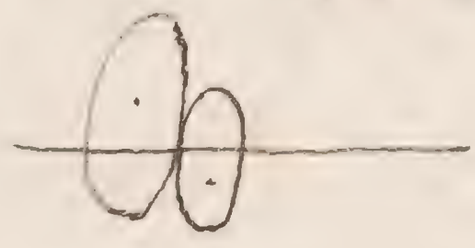
Quanto alla posizione dei centri di gravità dei corpi rispetto alla normale comune devonsi ancora distinguere due casi.

Sia la percossa diretta ossia la direzione comune delle velocità dei due corpi, che vengono a contatto sia normale al piano tangente, potrà avvenire che la normale comune passi pei centri di gravità dei due corpi; allora la percossa è centrale.



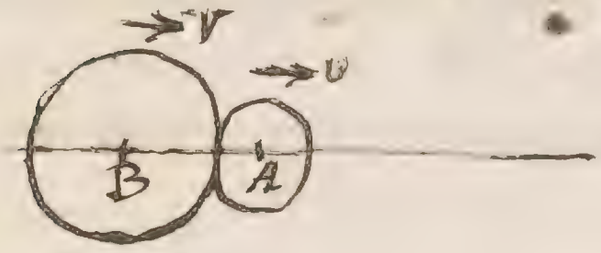
; o la normale comune non passerà pei centri di gravità, allora la percossa è eccentrica.





Posto ciò vediamo in che cosa consista il fenomeno della percossa.

Prendiamo un esempio di percossa diretta e centrale.



Sieno due sfere A, B camminanti con le velocità v, V nello stesso senso, e secondo la linea che unisce i loro centri; se $V > v$ dopo un certo tempo la sfera B incontra la sfera A; Dal contatto nasce una forza, una pressione vicendevole delle due sfere, che accelera il moto di A, ritarda quello di B; questa forza o pressione nulla al principio cresce fino ad un certo tempo, e decresce quindi per di nuovo diventar nulla alla fine dell'urto, ossia quando i corpi avranno velocità eguali. Se dunque chiamiamo π questa pressione, π sarà una funzione di t tale che quando $t=0$, $\pi=0$. Inoltre la forza π nel tempo dt produce nella sfera di massa A una velocità $\frac{\pi}{A}dt$ nel senso di v, epperciò una velocità espressa da $\frac{1}{A}\int \pi dt$ nel tempo t, produce nella sfera di massa B una velocità $\frac{1}{B}\int \pi dt$ diretta in senso contrario a V nel tempo t, le velocità attuali delle due masse dopo il tempo t sono dunque $v+\frac{1}{A}\int \pi dt$ per la massa A; alla fine dell'urto queste velocità sono eguali, se dunque chiamiamo $V-\frac{1}{B}\int \pi dt$ per la massa B, θ la durata dell'urto, sarà $v+\frac{\int_0^\theta \pi dt}{A} = V-\frac{\int_0^\theta \pi dt}{B}$.

Ora possono avvenire due casi, o che il tempo θ la percossa sia finita, o che non sia finita, ma che si sviluppi una nuova azione di un corpo sopra l'altro, per cui la forza π cresca di nuovo, e di nuovo decresca finchè diventi nulla una seconda volta.

In questo caso si verificherà, nel tempo in cui la forza π avrà di nuovo agito sui corpi, essa avrà impresso di nuovo certe velocità, che chiamando π' la pressione che si sviluppa in questo 2° periodo, e θ' la durata di questo, saranno espresse dalle formole $\frac{1}{A}\int_0^{\theta'} \pi' dt$; $-\frac{1}{B}\int_0^{\theta'} \pi' dt$; queste velocità generalmente non essendo eguali la sfera B retrocederà con velocità $V - \frac{1}{B}\left[\int_0^{\theta} \pi dt + \int_0^{\theta'} \pi' dt\right]$, e la sfera A avanzerà con velocità $v + \frac{1}{A}\left[\int_0^{\theta} \pi dt + \int_0^{\theta'} \pi' dt\right]$.

Questo caso si verifica sempre qualunque ~~corpo~~ sieno i Corpi che noi facciamo urtare. Esiste infatti tra le molecole di un corpo qualunque una forza di attrazione detta attrazione molecolare, la quale si esercita soltanto a distanze insensibili, e che si cangia in repulsione se si ravvicinano le molecole togliendole dalla loro posizione d'equilibrio, ora per l'urto le molecole di due corpi si ravvicinano, ossia i Corpi si comprimono, sviluppasi dunque dopo l'urto una forza che tende a rimettere le molecole nella loro posizione primitiva, questa forza è conosciuta sotto il nome di elasticità.

Vi hanno dei corpi, che dopo essere stati compressi riprendono precisamente la stessa figura primitiva; in questi Corpi l'elasticità è perfetta; questi Corpi opponendo resistendo alla Compressione con la stessa energia con cui dopo cessata la Compressione tendono a ricuperare la forma primitiva, ~~se~~ ~~π=π'~~, impiegano lo stesso tempo a riacquistare la loro forma che hanno impiegato a perderla, epperciò sarà $\int_0^{\theta} \pi dt = \int_0^{\theta'} \pi' dt$.

Vi hanno dei Corpi che non riprendono dopo la Compressione esattamente la forma primitiva, ossia che sono meno elastici; i precedenti Corpi $\int_0^\theta \pi dt$, $\int_0^{\theta'} \pi' dt$ non sono eguali, siccome però questi due integrali, che non esprimono altro che le quantità di moto acquistate o perdute dai Corpi nel 1° e nel 2° periodo dell'urto detti Periodo di Compressione e Periodo di Restituzione, sono integrali definiti, ossia sono due numeri, possiamo dire, che $\int_0^{\theta'} \pi dt$ è proporzionale ad $\int_0^\theta \pi dt$; ora l'essere più o meno elastici i Corpi dipende dalla ~~forma~~ sostanza di cui essi sono formati; dunque per tutti i Corpi formati di una stessa sostanza le funzioni π, π' non variano, ed $\int_0^\theta \pi dt$, $\int_0^{\theta'} \pi' dt$ stanno sempre nello stesso rapporto; possiamo quindi dire senza cangiare la natura delle forze molecolari ossia le forme delle funzioni π, π' pei varii Corpi, che nel periodo di restituzione i due Corpi che sono urtati acquistano o perdono una quantità di moto proporzionale alla quantità di moto acquistata o perduta nel periodo di compressione, ossia che $\int_0^{\theta'} \pi' dt = p \int_0^\theta \pi dt$; il rapporto p il quale varia col variare della sostanza di uno dei due Corpi si chiama coefficiente di elasticità.

Quando i Corpi sono perfettamente elastici, allora $p=1$; quando sono privi affatto di elasticità, allora $p=0$, dunque è sempre compreso tra 0 ed 1.

Lezione 48ª.

Percossa diretta centrale di Corpi liberi.

Sieno due sfere omogenee di masse A B muoventisi sulla retta, che unisce i loro centri con le velocità V, v, le loro quantità di moto saranno AV, Bv, chiamiamo π la pressione che una sfera fa sull'altra nell'incontro, X la velocità comune che avranno dopo il periodo di compressione, sarà

$$\left.\begin{aligned} AX &= AV - \int \pi dT \\ BX &= Bv + \int \pi dt \end{aligned}\right\}$$

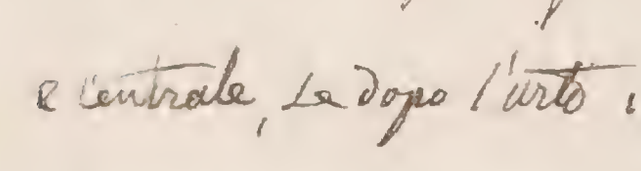
sommiamo membro a membro queste equazioni avremo $X = \frac{AV+Bv}{A+B}$.

Se i Corpi dopo l'urto rimangono aderenti essi si muoveranno insieme con la velocità X; $X = V-(V-v)\frac{B}{A+B}$, la quantità di moto perduta dalla massa

$X = v+(V-v)\frac{A}{A+B}$ A è dunque quale $(V-v)\frac{AB}{A+B}$, e la quantità di moto acquistata dalla massa B uguale $(V-v)\frac{AB}{A+B}$, nonvi ha dunque perdita di quantità di moto nell'urto.

Avanti l'urto la velocità del centro di gravità delle due masse era $\frac{AV+Bv}{A+B}$;

Infatti se consideriamo le masse in un tempo qualunque per es. un tempo t prima del loro incontro, e chiamiamo α, β le loro distanze in quel istante dal loro punto



d'incontro sarà $\alpha = Vt$, $\beta = vt$, e se chiamiamo X' la velocità del Centro di gravità G sarà $\alpha - AG = X't$, ma $AG = AB\frac{B}{A+B} = (\alpha-\beta)\frac{B}{A+B} = t(V-v)\frac{B}{A+B}$,

Dunque $X' = V-(V-v)\frac{B}{A+B} = \frac{AV+Bv}{A+B}$.

Ora $\frac{AV+Bv}{A+B} = X$, dunque $X' = X$, ma X è la velocità del Centro di gravità dopo l'urto, Dunque quando due Corpi si percotono e la percossa è diretta e Centrale, se dopo l'urto i Corpi rimangono aderenti, l'urto non cangia la velocità del Centro di gravità.

Abbiamo inoltre dimostrato (V. pag.ª 116.), che quando due masse si attraggono vicendevolmente con una legge qualunque il Moto del Centro commune di gravità non è alterato da questa attrazione. Rimando ora questo Teorema all'altro dicendo, che in generale quando due masse agiscono in qualunque maniera una sull'altra senza essere soggette a verun forza estrinseca il Centro di gravità o si muove equabilmente in linea retta se le masse erano ricevuti degli impulsi iniziali, o sta fermo.

Questo teorema vedremo fra poco, che è ancora vero se i Corpi non rimangono uniti dopo l'urto.

Non è più difficile il dimostrare che se le masse sieno in maggior numero il teorema sta ancora. Un tal principio è conosciuto sotto il nome di Principio della Conservazione del movimento del centro di gravità.

Se le due sfere A e B dopo l'urto non rimangono aderenti, ossia se sono elastiche, riacquisteranno o perderanno nel periodo di restituzione una quantità di moto proporzionale a quella acquistata o perduta nel periodo di compressione. Ora la quantità di moto perduta dalla massa A nel 1° periodo è $(V-v)\frac{AB}{A+B}$, la quantità di moto acquistata dalla massa B è $(V-v)\frac{AB}{A+B}$, dunque delle due masse A e B nel periodo di restituzione la 1ª perde, la 2ª acquista la quantità di moto $p(V-v)\frac{AB}{A+B}$, p essendo il coefficiente d'elasticità; dunque le velocità finali delle masse sono per la massa A ... $V-(1+p)(V-v)\frac{B}{A+B}$

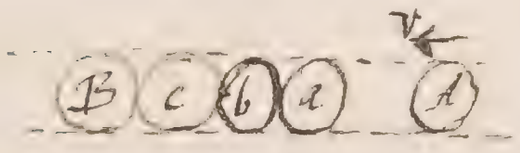
per la massa B ... $v+(1+p)(V-v)\frac{A}{A+B}$

Se le due sfere prima di urtarsi fossero mosse nello stesso senso bisogna in questa formola cambiare il segno a v.

Supponiamo fare una applicazione delle formole che le due sfere tutt'affatto siano eguali, che cioè sia $A=B$, allora le velocità finali delle masse diventano ... $\begin{cases} X' = \frac{1}{2}\left[V(1-p)+v(1+p)\right] \\ X'' = \frac{1}{2}\left[V(1+p)+v(1-p)\right] \end{cases}$

E inoltre le sfere sono perfettamente elastiche, ossia se $p=1$, sarà $X'=v$, $X''=V$, le sfere dunque in questo caso si cambiano le velocità.

Prendiamo per altro esempio un numero qualunque di palle perfettamente elastiche ed eguali, che abbiano i loro centri di gravità in linea retta, e che tocchino a contatto l'una dell'altra. Supponiamole tutte in riposo, e che una palla A eguale ad esse venga a percuoterle con velocità V, tutte le sfere staranno ferme fuorchè l'ultima B che partirà colla velocità V.



Infatti la palla A perfettamente elastica ed eguale alla palla a incontra con velocità V la palla a che ha una velocità nulla, perciò, che poc'anzi abbiamo detto la palla a dopo l'urto tende a muoversi con velocità V, ma non può muoversi prima di aver spinte le altre palle, urta intanto con velocità V contro la palla b che è in riposo, questa tende a muoversi con velocità V, comunica perciò questa velocità alla massa c, che la comunica alla massa B; questa non trovando più intoppo parte con velocità V.

Le accettino mandate due palle insieme con velocità V percuotere le palle
ferme sarebbero partite [illegible] due ultime di questa, e ciò è evidente poiché la massa
~~della palla~~ percutiente è 2A dev'essere una massa 2A, ogni le accettino
gettate 5 palle contro le 4 palle ferme sarebbero partite le 4 palle ferme e una
delle palle percutienti.

Supponiamo che le palle ferme non siano elastiche perfettamente e non siano
eguali, ma che per tutte il coefficiente d'elasticità sia p, e le loro masse vadano
decrescendo secondo una progressione geometrica, la cui ragione sia q, cosicché
le masse siano $A, Aq, Aq^2, \dots Aq^{n-1}$. Una palla di massa A viene a
percuotere la 1ª massa con velocità V, si domandano le velocità con cui ciascuna
palla si muoverà.

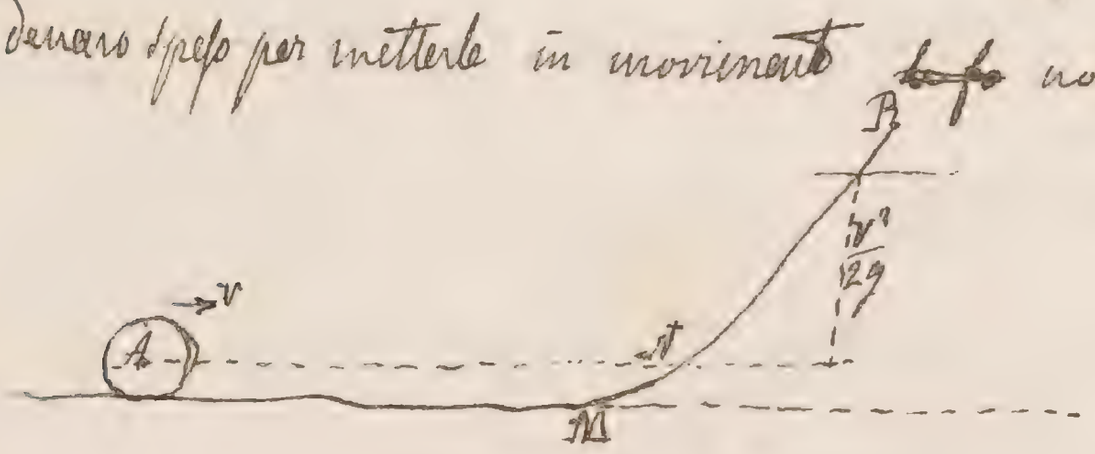
La 1ª palla percutiente ritorna indietro con velocità $\frac{1}{2}\left[V(1-p)+V(1+p)\right]$ la 1ª palla
A della serie riceve la velocità $\frac{1}{2}V(1+p)$; questa urta la massa Aq, retrocede con
velocità $\frac{1}{2}V(1+p)\frac{q}{1+q}=\frac{1}{2}V\frac{1-pq}{1+q}(1+p)$, e la massa Aq riceve la velocità $\frac{1}{2}V\frac{1+p}{1+q}(1+p)$
Questa urta la palla Aq^2, retrocede con velocità $\frac{1}{2}V\frac{(1+p)^2}{1+q}\cdot\frac{1-pq^2}{1+q^2}=\frac{1}{2}V\left(\frac{1-pq}{1+q}\right)\left(\frac{1+p}{1+q}\right)(1+p)=\frac{1}{2}V\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^2(1+p)$
e la palla Aq^2 riceve la velocità $\frac{1}{2}V\frac{(1+p)^2}{1+q}\cdot\frac{1+p}{1+q}=\frac{1}{2}V\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^2(1+p)$; questa
urta la palla Aq^3, retrocede con velocità $\frac{1}{2}V\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^3(1-pq)$, e la palla Aq^3 riceve
la velocità $\frac{1}{2}V\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^3(1+p)$; questa urta la palla Aq^4, la palla Aq^4 urta la palla Aq^5,
e così di seguito, sinché la palla Aq^{n-2} urta l'ultima Aq^{n-1}; La palla Aq^{n-2}
retrocede con velocità $\frac{1}{2}V\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{n-1}(1-pq)$. la palla Aq^{n-1} parte con velocità $\frac{1}{2}V\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{n-1}(1+p)$.

anche qui la quantità di moto dopo l'urto non ha variato, ma la velocità del centro di gravità è eguale alla somma delle quantità di moto dei due corpi elastici divisa per la somma delle masse, il moto del centro di gravità si conserva dunque lo stesso dopo l'urto ancorchè i corpi siano elastici. La stessa cosa si dica per più corpi elastici che vengano a percuotersi.

Potiamo qui proporci un problema; Cosa bisogna spendere per imprimere le velocità V, v alle masse A.B.

La misura della spesa necessaria per mettere una massa in movimento è la quantità d'azione, ossia il prodotto della forza motrice per la distanza percorsa dal suo punto d'applicazione, ora per imprimere la velocità V alla massa A la quantità d'azione necessaria è $\frac{1}{2}AV^2$. La spesa necessaria per mettere in moto le masse A e B è dunque proporzionale ad AV^2+Bv^2.

Se le masse movendosi non ~~E~~ incontrano alcuna resistenza e non si incontrano volendo riacquistare il denaro speso per metterle in movimento ~~lo~~ non ho che a farle montare sopra un piano inclinato NB, che unito continuo al piano orizzontale, allora le masse montando su pel piano con velocità iniziali V. v saliranno fino alle altezze $\frac{V^2}{2g}$, $\frac{v^2}{2g}$, donde ricaveremo acquistando le stesse velocità V. v; che poco a tale velocità posto fare comunicare dalle masse da una qualche macchina, avrò così guadagnato il denaro che mi sarebbe stato necessario di spendere per mettere in moto la macchina, e che è precisamente quale a quello speso a mettere le masse in movimento.



Se le masse nel loro movimento si incontrano, generalmente vi ha perdita di forza viva.

Infatti x', x'' essendo le velocità delle masse dopo l'urto, la perdita di forza viva è espressa dalla

formola $AV^2 + Bv^2 - (AX'^2 + BX'^2) = (1-p^2)\frac{AB}{A+B}(V-v)^2$, formola ch'è sempre positivo poichè p non può mai essere >1. Quando $p=1$, cioè quando le masse sono perfettamente elastiche il valore della formola è 0, la perdita di forza viva è dunque nulla in questo Caso.

Lezione 19ª

Nel caso generale dell'urto dei corpi vi son le movimenti da determinare. Due di rotazione e due di traslazione, e le incognite del problema sono 12. cioè due velocità di traslazione, 6 velocità di rotazione intorno agli assi principali che passano pei Centri di gravità dei Corpi, e 6 angoli per determinare la posizione degli assi principali rispetto a tre assi fissi nello spazio.

Noi risolveremo alcuni Casi particolari, che indicheranno la via da tenersi in ogni altro Caso.

Un corpo ritenuto ~~dall'~~ da cui' asse immobile viene urtato da un corpo rispetto cui la percossa è diretta e Centrale, si domandano i movimenti dei due corpi dopo l'urto. In questo Caso due sono le incognite, la velocità angolare di rotazione intorno all'asse fisso del Corpo urtato, e la velocità di traslazione del Corpo urtante.

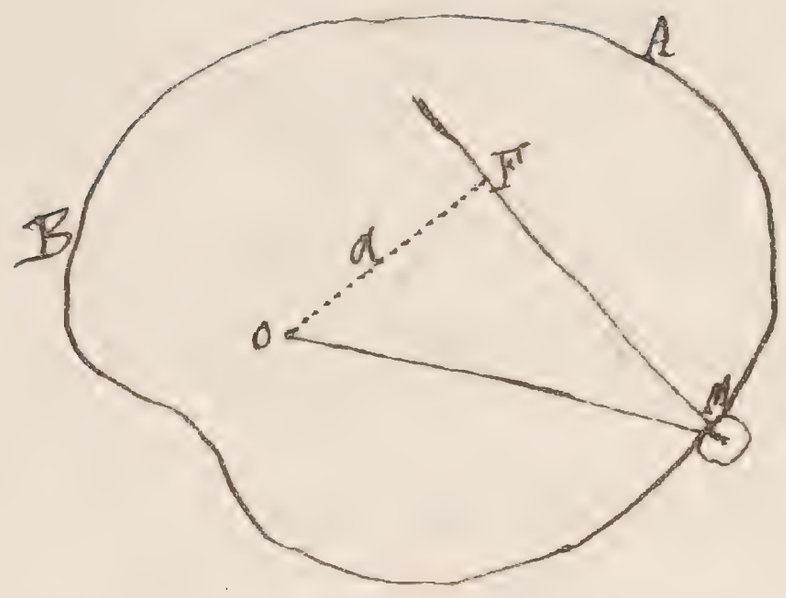
Sono dati M massa urtante, V velocità di questa,

M massa urtata,

S momento d'inerzia di questa rispetto all'asse di rotazione.

In questo urto possono avvenire due Casi, o le masse rimangono aderenti dopo l'urto, ovvero, in quest'ultimo Caso o la elasticità è insensibile, o è sensibile: noi considereremo a parte questi tre Casi differenti.

1° Caso.



Sia a la dijtanza dall' afse fijso alla direzione della percojsa. Suppongo che la normale alla jsuper-ficie del corpo urtato giaccia nel piano normale all'afse immobile condotto pel punto di contatto M, chiamo S il momento d'inerzia della massa urtante m rijpetto all'afse fijso, che passa per O, la velocità angolare ω con cui le masse aderenti prenderanno a rotare intorno ad O sarà

$$\omega = \frac{a m V}{S + 1}.$$

Se il volume della massa m sarà molto piccolo, la massa si potrà confiderare raccolta nel Centro di gravità, la dijtanza da O a queslo centro si confonderà sensibilmente con OM e sarà $S = m \cdot \overline{OM}^2$, oppure chiamando l la dijtanza OM $S = ml^2$, e quindi $\omega = \frac{amV}{S + ml^2}$.

Così all'istante della percojsa, come nella Continuazione del moto l'afse joffrirà degli jsforzi.

All'istante della percojsa se l'afse fijso è un'afse principale della massa urtata, e se la massa m percjsi confiderare concentrata in M, il punto O e un punto situato jull'afse a dijtanza ζ dal punto O joffrono parallelamente a due afsi ortogonali OX, OY condotti nel piano della percojsa MAB gli jsforzi $p = \frac{amV}{S + ml^2}(M+m)Y$, $q = mV - \frac{amV}{S+ml^2}X$

$p' = 0$, $q' = 0$ (in cui le formole X, Y

jono le coordinate del Centro di gravità comune delle due masse); Essendo $p' = 0$, $q' = 0$, concludiamo, che il jolo punto O joffre jcojsa all'istante della percojsa. Nella Continuazione del moto, come al principio, il jolo punto O joffre pressione (V. pag.a 170), e le Componenti parallele agli afsi OX, OY della pressione jono $\Pi = \frac{a^2 m^2 V^2}{(S+ml^2)^2}(M+m)X$, $\Sigma = \frac{a^2 m^2 V^2}{(S+ml^2)^2}(M+m)Y$.

Volendo tener conto dell' attrito ~~del~~ che nasce dalla proprietà del sistema rotante sull'asse bisogna,

che supponiamo l'asse un cilindretto il cui raggio sia b, allora, chiamando K l'adiz.ne del C.° di gr.à dell'asse,

Ω la velocità angolare del sistema dopo un tempo t, e trascurando la massa d'

il momento d'inerzia dell'asse rispetto alla massa sul momento d'inerzia del sistema,

l'equazione del movimento rotatorio del sistema sarà

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{f\Omega^2 (M+m) K b}{S+ml^2} .$$

Questa equazione integrata dà $t = \frac{S+ml^2}{(M+m)Kbf}\left(\frac{1}{\Omega} + bzt.\right)$, e poichè a $t=0$ deve

corrispondere $\Omega = \omega$, $t = \frac{S+ml^2}{(M+m)Kbf}\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{S+ml^2}{amV}\right)$, donde ricavasi

$$\Omega = \frac{(S+ml^2)amV}{famV(M+m)Kbt + (S+ml^2)^2} .$$

2° Caso.

Se la massa m non resta aderente con M, ma le masse non sono elastiche allora

le incognite da determinarsi sono due, la velocità angolare della massa M, e la velocità

relativa progressiva della massa m.

Chiamo u la 1ª, u la 2ª, la velocità perduta nell'urto sarà V−u, e la quantità di moto

perduta dalla massa m sarà m(V−u); questa quantità di moto fu trasmessa alla massa

M. Dunque $\omega = \frac{am(V-u)}{S}$. Inoltre l'urto essa quando le masse hanno velocità

eguali ~~Dunque u = a~~ nel senso normale, ora la velocità assoluta del punto

M considerato come appartenente alla massa M è $\omega . MO$, la componente normale

di questa velocità è $a\omega$, la velocità dello stesso punto, nel senso della normale, considerato

come appartenente alla massa m è u. Dunque $u = a\omega$.

Dalle due equazioni $\omega = \frac{am(V-u)}{S}$, $u = a\omega$ ricaviamo facilmente $\begin{cases} \omega = \frac{amV}{S+a^2m} \\ u = \frac{a^2mV}{S+a^2m} \end{cases}$.

a è sempre < 1, dunque ω è maggiore nel caso delle masse separate,

che nel caso delle masse unite.

La velocità perduta dalla massa m è $= V - \frac{a^2mV}{S+a^2m} = \frac{VS}{S+a^2m}$, e la quant.à di moto perduta

è $= \frac{m'SV}{S+a^2m}$.

3° Caso.

Nel periodo di restituzione la ~~restit~~ elasticità restituisce in senso contrario una quantità di moto proporzionale alla quantità di moto perduta, le frangie ci, ci siano i valori delle velo-cità delle masse m, M alla fine dell'urto sarà

$$u' = u - \frac{p S V}{S + ma^2} = V \frac{ma^2 - pS}{S + ma^2} .$$

$$w' = w(1+p) = \frac{amV(1+p)}{S + ma^2} .$$

Può avvenire che dopo l'urto il corpo urtante abbia una velocità diretta in senso contrario alla 1ª, o una velocità diretta nello stesso senso ritenendo una parte della velocità che aveva, oppure che si arresti, secondochè $ma^2 - pS < 0$, o $ma^2 - pS > 0$, o $ma^2 - pS = 0$.

Quando $p=1$, $u' = V \frac{ma^2 - S}{S + ma^2}$, e secondochè $S > 0 < ma^2$ il corpo ritorna o progredisce, se $S = ma^2$ il corpo si ferma, facciamo $S = MK^2$, potremo scrivere che il corpo si fer-ma quando $MK^2 = ma^2$ ossia $m : M :: K^2 : a^2$, ossia quando le masse sono in ragione in--versa del quadrato del raggio di giratione e della distanza a.

Sia ora la massa M ritenuta non più dall'asse fisso, ma soltanto da un punto fisso. Se la direzione della percossa è in uno dei piani ~~principali~~ che passano pel punto fisso, e se dopo l'urto la massa m resta aderente alla massa M, queste masse prenderanno a muoversi intorno all'asse normale al piano della percossa con velocità angolare

$$w = \frac{amV}{S+I} = \frac{amV}{S+ml^2} ,$$ e continueranno a muoversi intorno allo stesso asse colla stessa velocità, ossia il moto sarà eguabile intorno all'asse principale che passa pel punto fisso.

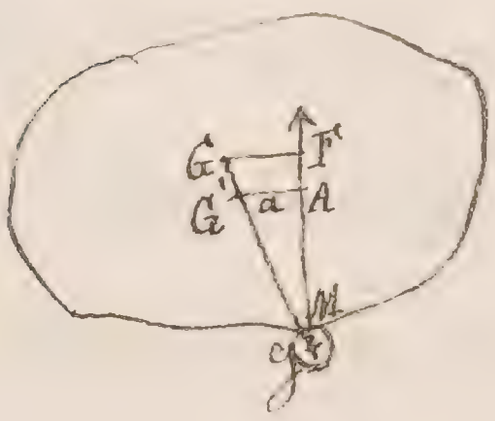
se le masse non rimangono aderenti dopo l'urto, e non sono elastiche,
la massa M prende a rotare con moto equabile intorno all'asse principale
normale al piano della percossa con velocità angolare $w = \frac{amV}{S+a^2m}$,
e la massa m progredisce nel senso della normale con velocità $u = \frac{a^2mV}{S+a^2m}$.

Se finalmente le masse non rimangono aderenti dopo l'urto e sono elastiche
la massa M prende a girare intorno al suddetto asse con velocità angolare
$w = \frac{amV(1+p)}{S+ma^2}$, e la massa m progredisce nel senso normale con velocità

$$u = V\,\frac{ma^2 - pS}{S+ma^2}.$$

Sia la massa M assolutamente libera.

Supponiamo che il piano della percossa sia uno dei tre piani principali rispetto
al centro di gravità commune delle due masse. Le quali dopo l'urto rimangono
aderenti, il centro commune di gravità si muoverà con moto equabile in
linea retta con la velocità $u = \frac{mV}{M+m}$, e i corpi roteranno insieme intorno
all'asse condotto per questo centro normalmente al piano dell'impulso con
velocità costante $w = \frac{amV}{S+s}$, S, s spendo i momenti d'inerzia delle
due masse rispetto all'asse di rotazione, a spendo la distanza del centro di
gravità commune alla direzione della percossa.

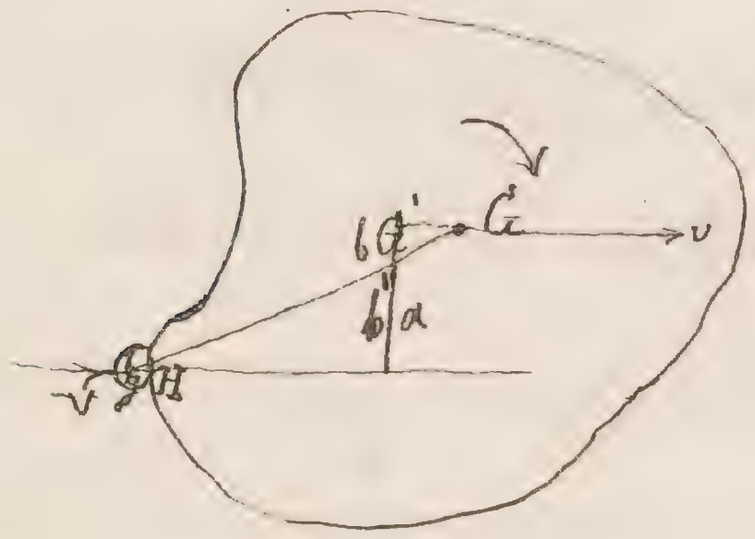


Ora la distanza che cerchiamo è ordinariamente la
distanza GF del centro di gravità della massa M alla
direzione della percossa, perciò bisogna che introduciamo GF
in vece di a, ma GF : a :: Gq : G'q :: M+m : M, dunque

$$a = GF\,\frac{M}{M+m}, \text{ e } w = GF\,\frac{mMV}{(S+s)(M+m)}.$$

Lezione 80.ª

Nel problema precedente supponiamo che la massa urtata abbia una velocità parallela a quella della massa urtante, e che il piano dell'impulso sia come già supponevamo precedentemente contenga il punto di contatto e il piano principale rispetto al centro comune G' di gravità.



Le masse rimangano aderenti dopo l'urto. Sia a la distanza delle direzioni dei centri di gravità delle due masse prima dell'urto, e siano b, b' le distanze del centro comune G' da queste direzioni. Chiamo u la velocità del centro comune G' dopo l'urto, ω la velocità di rotazione comune intorno ad un'asse che passa per G'; il centro G muovendosi come se ad esso fossero immediatamente applicate le quantità di moto Mv, mV, o in esso fosse concentrata tutta la massa M+m, esso si muoverà evidentemente in direzione parallela alle direzioni di V, v con la velocità $u = \frac{mV + Mv}{M+m}$; inoltre le masse rotando intorno a G' come se questo fosse fisso, esse roteranno intorno all'asse principale che passa per G' da sinistra verso destra con velocità angolare $\omega = \frac{Mbv - mb'V}{S+1}$; ora $b = a\frac{m}{M+m}$, $b' = a\frac{M}{M+m}$, dunque $\omega = \frac{aMm(v-V)}{(S+1)(M+m)}$.

Se V > v ossia se ω sarà negativa, la rotazione si farà da destra verso sinistra.

Le masse non rimangano aderenti dopo l'urto, e non sieno elastiche; la massa urtata prenderà un moto progressivo ed uno di rotazione intorno al proprio centro di gravità; la massa urtante prenderà solo un moto progressivo, poichè rispetto ad essa la percossa è diretta e centrale.

Sia x la velocità del moto progressivo del centro di gravità della massa urtata,

u la velocità progressiva della massa urtante

w la velocità angolare di rotazione della massa urtata intorno al centro di gravità,

le quantità di moto impresse alle due masse ~~saranno~~ essendo Mv, mV, e

le quantità di moto attuali essendo Mx, mu, sarà $Mx+mu = Mv+mV$.

Inoltre in perde nell'urto la quantità di moto $m(V-u)$, questa produce il moto rotatorio della massa M, dunque $w = \frac{am(V-u)}{S}$.

Finalmente siccome le masse sono elastiche l'urto cessa quando quando le velocità di due punti di contatto sono eguali, ora la velocità nel senso della normale in questo senso del punto H ~~sarà~~ è $x+aw$ considerando come appartenente alla massa M, dè u considerando come appartenente alla massa m. Dunque $u = x+aw$.

Dalle tre equazioni $Mx+mu = Mv+mV$, $wS = am(V-u)$, $u = x+aw$ ricaviamo facilmente

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{S(Mv+mV)+Mma^2V}{S(M+m)+Mma^2} \\ x &= \frac{S(Mv+mV)+Mma^2v}{S(M+m)+Mma^2} \\ w &= \frac{aMm(V-v)}{S(M+m)+Mma^2} \end{aligned}\right\}$$

Se i due corpi hanno elasticità sensibile, e p è il coefficiente dell'elasticità, la massa m per l'elasticità riacquista in senso contrario la quantità di moto $pm(V-u)$, ed avrà dopo l'urto la velocità $u' = u-p(V-u)$; la massa M

acquista la velocità $p(x-v)$ ossia $p\frac{m}{M}(V-u)$, essa ha dunque dopo l'urto la velocità $x' = x + p\frac{m}{M}(V-u)$; finalmente la data quantità di moto $m(V-u)$ avendo prodotta la velocità angolare w, la quantità di moto $pm(V-u)$ produrrà la velocità pw, quindi alla fine dell'urto $w' = w(1+p)$.

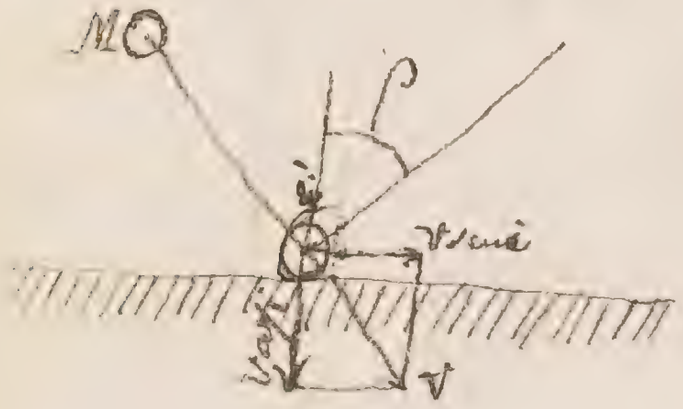
Sostituendo in u', x', w' ad u, x, w i valori trovati precedentemente avremo le velocità finali delle due masse espresse per i dati del problema.

Avvertasi che in questi due ultimi casi del problema la rotazione della massa M intorno al suo centro di gravità si fa intorno all'~~asse~~ ~~principale~~ normale al piano dell'impulso e questo sarà principale rispetto al Centro di gravità G, ora questo piano non coincide generalmente col piano in cui supponevamo diretta la percossa nel 1° caso.

Percossa obliqua.

Problema primo.

Una sfera viene a percuotere un piano immobile con una certa velocità data in grandezza e direzione si domanda quale sarà dopo l'urto la velocità della sfera e la sua direzione. Sia M la massa della sfera, V la sua velocità, i l'angolo che la direzione di questa fa colla normale al piano.



Se non vi ha elasticità, e non vi ha attrito, la sfera corre sul piano con velocità $V\,\mathrm{sen}\,i$, poichè scomponendo la velocità V in due una normale al piano, l'altra parallela a questo, la normale viene elisa dalla resistenza di questo. In questo caso la perdita di forza viva è $MV^2 - MV^2\,\mathrm{sen}^2 i$, cioè $MV^2\cos^2 i$.

Se vi ha elasticità ed il coefficiente di questa è p, nel periodo di restituzione la sfera che avea perduta nel periodo di compressione la velocità $v\cos i$ normalmente al piano acquista in senso contrario la velocità $pv\cos i$. Sia ha dunque dopo l'urto la velocità $pv\cos i$ secondo la normale al piano e la velocità $v\sin i$ secondo il piano, si muoverà perciò con velocità $u = v\sqrt{p^2\cos^2 i + \sin^2 i}$, la quale fa colla normale al piano l'angolo ρ pei cui $\tan g\rho = \frac{v\sin i}{pv\cos i} = \frac{1}{p}\tan g i$. Quest'angolo ρ si chiama angolo di riflessione, e l'angolo i angolo di incidenza. Le formole trovate dicono, che la velocità di riflessione è sempre minore della velocità d'incidenza, e che l'angolo di riflessione è sempre maggiore dell'angolo di incidenza, poichè p è sempre minore dell'unità.

Se $p=1$, $u=v$, $\rho = i$, dunque quando una sfera perfettamente elastica viene a percuotere un piano immobile e resistente, ella rimbalza con la velocità di incidenza e con angolo di riflessione eguale all'angolo di incidenza.

Introduciamo adesso la considerazione dell'attrito.

L'attrito fa perdere una quantità di moto proporzionale alla quantità di moto perduta normalmente dalla sfera, e dunque chiamiamo f il rapporto tra la quantità di moto $MV\cos i$ perduta normalmente al piano dalla sfera e la quantità di moto estinta nel piano tangente per l'attrito, questa sarà $fMV\cos i$.

Ciò posto quando i corpi non sono elastici, la sfera si muove sul piano con velocità $V(\sin i - f\cos i)$, e la perdita di forza viva è $= M\left[V^2 - V^2\sin^2 i - V^2 f^2\cos^2 i + 2fV^2\sin i\cos i\right]$

$$= MV^2\cos i\left[\cos i(1-f^2) + 2f\sin i\right],$$

la perdita di forza viva è dunque maggiore quando vi è attrito che quando questo non vi è.

Quando la sfera ed il piano sono elastici, la quantità di moto totale perduta dalla sfera nor-
-malmente al piano è $MV(1+p\cos i)$, la velocità perduta parallelamente al piano per ca-
-gione dell'attrito è dunque $fV(1+p\cos i)$, e la velocità rapidua della sfera cinquesto piano
è $V[\operatorname{sen} i - f(1+p)\cos i]$; dopo l'urto la velocità della sfera è dunque

$$u = \sqrt{p^2V^2\cos^2 i + V^2(\operatorname{sen} i - f(1+p)\cos i)^2}$$

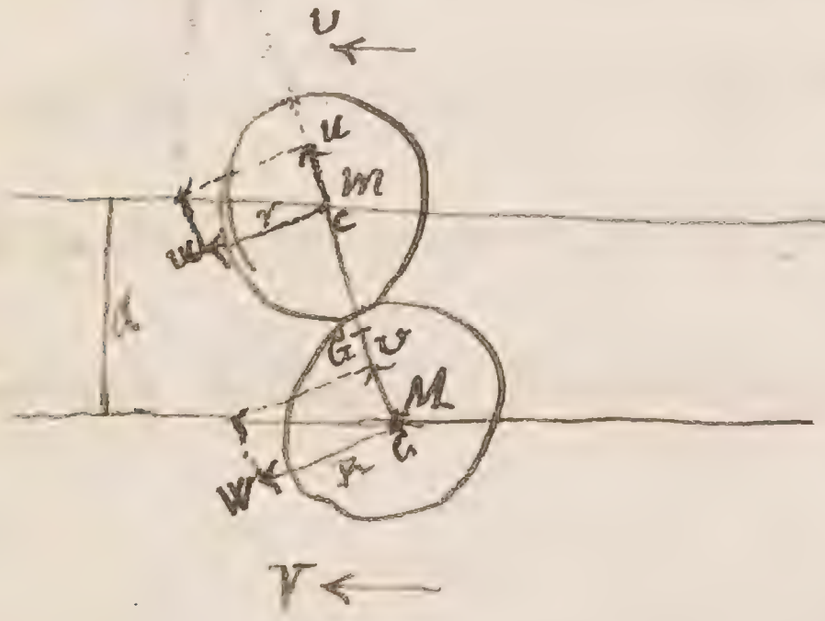
, e la sua direzione fa col piano un'
angolo ρ la cui tangente è $\operatorname{tang}\rho = \dfrac{\operatorname{sen} i - f(1+p)\cos i}{p\cos i} = \dfrac{1}{p}\operatorname{tang} i - f\dfrac{1+p}{p}$.

Da questa formula vediamo, che possono darsi dei valori di f e di p per cui si abbia
$\rho > i$ oppure $\rho < i$, o finalmente $\rho = i$. Imperocchè se $\operatorname{tang} i = f(1+p)$ allora $\rho = 0$,
se per es. $i = 45^\circ$, sarà $\rho = 0$, se sarà $f = \dfrac{1}{1+p}$.

La perdita di forza viva in questo caso è $= MV^2 - Mu^2 = MV^2\left[1 - p^2\cos^2 i - \operatorname{sen}^2 i - f^2(1+p)^2\cos^2 i + 2f(1+p)\operatorname{sen} i\cos i\right]$

$$= MV^2\cos i\left[\cos i(1-p^2) - f^2(1+p)^2\cos i + 2f(1+p)\operatorname{sen} i\right].$$

Problema secondo.



Due sfere M, m si muovono uniformemente colle velocità V, v coi centri loro sopra due rette parallele tali che la loro distanza è minore della somma dei raggi delle sfere, dopo un certo tempo si incontrano urtandosi; si domanda quale sarà il moto delle due sfere dopo l'urto.

I corpi urtano unicamente in virtù delle velocità normali. Le dunque scomponiamo le velocità delle sfere in due una normale, l'altra tangenziale, chiamo V. v le velocità normali, W. w le velocità tangenziali, la velocità commune delle sfere nel senso normale sarà dopo l'urto $c = \frac{MV + mv}{M+m}$, se i corpi non sono elastici.

In questo caso le dopo l'urto essi rimangono aderenti oltre al moto di traslazione vi ha un moto di rotazione intorno al commun centro di gravità G, e la velocità angolare di questo moto è $\omega = \frac{W \cdot GC - w \cdot cG}{S}$, S essendo il momento d'inerzia delle due masse unite rispetto ad un'asse normale al piano della percossa e condotto per G. La rotazione si farà intorno a quest'asse con'al principio come nella continuazione del moto e sarà equabile.

Se chiamiamo x la velocità del centro G, dessa avrà componendo la velocità c colle velocità W. w come se dette fossero immediatamente applicate in G, sarà dunque $x = \sqrt{c^2 + (W+w)^2}$, e chiamando φ l'angolo che la direzione di questa velocità fa colla commune normale cG sarà $\operatorname{Tang} \varphi = \frac{W+w}{c}$.

Ora se R, r sieno i raggi delle due sfere, ed a sia la distanza delle loro direzioni prima dell'urto, abbiamo, chiamando α l'angolo che queste direzioni fanno colla commune normale. $\operatorname{Sen}\alpha = \frac{a}{R+r}$, $u = v \cos\alpha$, $V = V \cos\alpha$ $w = v \operatorname{Sen}\alpha$, $W = V \operatorname{Sen}\alpha$, $GG = (R+r)\frac{m}{M+m}$, $cG = (R+r)\frac{M}{M+m}$.

Dunque finalmente $c = \frac{MV+mv}{M+m}\cos\alpha$, $w = \frac{a(mV-Mv)}{S(M+m)}$,

$$x = \sqrt{\frac{(MV+mv)^2\cos^2\alpha}{(M+m)^2} + \operatorname{sen}^2\alpha\,(V+v)^2} = \frac{\sqrt{(MV+mv)^2(R+r)^2 + a^2\{(MV+mV)^2 + 2(MV+mv)(MV+m}}{(R+r)(M+m)}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\alpha\,(V+v)(M+m)}{\cos\alpha\,(MV+mv)} = \frac{a}{\sqrt{(R+r)^2-a^2}}\left[1+\frac{MV+mV}{MV+mv}\right] .$$

Se le sfere non rimangono aderenti dopo l'urto, prenderanno ciascuna un moto di traslazione, e chiamando X, x le loro velocità, Φ, φ gli angoli, che le direzioni di queste faranno colla normale comune ce sarà $X = \sqrt{W^2+c^2} = \sqrt{\frac{V^2(M+m)^2\operatorname{sen}^2\alpha + (MV+mv)^2\cos^2\alpha}{(M+m)^2}} = \frac{\sqrt{(MV+mv)^2(R+r)^2 + a^2m(V-v)\{mV+mv+2M}}{(R+r)(M+m)}$

$$x = \sqrt{w^2+c^2} = \frac{\sqrt{(MV+mv)^2(R+r)^2 + a^2M(v-V)\{Mv+MV+2mv\}}}{(R+r)(M+m)}$$

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{W}{c} = \frac{V(M+m)}{MV+mv}\cdot\frac{a}{\sqrt{(R+r)^2-a^2}}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{w}{c} = \frac{v(M+m)}{MV+mv}\cdot\frac{a}{\sqrt{(R+r)^2-a^2}} .$$

Se finalmente le sfere sono elastiche, siccome nel periodo di compressione hanno perdute le velocità $V-c$, $v-c$ nel senso normale, per l'elasticità riacquisteranno in senso contrario le velocità $p(V-c)$, $p(v-c)$, sarà dunque dopo l'urto, chiamando X, x le velocità, e Φ, φ gli angoli che queste faranno con ce, $X = \sqrt{W^2+\{c-p(V-c)\}^2}$, $x = \sqrt{w^2+\{c-p(v-c)\}^2}$

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{W}{c-p(V-c)} \quad , \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{w}{c-p(v-c)} .$$

Se nell'urto delle due sfere vogliamo tener conto dell'attrito, non abbiamo che a sostituire nelle formule relative al caso delle sfere non elastiche aderenti dopo l'urto invece di W, w le differenze $W-f(V-c)$, $w-f(v-c)$, in cui f è il coefficiente dell'attrito; ~~Per le altre due cose, quando tutte~~

Nel 2° Caso delle sfere non elastiche e non aderenti dopo l'urto, facendo la stessa sostituzione avranno le velocità progressive delle due sfere e le loro direzioni, ma bisognerà ancora calcolare le velocità angolari con cui prenderanno a muoversi intorno ai loro centri di gravità per cagione delle quantità di moto tangenziali perdute per l'attrito.

Chiamiamo Ω, ω queste velocità angolari. S, s i momenti d'inerzia delle due sfere rispetto agli assi normali al piano della percossa e condotti pei centri G, C, sarà $\Omega = \frac{Rf(V-c)}{S}$, $\omega = \frac{rf(u-c)}{s}$, e le rotazioni si faranno da destra verso sinistra, le velocità V, v saranno dirette verso sinistra.

Nel 3° Caso delle sfere elastiche le velocità tangenziali perdute per l'attrito sono $f(1+p)(V-c)$, $f(1+p)(u-c)$, sostituendo perciò nelle formole trovate a W, w le differenze $W - f(1+p)(V-c)$, $w - f(1+p)(u-c)$ si avranno i valori delle velocità progressive delle sfere e le loro direzioni; inoltre le sfere prendono un moto rotatorio intorno agli assi normali al piano della percossa e che passano pei loro centri di gravità per cagione delle velocità tangenziali perdute, le cui cose Ω, ω sieno le velocità angolari di questo moto sarà $\Omega = \frac{Rf(1+p)(V-c)}{S}$, $\omega = \frac{rf(1+p)(u-c)}{s}$.

Lezione 51ª

Degli attriti e delle rigidezze delle funi.

L'attrito è una resistenza proveniente dall'azione scambievole di due corpi a contatto i quali tendono a muoversi o si muovono in virtù di velocità tangenziali alle loro superficie.

Questa resistenza si esercita a distanze insensibili poichè proviene dall'azione delle forze molecolari.

Si distinguono tre specie d'attrito provenienti dalle attrazioni molecolari di due corpi.
L'attrito di un corpo che striscia sopra un'altro dicesi attrito di 1ª specie, e questo è il vero attrito. L'attrito che si esercita nello sviluppo della superficie di un corpo sull'altro, dicesi attrito di 2ª specie? L'attrito che si esercita quando due corpi si muovono in modo che gli stessi punti sono sempre a contatto, come quello di un cilindro solido, che si muove in un cilindro cavo, o quello di un cilindro cavo, che si muove intorno ad un cilindro solido dicesi attrito di 3ª specie.

Noi non consideriamo l'attrito come proveniente dalle forze molecolari per dedurne le leggi con cui resiste al movimento dei corpi, ma lo prendiamo come un fatto. Stantechè noi ancora non conosciamo la natura delle forze molecolari.

Supponiamo considerare l'attrito di 1° ordine, ossia l'attrito che ha luogo quando tentiamo di muovere due corpi dal mutuo contatto, e l'attrito nella continuazione del moto.

Gli attrito 1° cresce al crescere della pressione di un corpo sull'altro,

2° dipende dalla natura dei corpi,

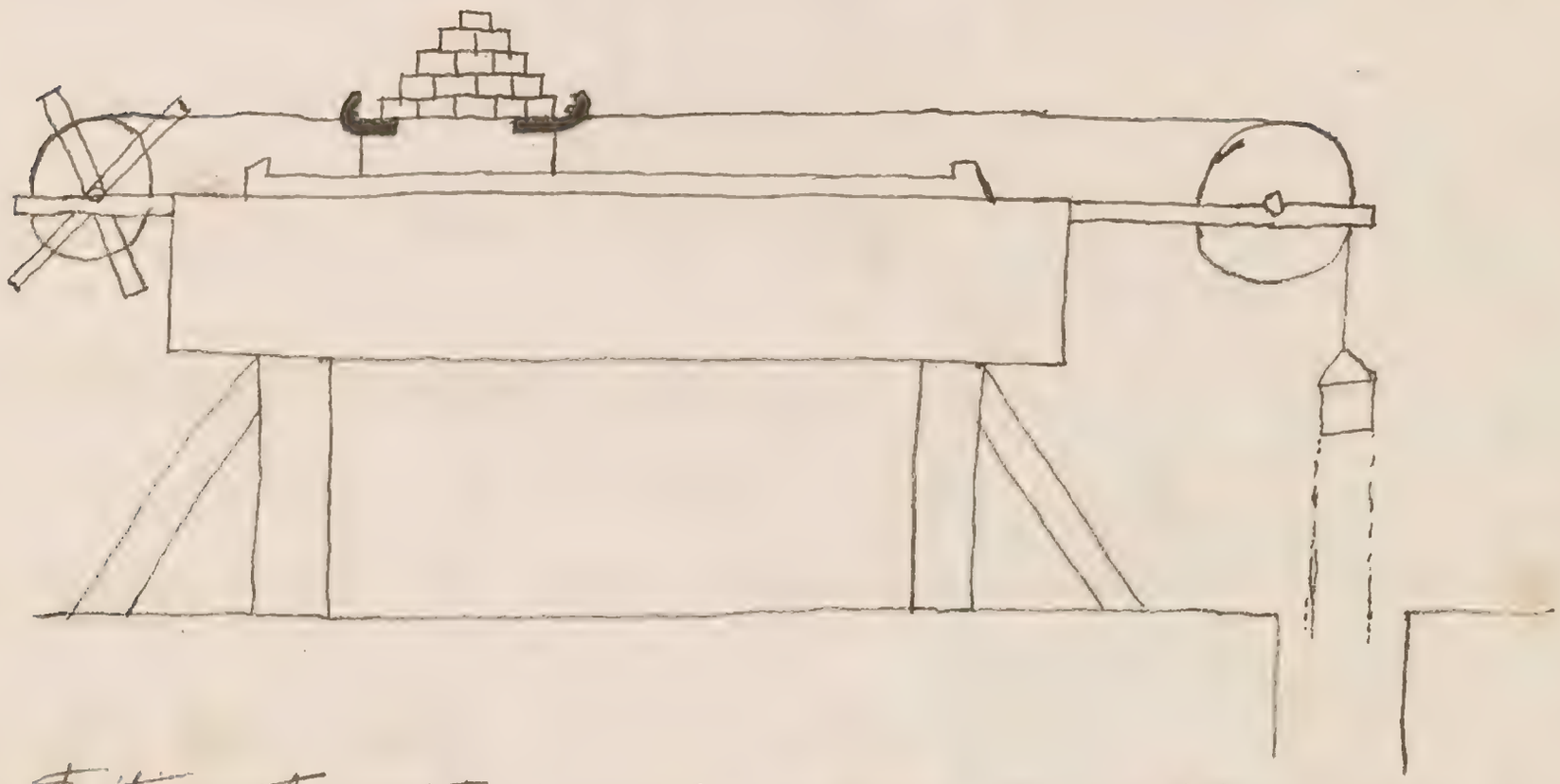
3° Dall'ampiezza, natura e preparazione delle superficie, che sono in contatto,

4° Dalla durata del contatto precedente

5ª Dalla velocità del corpo quando consideriamo l'attrito nella continuazione del moto.

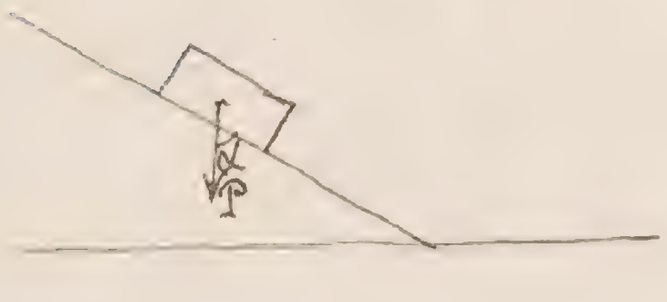
Furono fatte riguardo all'attrito da varii varie esperienze. Noi esporremo i metodi tenuti da Coulomb a fare queste esperienze.

Per misurare l'attrito di 1ª specie Coulomb adoperò uno strumento chiamato tribometro;



Questo strumento consiste in una lunga tavola orizzontale di legno su cui si fa scorrere una zattera pure di legno, caricata di pesi. La zattera viene tratta orizzontalmente da una flessibile funicella, che passando per una puleggia mobilissima porta appeso un piatto, sul quale si mettono dei pesi, finchè si giunge a spostare la zattera, questo peso è la misura dell'attrito. Perchè la zattera possa scorrere lungo tutta la tavola sotto il piatto dei pesi si fa un piccolo pozzetto entro a cui questo può discendere senza soffrire alcun intoppo, quando la zattera si avanza. Per fare ritornare la zattera al suo luogo, all'altra estremità della tavola havvi un tornio, attorno a cui si avvolge una fune, che va ad attaccarsi alla zattera. Con questo istrumento Coulomb trovò, che in pari circostanze l'attrito di 1° distacco è proporzionale alla pressione che si esercita tra i due corpi che sono in contatto; che l'attrito varia secondo la qualità delle superficie; che quando le superficie sono lisce l'attrito si fa minore; che spalmando le superficie con materia untuosa l'attrito diminuisce; che questo varia secondo la durata del precedente contatto; che poco o nulla dipende dall'ampiezza delle superficie in contatto;

Questi risultati furono verificati in altro modo, segando sopra un piano inclinato un parallelepipedo rettangolo, e sollevando il piano fino ad una inclinazione tale, che il corpo strisciii. In questo modo si determina facilmente il coefficiente f dell'attrito, cioè il coefficiente che bisogna dare alla pressione del corpo sul piano per avere la misura dell'attrito. Sia α l'inclinazione del piano alla verticale quando il corpo comincia a strisciare, P il peso del corpo, la pressione del corpo sul piano sarà $P \operatorname{sen}\alpha$, il peso relativo del corpo sul piano sarà $P \cos\alpha$, l'attrito sarà $f P \operatorname{sen}\alpha$, quindi $f P \operatorname{sen}\alpha = P \cos\alpha$, ed $f = \operatorname{cot}\alpha$.

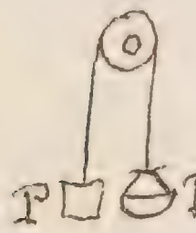


Per l'attrito nella continuazione del moto trovò Coulomb, che esso non dipende sensibilmente dalla velocità.

Lezione 82ª

Attrito di 3ª specie.

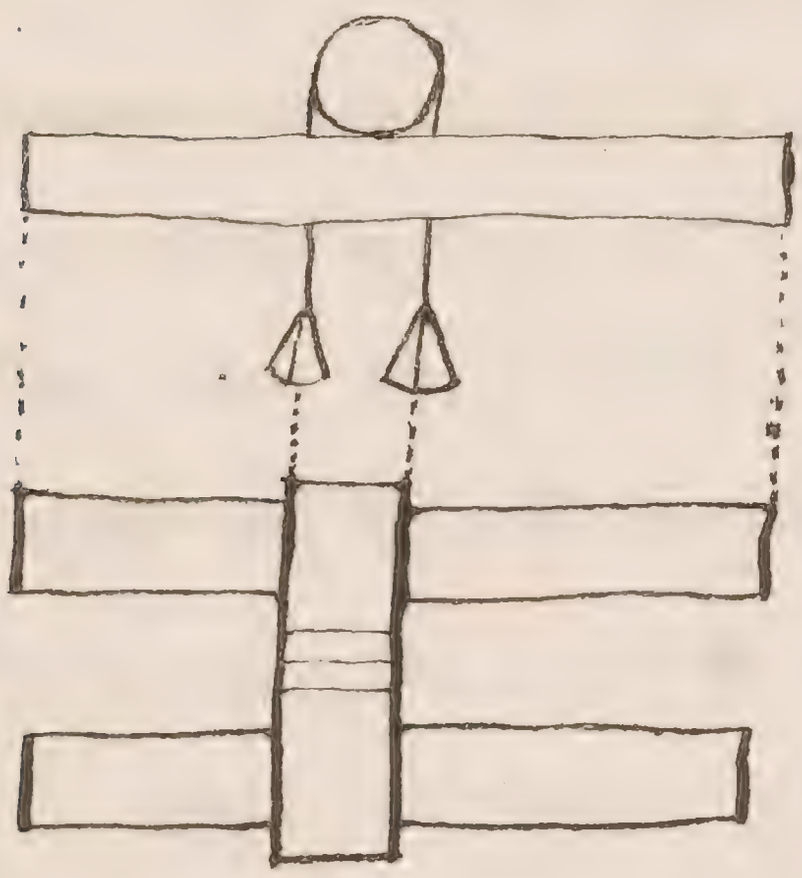
Coulomb per fare le esperienze su questa specie di attrito adattava ad una girella mobile intorno ad un'asse cilindrico fisso un filo piegato in mezzo, che caricava nelle due parti con pesi eguali P, P, aggiungeva quindi da una parte dei pesi, fintantochè si trovasse una potenza da far muovere la girella vincendo l'attrito di questa contro l'asse.



Da questo peso p Coulomb deduceva la misura dell'attrito nel modo seguente; sia a il raggio della girella, r il raggio dell'asse, p è conservato tutto nel vincere la resistenza dell'attrito, esso fa dunque equilibrio all'attrito: dunque $pa = Rr$ se chiamiamo R la resistenza proveniente dall'attrito, e quindi $R = p\frac{a}{r}$.

Facendo variare P Coulomb trovò, che l'attrito è proporzionale alla pressione; pressione che poteva variare variando la materia che formano la girella e l'asse, e che esso non dipende punto dalla velocità.

Attrito di seconda specie.

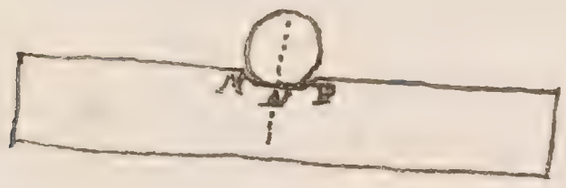


Per sperimentare l'attrito di 2ª specie sopra due tavolette parallele poste in piano orizzontale e distanti per qualche spazio si pose un cilindro perpendicolarmente alla loro lunghezza. a questo nell'intervallo delle due tavolette si accavalcia un piccolo spago che porta ai suoi capi due pesi uguali, il cilindro sarà in equilibrio. allora da una parte si aggiunge tanto peso quanto si trova bastare per dare e mantenere al cilindro un moto lento e continuo. questo peso si prende per misura dell'attrito che il cilindro deve vincere sviluppandosi sulle tavolette.

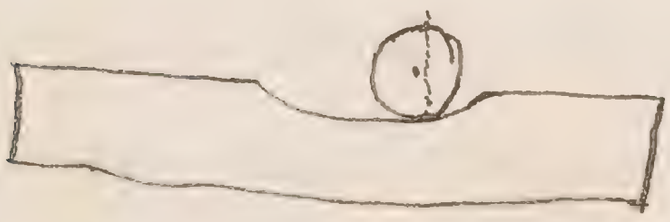
In questa esperienza per far variare la pressione del cilindro sulle tavole si accavallano al cilindro più spaghi caricati di pesi.

Con tale esperienza si trovò, che ~~per~~ l'attrito di seconda specie è proporzionale alla pressione, e diretta inversamente al diametro del cilindro istante. Nel moto del cilindro sulle tavole la velocità tangenziale alle tavole è nulla, non vi ha dunque vero attrito. vediamo perciò da cosa provenga la resistenza, che il cilindro prova a scorrere sulle tavole, che hanno chiamata attrito di 2ª specie. Quando un cilindro è posto sopra una tavola i due corpi si comprimono nelle vicinanze del punto di contatto, se perciò scostiamo il cilindro dalla posizione d'equilibrio, esso tendendo a salire sul declivio della concavità N P, la forza motrice, che

lo stesso deve soffrire la stessa resistenza, che prova il peso di un grave, quando questo è obbligato a salire sopra un piano inclinato.



Prima che il cilindro si scosti dalla posizione d'equilibrio la risultante delle azioni molecolari passa per l'asse del cilindro è normale al piano, ma appena scostato dalla posizione essa sarà normale alla concavità del piano, ma non passerà più per l'asse del cilindro, e per conseguenza tenderà ad imprimere una rotazione al cilindro. Ora questa risultante non è che la pressione di un corpo sull'altro, la quale nello stato di moto non differisce sensibilmente dalla somma dei pesi che gravano il cilindro. Quindi se chiamiamo P questa somma possiamo prendere P per misura della scambievole azione dei due corpi. Ma questa azione è equilibrata dall'aggiunta di peso necessaria di fare per mantenere il cilindro in un moto lento e continuo. Se dunque chiamiamo w la distanza tra la direzione della pressione P e l'asse del cilindro, r il raggio del cilindro, abbiamo $pr = Pw$; secondo Coulomb p è proporzionale a P, e possiamo esprimerlo col prodotto $f'P$, quindi $f'r = w$, questa equazione ci dice che w è indipendente dalla pressione, e che è costante in tutto il moto lento e continuo; l'equazione $p = \frac{Pw}{r}$ dice che l'attrito p è inversamente proporzionale al raggio r del cilindro.

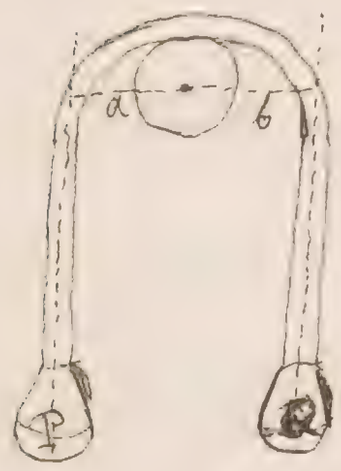


Rigidezza delle funi.

La rigidezza delle funi si presenta principalmente quando esse si avvolgono sopra puleggie portando dei pesi, di modo che noi parleremo esclusivamente di tale caso. Sia dunque una puleggia a cui si avvolge una fune, che porta alle sue estremità due pesi eguali. Essendo essa omogenea nella sua costituzione vi sarà equilibrio tra i due pesi. Se la fune fosse perfettamente pieghevole essa si adatterebbe perfettamente alla puleggia i due pesi opererebbero alle estremità del

diametro orizzontale della troclea, ma in virtù di quella resistenza alla quale si oppone in qualunque verso quantunque tirata alle sue estremità essa non si accosterà alla puleggia ma si staccherà alquanto da una parte e dall'altra disponendosi in una curva simmetrica rispetto alla verticale condotta pel vertice della troclea. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ aggiungiamo da una parte della fune dei pesi piccolissimi. Da questa parte la fune ~~[illegible]~~ si accosterà di più alla puleggia, per conseguenza la distanza a.b delle direzioni dei pesi ~~dei~~ P, Q di cui è carica la fune non saranno più eguali, e per l'equilibrio bisognerà che sia $Pa = Qb$; ma se aggiungiamo i pesi a P, allora $b > a$, dunque, poichè $b = \frac{P}{Q}a$, deve essere $P > Q$, la differenza



P−Q ci serve di misura della resistenza nata dalla rigidezza della fune, resistenza, che è analoga a quella dell'attrito di seconda specie.

Gli elementi da considerare se si volessero trovare le leggi di questa resistenza sono

1° La tensione 2° La grossezza della fune 3° ~~[illegible]~~ Diametro della troclea,

4° La natura, struttura e la preparazione della fune.

Coulomb determinò queste leggi coll'esperienza; esso trovò, attendendo alle tensioni della fune successivamente i pesi $\{Q, Q+q\}, \{Q', Q'+q'\}, \{Q'', Q''+q''\}, \ldots$ tali da mantenere un moto lento e continuo, che $q, q', q'', \ldots$ crescono assai rapidamente, che le tensioni $Q, Q', Q'', \ldots$, e che la rigidezza q è proporzionale alla somma di due termini ~~[illegible]~~ $m+nQ$, di modo che, A indicando un coefficiente variabile da una fune all'altra e da una troclea all'altra, $q = A(m+nQ)$, m, n essendo assolutamente costanti.

Fece quindi variare il raggio della fune r, e trovò, che A è proporzionale ad una potenza K di r, la quale per le funi bianche è K = 1,4 di modo che, B indicando un coefficiente variabile col variare della puleggia, e della natura, fabbrica e preparazione della fune,

$q = B r^K (m + n Q)$, e per le funi bianche, ossia non impeciate $q = B r^{1,4} (m + n Q)$.

Fece per ultimo variare il raggio R della troclea, e trovò che B è inversamente proporzionale ad R, di modo che $q = a \frac{r^K}{R} (m + n Q)$, ossia, facendo il prodotto di a per m e per n, e indicando con le stesse lettere m, n questi prodotti, $q = \frac{r^K}{R} (m + n Q)$; m, n dipendono allora dalla natura, fabbrica e preparazione della fune.

Per le funi nuove K è maggiore, cioè K = 1,7. Per le funi bianche, non nuove, abbiamo finalmente $m = 4,12$ chil. ; $n = 0,16$.

Leggi della resistenza dei solidi.

Lo studio di queste leggi si divide in due rami, vi sono infatti due specie di resistenza nei solidi, la resistenza alla deformazione, e la resistenza alla rottura.

Noi esamineremo succintamente queste resistenze nei corpi prismatici e cilindrici.

La forza che un corpo oppone ad una forza che lo tenda o lo prema si chiama nel senso della sua lunghezza si chiama Resistenza assoluta, questa si divide in

Resistenza assoluta { allo schiacciamento; allo strappamento; alla compressione.

La Resistenza che un corpo oppone ad una forza applicata normalmente alla sua lunghezza dicesi Resistenza rispettiva e si divide in

Resistenza rispettiva { dei solidi caricati all'estremità; dei solidi caricati nel mezzo; dei solidi variamente caricati e sostenuti.

Finalmente la forza che un corpo oppone ad una forza, che tenda a farlo girare intorno ad un asse, si chiama

Resistenza all'attorcimento.

Lezione 53ª

Resistenza assoluta dei solidi prismatici o cilindrici.

Quando una forza tende nel senso della sua lunghezza un solido prima di strapparlo **lo allunga**, perciò in questo caso si avrà due resistenze da esaminare nel solido, la resistenza all'allungamento, e la resistenza allo strappamento.

Consideriamo la prima; sia

l la lunghezza naturale di un solido,

ω^2 la sua sezione trasversale,

P la forza tendente,

α un coefficiente dipendente dalla sostanza del solido,

x la quantità di cui si allunga il solido

T la tensione relativa all'unità di area,

perciò che già si è detto dell'allungamento dei solidi prismatici e cilindrici (Vol.ª pag. 290), $x = \alpha \frac{lP}{\omega^2}$, e se chiamiamo $x = \alpha l T$. Dopo aver agito il peso P sul solido esso dunque si allunga, e la sua lunghezza diventa

$$l + x = l\left[1 + \frac{\alpha P}{\omega^2}\right] = l\left[1 + \alpha T\right].$$

Dall'equazione $x = \alpha l T$ abbiamo $\frac{x}{l} = \alpha T$, e se facciamo $\frac{x}{l} = \delta$, sarà $\delta = \alpha T$, ora $\frac{x}{l}$ è il rapporto tra l'allungamento del solido, e la sua lunghezza naturale, questo rapporto è indipendente da l, esso è dunque ~~eguale~~ al rapporto tra l'allungamento di un solido di lunghezza naturale eguale all'unità, e la lunghezza naturale eguale all'unità, e possiamo dire, che δ è l'allungamento di un solido di lunghezza naturale eguale all'unità, quando la tensione relativa all'unità di area è T. δ lo chiameremo semplicemente l'allungamento del solido, T la tensione del solido, essendo $\delta = \alpha T$, α lo chiamiamo il coefficiente di estensibilità. Dall'equazione $\delta = \alpha T$ abbiamo $T = \frac{1}{\alpha}\delta$, e facendo $\frac{1}{\alpha} = \varepsilon$, $T = \varepsilon\delta$,

in questa equazione se $\delta = 1$. $T = \varepsilon$. E è dunque la tensione da darsi ad un solido di lunghezza 1. di sezione trasversale 1. perchè il suo allungamento sia eguale alla sua lunghezza naturale. Ciò posto se la tensione è doppia, tripla, quadrupla, ecc. di ε l'allungamento del solido è eguale al doppio, triplo, quadruplo ecc. della sua lunghezza naturale.

E è detto coefficiente d'elasticità del solido, poichè la resistenza che il corpo oppone alla tensione T è l'elasticità, il coefficiente d'elasticità è dunque l'inverso del coefficiente di estensibilità. Se la forza P non tende il solido, ma lo preme, prima di schiacciarlo lo accorcia. Le stesse leggi che per l'allungamento hanno pure luogo per l'accorciamento, cioè se la lunghezza naturale del solido era l, per l'azione di P diventa $l - x$, essendo $x = \alpha' \frac{lP}{\omega 2}$. Quando la forza produce alterazioni piccolissime si può ammettere l'eguaglianza del coefficiente di estensione e del coefficiente di compressione, ma se la forza oltrepassa certi limiti i coefficienti non sono più eguali, ma allora scompaiono le proprietà annunciate dagli allungamenti ~~degli accorciamenti~~ non hanno più luogo.. Per esempio un fil di ferro di lunghezza $= 1$. di sezione $= 1$ mill.° q.° caricato di un chilogramma si allunga di $\frac{1}{20000}$, e sotto l'azione di 20 chil. si allunga di $\frac{1}{11000} + \frac{1}{2000}$, mentre secondo la legge stabilita dovrebbe soltanto allungarsi di $\frac{1}{10000}$. vediamo donde ciò proviene. Se togliamo il peso di 20 chil. il ~~filo~~ filo si accorcia di $\frac{1}{1000}$, dunque un ~~filo~~ filo sotto l'azione di tensioni notevoli si allunga più di quel che porterebbe la proporzionalità degli allungamenti alle tensioni, ma se istantaneamente si toglie il peso il filo si accorcia proporzionalmente alla tensione. Questa legge è estesa a tutti i corpi metallici.

Se la tensione o la pressione sforzano od avvicinano tanto le molecole, che ne nasca un disequilibrio tra la forza attraente, ossia attrazione molecolare, e la forza repellente dovuta all'azione del calore, allora rompe la rottura.

La resistenza assoluta dei solidi prismatici o cilindrici all'atto schiacciamento che allo strappamento è proporzionale alla sezione trasversale; se dunque a^2 sia la sezione trasversale di un solido, R il peso necessario per strapparlo, e K un coefficiente dipendente dalla natura della sostanza di cui il solido è formato, $R = Ka^2$. Se $a^2 = 1$, $R = K$, K esprime dunque il peso necessario per istrappare un solido di sezione trasversale eguale all'unità, parimente se H sia il peso necessario per schiacciare un solido di sezione a^2, H un coeff.e costante dipendente dalla natura del solido, $S = Ha^2$, e il valor numerico di H esprime il peso necessario per schiacciare un solido di sezione eguale all'unità.

In alcuni corpi H è pressimamente eguale a K, in altri tra H e K vi ha una differenza grandissima, così pel ferro di fucina H è pressimamente $= K$, pel ferro fuso o ghisa H è immensamente più grande di K, quindi in una fabbrica se avremo da mettere una chiave di ferro, che debba resistere a pesi, che tendono a schiacciarla, la metteremo di ferro fuso, e se dovrà resistere a pesi tendenti a strapparla la metteremo di ferro di fucina.

Lezione 26.ª

La tenacità di una spranga abbiam detto esprimersi col prodotto Ka^2. Dobbiam dette che K dipende dalla natura del solido, ma abbiam detto male, poichè K dipende anche dalla forma della sezione e dalla grossezza, così per una spranga di ferro grossa il valore di K è da 40 a 45 dil. per millimetro quadrato, per un piccolo filo di ferro il valore di K è 60 a 65 dil. per millimetro q.

Esempii. Un filo cilindrico AB è sospeso liberamente per la sua estremità superiore, si cerca

la lunghezza e il peso specifico del filo si domanda di determinare l'allungamento del filo sotto il proprio peso.

sia la lunghezza naturale del filo l, il peso totale del filo sarà Gla^2, ora l'allungamento

il peso specifico	G	
la sezione trasversale	a^2	è lo stesso come se all'estremità B fosse

attaccato il peso $\frac{Gla^2}{2}$, dunque l'allungamento $\delta = \alpha \frac{Gl^2a^2}{2a^2} = \alpha \frac{Gl^2}{2}$.

La ~~trave~~ una verga appoggiata ad un piano orizzontale è pesante, pel proprio peso sfonda allorchè come se fosse caricata di un peso metà del proprio all'estremità, la quale non è sul piano.

Data un filo cilindrico come quello dell'esempio antecedente trovare quanto debba esser lungo perchè si laceri pel proprio peso.

K essendo il coefficiente relativo al filo dato dovrà essere $\frac{1}{2}Gla^2 = Ka^2$, quindi ricaviamo $l = \frac{2K}{G}$. Infatti se il filo si lacera, si lacera in A, dove la tensione è massima.

Supponiamo, che il peso specifico dei mattoni sia 1,75 rispetto a quello dell'acqua, e che per ogni decimetro cubo vi vogliano 6 chil., si cerca quanto alto si potrà fare un muro di quei mattoni perchè non si schiacci pel proprio peso.

In questo caso prendendo per unità di volume il centimetro cubo $G = 1^{gr.},75$

$H = 600^{gr.}$, dunque $l = \frac{600}{1,75} = \frac{60,000}{175} = \frac{2400}{7} = 342,^{cent.}8 = 3,^{m.}428.$

Dando al muro per base un metro quadrato $l = 342^{m.}8$

La pietra regge ad un peso di 100 chil. per millimetro q.° prima di schiacciarsi, il peso specifico di essa è circa 7 volte quello dell'acqua, si domanda di che altezza potremo fare un muro di pietra perchè non si schiacci pel proprio peso.

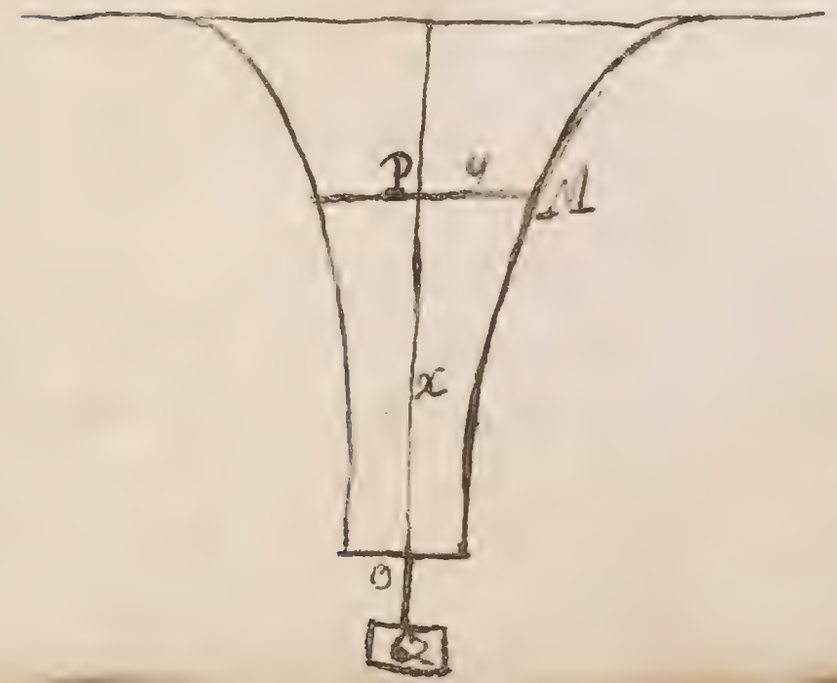
Prendendo per unità il metro cubo $G = 7000^{chil.}$, $H = 100\,000\,000^{chil.}$,

Dunque $l = \frac{2.100\,000}{7} = (14285,^{m.}7)2 = 28571,^{m.}4$

Si vede dunque la differenza enorme di altezza vi sia fra un muro di mattoni di uno di ghisa prossimi alla rottura.

L'altezza che si può dare ad un muro di una data sostanza e di base quale dell'unità si chiama il modulo di tenacità, quindi il modulo per peso specifico restituisce il coefficiente della resistenza assoluta allo schiacciamento.

Determinare la legge con cui debbono variare le sezioni di un solido di rivoluzione sospeso per la sua base superiore, e caricato nella sua base inferiore di un peso Q perchè vi sia tanta probabilità di rottura in una sezione che nell'altra, ossia perchè ogni sezione regga egualmente bene alla rottura.



Sia $MP = y$, $OP = x$, l'equazione del problema sarà $Q + \pi G \int_0^x y^2 dx = K\pi y^2$, supponendo che il peso Q sia un cilindro di raggio a, di altezza u e della stessa densità del solido, sarà

$a^2 m + \int_0^x y^2 dx = \frac{K y^2}{G}$. Differenziamo questa equazione abbiamo

$y^2 dx = \frac{2K}{G} y dy$, equindi $dx = \frac{2K}{G} \cdot \frac{dy}{y}$. Integriamo avremo $x = \frac{2K}{G} \log G y$,

essendo la costante arbitraria dell'integrazione, equindi $y = \frac{1}{G} e^{\frac{Gx}{2K}}$; la sezione inferio-re del solido dovendo sopportare il peso Q dovrà essere, chiamando b l'ordinata corrispon-dente al raggio di questa sezione, $K\pi b^2 = Q$, ossia $b = \sqrt{\frac{Q}{K\pi}}$. Esprimendo che quando $x=0$ deve essere $y=b$ ricaviamo $G = \sqrt{\frac{K\pi}{Q}}$, e quindi

$$y = \sqrt{\frac{Q}{K\pi}} \; e^{\frac{Gx}{2K}}.$$

Questa è l'equazione di una logaritmica, la curva meridiana del solido deve dunque essere una logaritmica perchè ogni sezione orizzontale sopporta equalmente in ogni sua sezione la rottura. Un tal solido è detto solido di egual resistenza.

Se non c'è il peso Q, la base inferiore non sostenendo alcun peso, perchè il solido sia di egual resistenza bisognerebbe che nemmeno le altre sezioni non sostenessero pesi, ciò non può essere, bisogna dunque in questo caso che non ci sia base inferiore, ossia che questa sia ad una distanza infinita, ossia bisogna prendere tutto il solido generato dal-la logaritmica tutta, la quale si prolunga fino all'infinito coi suoi due rami asin-totici alla verticale di mezzo OP. Un tal solido quantunque di lunghezza infinita è però di peso finito.

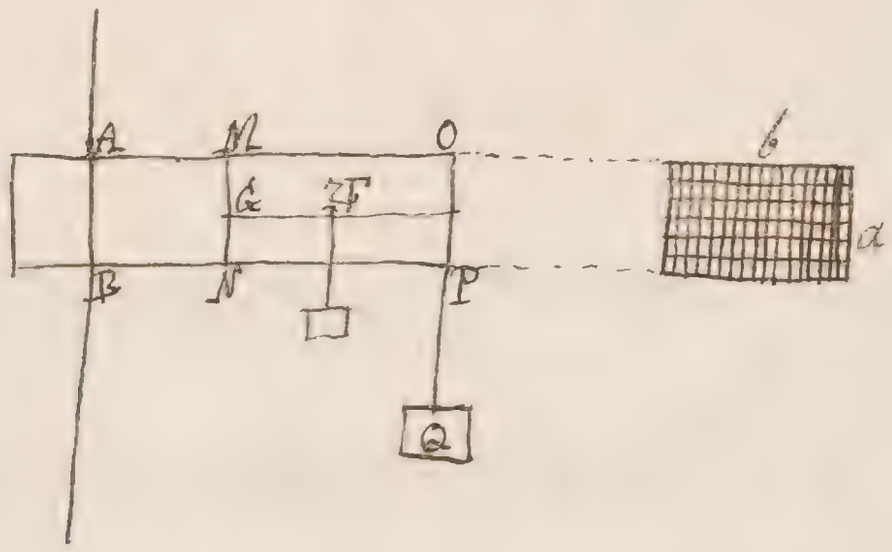
Lezione 55ª

Resistenza respettiva dei solidi.

Quando le forze applicate ad un solido prismatico o cilindrico sono dirette perpendicolarmente alla lunghezza del solido, le fibre non sono più tutte tirate egualmente, quindi alcune si accorciano, altre si allungano, ora ciò non può avvenire senza che il solido cangi di figura ossia

di inflessa. Variassono le ipotesi, che riferisce per determinare le leggi con cui un solido oppone all'azione di forze applicate normalmente alla sua lunghezza. ipotesi Galileana.

Galileo suppone un solido qualunque formato di fibre legate insieme a foggia dal vincolo della tenacità capaci di romperssi ma non di allungarsi ne' di accorciarsi, ossia suppone le fibre non flessibili.



Supponiamo in questa ipotesi un solido incastrato in un muro verticale, e che alla sua estremità libera in P sia attaccato un peso Q, cerchiamo quanto debba essere il peso Q perchè succeda la rottura del solido, e dove succeda.

Supponiamo che la rottura si faccia secondo la sezione MN a distanza ℓ dalla sezione estrema OP, le forze che tendono a produrre la rottura sono il peso Q ed il peso della porzione di solido MNOP, la forza che resiste alla rottura è la tenacità, per vedere come questa agisca e dove sia applicata osserviamo, che ogni fibra del solido resiste alla rottura con forza proporzionale alla sua sezione, quindi tale resistenza si può esprimere col prodotto di un coefficiente K' per la sezione; ora tutte queste resistenze agiscono secondo la lunghezza delle fibre, inoltre sono tutte eguali poichè le fibre le concepiamo tutte eguali, esse dunque equivalgono ad una forza unica applicata nel centro di gravità della sezione MN e di intensità $K'A^2$, A^2 essendo l'area della sezione.

Ciò posto Quando avviene la rottura la porzione MNOP si stacca dal restante del solido prendendo un moto rotatorio intorno al punto N poichè il solido sta sul punto di romperssi bisogna dunque che la somma dei momenti della forza Q e del peso di MNOP ~~intorno~~ rispetto ad N sia eguale al momento rispetto ad N della tenacità; ma il momento di Q è $Q\ell$,

Se Π sia il peso ~~specifico~~ proporzionale del solido intiero, il peso del solido MNOP è $\Pi\frac{z}{c}$, essendo la lunghezza totale del solido, il centro di gravità di questo solido è in T a distanza $\frac{z}{2}$ dalla sezione MN, il momento con cui questo tende a spezzare intorno ad N è dunque $\frac{\Pi z^2}{2c}$; il momento della forza respistente ossia della tenacità, se chiamiamo X la distanza del Centro di gravità della sezione MN da N, è $K'A^2X$. Dunque

$$Qz+\frac{\Pi z^2}{2c}=K'A^2X.$$

K', A^2, X sono indipendenti da z, il 1° membro cresce con z, esso è dunque massimo rispetto alla sezione AB, la rottura avrà dunque luogo in AB; ma in AB abbiamo $z=c$, dunque perchè il solido sia sul punto di rompersi deve essere $Qc+\frac{1}{2}\Pi c=K'A^2X$, ossia $Q=\frac{K'A^2X-\frac{1}{2}\Pi c}{c}$.

Trascurando il peso del solido a fronte di Q abbiamo $Q=\frac{K'A^2X}{c}$; questo peso Q misura la resistenza del solido alla rottura, dunque nell'ipotesi di Galileo la resistenza rispettiva di un solido prismatico o cilindrico ~~viene rappresentata~~ è proporzionale all'area della sezione trasversale moltiplicata per l'altezza del Centro di gravità di questa e diviza per la lunghezza del solido.

Se la sezione è un rettangolo di lati a, b come ho rappresentato in figura, allora $X=\frac{1}{2}a$, $A^2=ab$, epperciò $Q=\frac{K'a^2b}{2c}$.

Per un altro solido di sezione rettangolare a'b', della stessa altezza della stessa lunghezza c, la resistenza è $Q'=\frac{K'a'^2b'}{2c}$, quindi concludiamo, che le resistenze rispettive di due travi parallelepipede della stessa altezza e della stessa lunghezza stanno come i quadrati delle altezze e come le larghezze.

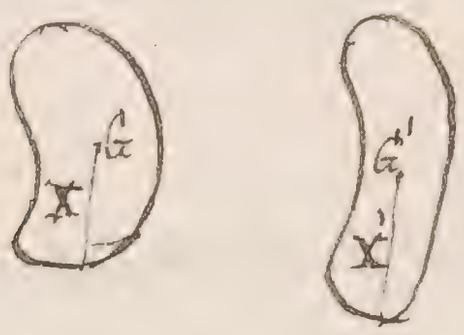
Nella seconda formola facciamo $b'=a$, $a'=b$, abbiamo $Q'=\frac{K'ab^2}{2c}$, e quindi $Q:Q'::a:b$, dunque se una stessa trave si incastra in un muro prima col lato maggiore b della sua sezione posto orizzontalmente, quindi col lato minore a orizzontale, essa non resiste egualmente alla rottura, la resistenza nel 1° caso è minore, che nel 2°, e le resistenze stanno come a:b.

La resistenza assoluta della trave abc è Kab, se dunque la chiamiamo R, abbiamo

$Q : R :: \frac{K'a}{2C} : K :: K'a : 2KC$, e le ammettiamo con Galileo, che sia $K = K'$, allora

$Q : R :: a : 2C$, dunque la resist.ª rispettiva sta alla res.ª assoluta come l'altezza della trave al doppio della lunghezza.

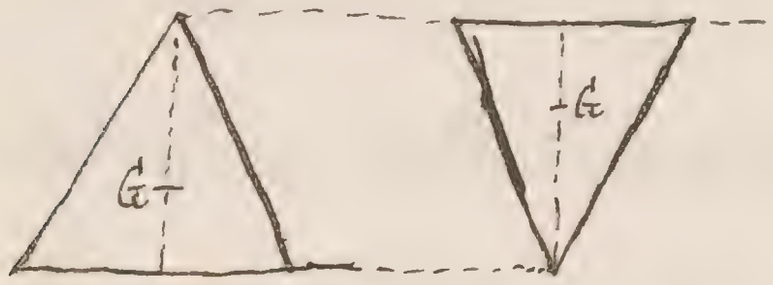
Confrontiamo adesso due solidi della stessa sostanza, della stessa lunghezza, e dello stesso volume ma di figura diversa.



poichè la resistenza rispettiva è stanno evidentemente :: X : X'.

I due solidi essendo cilindrici avranno le sezioni trasversali equivalenti, le quindi avranno X, X' le altezze ~~della~~ dei Centri di gravità delle loro sezione, $Q = \frac{K'A^2X}{2C}$, le resistenze rispettive dei due solidi

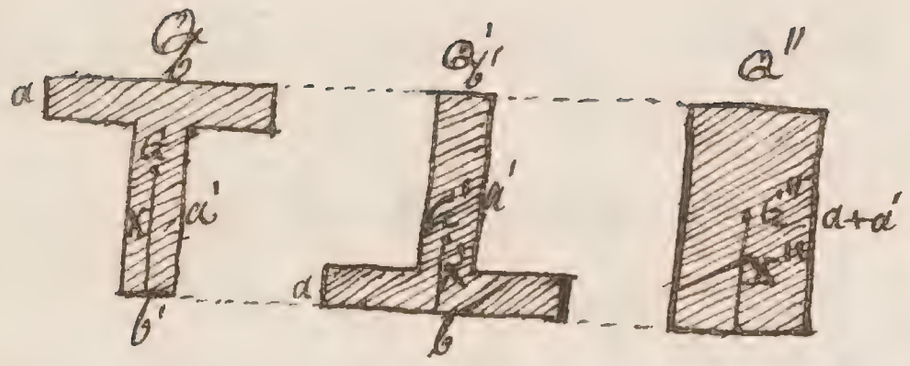
Esempii.



Sia una trave di sezione triangolare isoscele se si colloca colla base all'ingiù, e quindi colla base all'insù, ~~sta~~ le resistenze rispettive di esta trave nelle sue due posizioni stanno :: 1 : 2.

Sieno due travi cilindriche circolari di sezioni equivalenti, ma una piena, l'altra vuota.

Sia r il raggio della 1ª, sieno r', r'' i raggi interno ed esterno della 2ª, le resistenze di queste travi staranno :: r : r'', purchè sia ~~r' =~~ $r^2 = r''^2 - r'^2$. Sia il raggio esterno $r'' = mr$, sarà $r' = r\sqrt{m^2 - 1}$, e le resistenze rispettive delle travi stanno :: 1 : m; m essendo arbitrario possiamo prenderlo grande, ed avremo una trave dello stesso volume della prima, ma molto più resistente, ma prendendo m molto grande c'è pericolo che la trave vuota o Tubo si rompa in altra maniera, si fiacchi.



Tre modiglioni hanno la stessa lunghezza, lo stesso u-
-lume e la stessa altezza, e sono della stessa sostanza,
ma il 1° ha una sezione in forma di T il 2° in forma
di T rovesciata, il 3° ha una sezione rettangolare, Si domanda quale dei tre modiglioni è più resistente
all'azione di una stessa forza normale alla loro lunghezza, ossia si divide la ragione delle resistenze rispet-
-tive dei tre modiglioni.

Le resistenze rispettive dei tre solidi, essendo X, X', X'' le altezze dei loro centri di gravità, stanno: $X:X'X''$,
ora pel 1° solido a essendo l'altezza del capello, b la sua larghezza, a' essendo l'altezza della gamba, b' la sua
larghezza, $X = \frac{(a' + \frac{a}{2})ab + \frac{a'}{2}a'b'}{ab + a'b'}$, pel 2° solido le dimensioni essendo le stesse

$$X' = \frac{(a + \frac{a'}{2})a'b' + \frac{a}{2}ab}{ab + a'b'}, \text{ pel 3° finalmente}$$

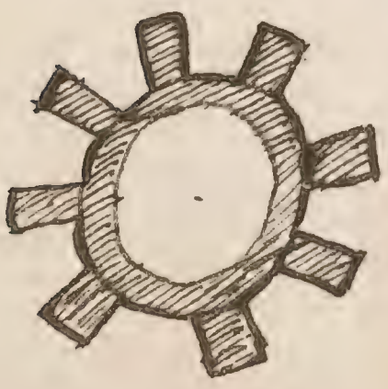
$$X'' = \frac{\frac{a+a'}{2}}{2}, \text{ dunque } Q:Q':Q'' :: (2a'+a)ab + a'^2b' : (2a+a')a'b' + a^2b : (a+a')(ab + a'b')$$

e se $a' = ma$, $b = nb'$, $Q:Q':Q'' :: n(1+m)^2 : (1+m)^2 + n - 1 : (1+m)(m+n)$

$$:: n + 2mn + nm^2 : n + 2m + m^2 : m + n + mn + m^2.$$

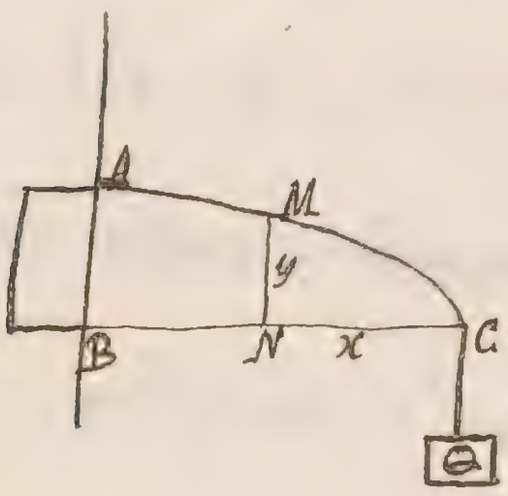
m. n son sempre maggiori dell'unità, quindi $n + 2mn + nm^2 > n + 2m + m^2 > n + 1 + mn + m^2$;
il 1° solido è dunque il più resistente, il 3° è più resistente del ~~terzo~~ secondo.
Se il solido è sottomesso a spinte che tirano in senso contrario, allora daremo al solido la forma
che si vede nella fig.a qui annessa.

Quando poi il senso delle spinte è vario allora si assume per sezione
primitiva un circolo e sul prolungamento dei raggi ~~ai cui sono por-~~
~~-tate le spinte~~ mali le spinte si fanno le basi di tanti parallelepipedi, i quali
uniti al cilindro accrescono la sua resistenza; se il cilindro è di già vuoto
allora si accresce questa resistenza ancora col frammettere a certi intervalli,
dove cioè si vede maggiore il pericolo di rottura, dei diaframma, i quali impe
-discono che il cilindro si fiacchi.



Esaminiamo ancora un problema.

Determinare con che legge debbano variare le altezze delle divese sezioni rettangole di un medesimo solido in un muro e caricato di un peso alla sua estremità, perché ogni sezione resista egualmente bene alla rottura, essendo data la larghezza del solido costante in ogni suo punto, ed il peso specifico del solido G.



Sia b questa larghezza, consideriamo una sezione qualunque MN, sia MN=y, NC=x, perché ~~la sezione~~ il solido sia nel punto di rompersi secondo MN dovrà essere

$$Qx + bGx\int y\,dx + bG\int xy\,dx = \frac{K'b}{2}y^2$$; questa è l'equazione della sezione longitudinale ABC del solido.

Supponiamo che il peso Q sia della stessa sostanza del solido, e che sia un parallelepipedo di base a^2, e di altezza b, l'eq.e diventerà

$$a^2x + x\int y\,dx - \int xy\,dx = \frac{K'}{2G}y^2 = hy^2$$. facendo per brevità $\frac{K'}{2G} = h$;

Differenziando questa equazione una prima volta abbiamo

$$a^2dx + xy\,dx + \int y\,dx\int y\,dx - \int y\,dx = 2hy\,dy$$, e differenziando di nuovo

$$y\,dx^2 + x\,dx\,dy + y\,dx^2 - xy\,dx\,dy = 2h\,dy^2 + 2hy\,d^2y$$, donde riducendo

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot 2hy + 2h\frac{dy^2}{dx^2} + (2y - x)\frac{dy}{dx} = xy$$; facciamo $\frac{dy}{dx} = p$, avremo

$$2hyp\,dp + 2hp^2dy = y\,dy$$, ossia $hy\,d.p^2 + 2hp^2dy = y\,dy$, e facendo $p^2 = q$

$$hy\,dq + (2hq - y)dy = 0$$. Per integrare facciasi $y = qz$ l'eq.e diventerà

$$hz\,dq + (2h - z)(q\,dz + z\,dq) = 0$$; $(3hz - z^2)dq + (2h - z)q\,dz = 0$, avremo

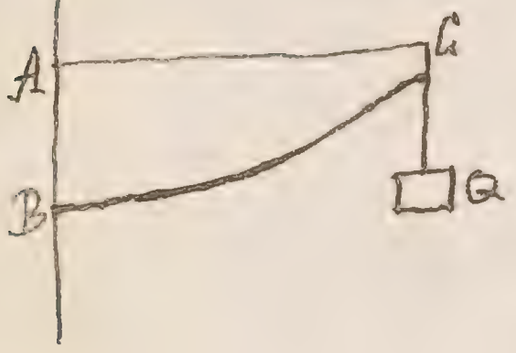
$$\frac{dq}{q} = \frac{2h - z}{z^2 - 3hz}dz$$, donde $\log q = \frac{2}{3}\log\frac{3h - z}{z} - \log(z - 3h) = \frac{2}{3}\log\frac{3hq - y}{y} - \log\frac{y - 3hq}{q}$,

e riducendo

~~$6y = -(2hq - y^2)$~~ $p^2 = \frac{2hc' + y^3}{3hy^2}$, essendo la costante dell'integrazione.

Mettiamo invece di h il suo valore $\frac{K'}{2c}$ avremo $p^2 = \frac{K'c' + 6y^3}{\frac{3}{2}K'y^2}$. Questa equazione non si può più integrare che per approssimazione, poichè da essa ricavasi $x = \sqrt{\frac{3}{2}K'} \int \frac{y\,dy}{\sqrt{K'c' + 6y^3}}$, ora l'integrazione del 2° membro non si può eseguire che per approssimazione.

Se trascuriamo il peso proprio del solido allora l'equazione della sezione ABC diventa $Qx = \frac{K'b}{2}y^2$; in questo caso la sezione è dunque una parabola col vertice in C, e l'asse BC. Siccome il peso Q attaccato al vertice in C potrebbe sformare in C il modiglione, così si potrà modificare alcun poco la forma del modiglione come si vede nella figura adjacente.

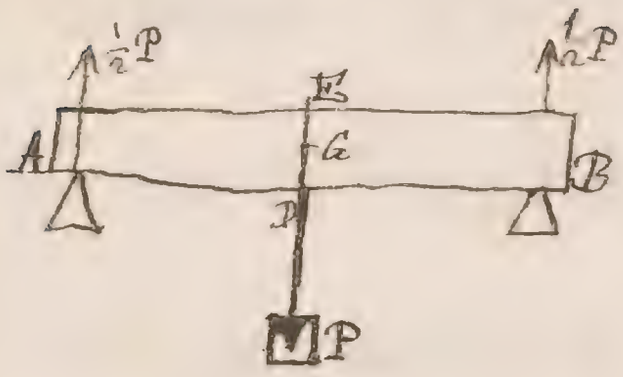


Se si volesse che il modiglione avesse una altezza costante, e si volesse determinare la legge con cui debbono variare le larghezze delle sue sezioni, poichè tutte esistano qualunque bene alla solidità, ~~trascurando~~ sempre il peso del modiglione, e chiamando x la distanza di una sezione dall'estremità dove è attaccato il peso Q, y la larghezza di questa sezione, b l'altezza, l'equazione della base del modiglione sarà evidentemente $\frac{K'b^2}{2}y = Qx$; questa base è dunque un triangolo col vertice in C, e il modiglione è un prisma triangolare di altezza b.

Se il modiglione vogliamo che sia un solido di rivoluzione, allora tutte le sezioni saranno circoli, e chiamando r il raggio di uno qualunque di questi circoli, x la sua distanza dall'estremità C sarà $K'\pi r^3 = Qx$ l'equazione della curva meridiana del modiglione; ora questa curva è una parabola del 3° grado.

Lezione 56ª

Proseguiamo lo studio della resistenza rispettiva dei solidi facendo astrazione dalla loro flessibilità.



Resistenza rispettiva di un solido prismatico o cilindrico sostenuto da due appoggi A, B e caricato nel mezzo di un peso P.

Tutto essendo simmetrico da una parte e dall'altra del peso P la sezione di mezzo è quella secondo cui si farà la rottura, se P sarà tale da produrla, e poichè le due porzioni di solido A.D, B.D tendono a prendere gli stessi movimenti quando la rottura avverrà la tangente al punto infimo D starà ferma, & e le due porzioni si staccheranno prendendo un moto rotatorio intorno al punto E.

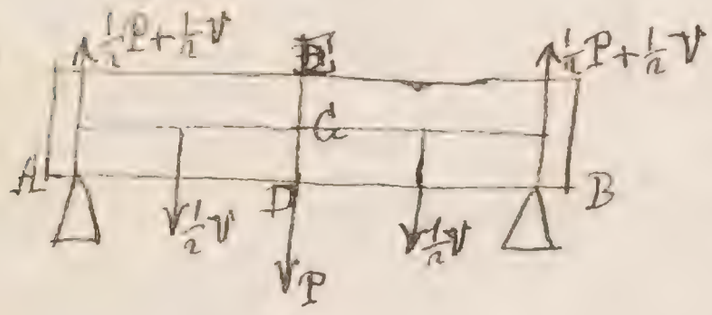
I due sostegni soffrono due pressioni $= \frac{1}{2}P$, Le dunque togliamo questo bisogna che sostituiamo ad essi due forze $= \frac{1}{2}P$ e direttamente opposte alle dette pressioni; & queste forze sono quelle che tendono a far rotare le due porzioni di solido intorno ad E, ~~e~~ non essendovi altre forze che tendano a produr questo moto evidentemente le due porzioni di solido A.D, B.D si trovano nelle stesse condizioni del solido ABOP della Lez.e precedente, se dunque C sia la lunghezza di tutto il solido A² la sua sezione trasversale, y la distanza del centro di gravità G della sezione secondo cui tende a farsi la rottura dal punto E, vi sarà equilibrio tra la resistenza proveniente dalla tenacità ed il peso P ogni volta che sarà

$$\frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}C = K'A^2y \text{ , Da questa equazione ricaviamo } P = \frac{4K'A^2y}{C}$$

, ora P misura la resistenza proveniente dalla tenacità, ossia la resistenza rispettiva del solido caricato nel mezzo.
C

Quindi se abbiamo due solidi perfettamente eguali, uno caricato d'un peso all'una estremità, ed infitto in un muro per l'altra, l'altro appoggiato a due sostegni e caricato nel mezzo, e chiamiamo y la distanza del centro di gravità della sezione trasversale dal punto superiore E, X la distanza dello stesso punto dal punto inferiore D, le resistenze rispettive dei due solidi stanno come X : 4y se i solidi sono travi parallelepipede allora X = y e due resistenze stanno ::1:4; una trave caricata nel mezzo resiste dunque 4 volte di più alla rottura, che se fosse caricata all'estremità.

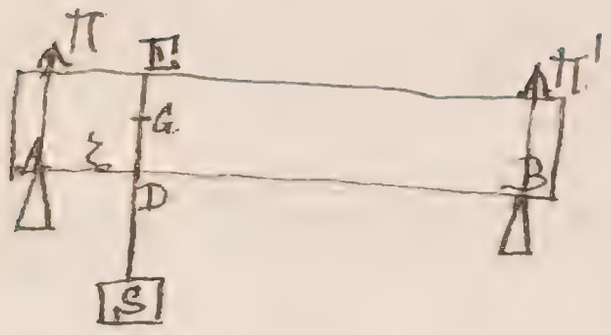
Veniamo ora conto del peso proprio del solido; sia questo V, le pressioni del solido sui sostegni saranno $= \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}V$, la rottura tenderà ancora a farsi secondo la sezione di mezzo DE, tendendo le due porzioni AD, DB di solido a prendere un moto rotatorio intorno al punto superiore E della base DE, sottanto le forze che tendono a produr questo moto non sono più le sole forze $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}V$ che bisognerebbe sostituire ai sostegni perchè togliendoli il solido fosse egualmente sostenuto, ma ci avremo di più i pesi $\frac{1}{2}V$ delle due porzioni di solido applicati nei centri di gravità di questi, i quali tendono a produr rotazioni in senso contrario;



Perchè dunque vi sia equilibrio tra il peso P, il peso del solido, e la tenacità di questo, bisognerà che sia $\left(\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}V\right)\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}V\cdot\frac{1}{4}C = K'A^2Y$; Quindi ricaviamo

$$P = \frac{4K'A^2Y}{C} - \frac{1}{2}V,$$ ora P misura la resistenza rispettiva del solido.

Resistenza rispettiva di un solido appoggiato alle sue due estremità e caricato in un luogo qualunque della sua lunghezza è normalmente a quella di un peso S.



Evidentemente la rottura tenderà a farsi secondo la sezione DE, e le due porzioni AD, BD del solido tenderanno a prendere un moto rotatorio intorno al punto E.

Le forze che tendono a produr questo moto sono le forze che bisognerebbe sostituire ai sostegni se volessimo toglierli, ora se sia $AD=\xi$, $AB=c$, GE ossia dist.a del Centro di gravità G dal punto $E=\gamma$, A^2 la sezione trasversale del solido, le forze da sostituirsi ai sostegni sono $\Pi=S\frac{c-\xi}{c}$, $\Pi'=S\frac{\xi}{c}$, le quali si ottengono decomponendo S in due forze applicate in A, B; perchè dunque vi sia equilibrio tra la forza S e la tenacità del solido deve essere $S\frac{c-\xi}{c}\xi=K'A^2\gamma$; quindi ricaviamo la misura della resistenza rispettiva del solido alla rottura secondo la sezione DE, $S=\frac{cK'A^2\gamma}{\xi(c-\xi)}$;

$\frac{cK'A^2\gamma}{\xi(c-\xi)}$ è $>\frac{4K'A^2\gamma}{c}$, dunque un solido porta un peso maggiore ~~[illegible]~~ quando è caricato in una sezione qualunque che quando è caricato nel mezzo, ed il minimo peso ~~[illegible]~~ capace di romperlo è quello che è capace di romperlo quando è caricato nel mezzo

Se teniamo conto del peso V proprio del solido, allora $\begin{cases}\Pi=S\frac{c-\xi}{c}+\frac{1}{2}V\\ \Pi'=S\frac{\xi}{c}+\frac{1}{2}V\end{cases}$ ed oltre la forza Π alla porzione di solido AD è applicato nel suo Centro di gravità il proprio peso $\frac{V\xi}{c}$, l'equazione che esprime che vi ha equilibrio tra il peso del solido, il peso S e la tenacità è dunque

$\left(S\frac{c-\xi}{c}+\frac{1}{2}V\right)\xi-\frac{V\xi}{c}\cdot\frac{\xi}{2}=K'A^2\gamma$, donde ricavasi

$$S=\frac{cK'A^2\gamma}{\xi(c-\xi)}-\frac{V}{2},$$ la resistenza è dunque minore se il solido ha un peso notabile.

Problema.

La sezione trasversale del solido sia un rettangolo di larghezza costante e di altezza variabile. Si domanda secondo qual legge dovrà variare l'altezza perchè il solido ~~regga~~ resista egualmente bene alla rottura dovunque sia applicato il peso S.

Abbiamo trovato, che la resistenza del solido alla rottura secondo una sezione a distanza z dal punto A è $S=\frac{CK'A^2y}{z(c-z)}$;

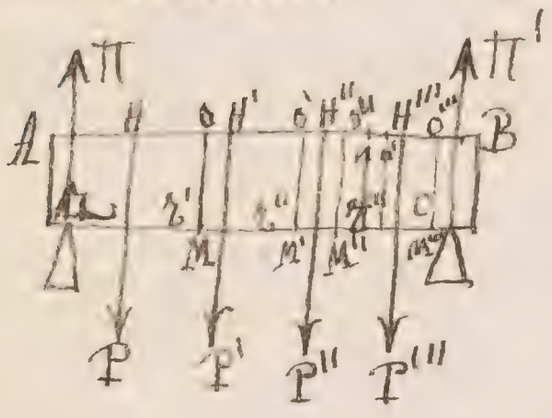
nel nostro caso se b sia la larghezza costante del solido, y l'altezza variabile, sarà $A=by$, $y=\frac{y}{2}$, e quindi $S\,z(c-z)=\frac{CK'by^2}{2}$, ossia ordinando $y=\sqrt{\frac{2S}{CK'b}}\sqrt{cz-z^2}$

Questa è l'equazione di una ellisse, di cui l'asse maggiore è AB, e l'asse minore è $=\sqrt{\frac{2CS}{2K'b}}$; la sezione longitudinale del solido deve dunque essere una ellisse.

Perciò le rotaje delle strade ferrate si facevano una volta della forma, che si vede nella fig.ª qui contro

e erano dette rotaje a ventre di pesce; ma ora si fanno generalmente di forma prismatica perchè quelle a ventre di pesce restano troppo sottili nel mezzo.

Altro Problema.



ad un solido prismatico o cilindrico, sostenuto nelle sue due estremità sono attaccati diversi pesi P, P', P'', P''' alle distanze z, z', z'', z''' dall'estremità A, la lunghezza del solido è c, si Domanda dove il solido tende a rompersi.

Calcoliamo le pressioni che per l'azione di tutte queste forze gli appoggi sostengono, troviamo pel sostegno all'estremità A $\Pi=P\frac{c-z}{c}+P'\frac{c-z'}{c}+\cdots=\frac{1}{c}\Sigma P(c-z)$. pel l'altro sostegno $\Pi'=P\frac{z}{c}+P'\frac{z'}{c}+\cdots=\frac{1}{c}\Sigma Pz$, ~~$\Pi+\Pi'$~~ potremo trovare gli appoggi e mettere in vece loro le forze $\Pi.\Pi'$.

Ciò posto supponiamo che la rottura tenda a farsi secondo la sezione OM adjacente E da A, ossia che il solido AM tenderà a girare intorno ad O, e le forze tendenti a produr questo moto saranno $\Pi.P$; perchè queste forze facciano equilibrio alla tenacità bisogna che sia $\Pi.AO-P.HO=K'A^2y$, ossia il solido AM tenda a girare intorno ad O con momento $\Pi.AO-P.HO$;

Le supponiamo successivamente, che la rottura tenda a farsi secondo le sezioni $O'M'$, $O''M''$, $O'''M'''$, in ciascun caso il solido a sinistra AM' od AM'' od AM''' tenderà a girare intorno ad O' od O'' od O''' con momento $\Pi.AO'-P.HO'-P'.H'O'$ o con momento $\Pi.AO''-P.HO''-P'.H'O''-P''.H''O''$, o con momento $\Pi.AO'''-P.HO'''-P'.H'O'''-P''.H''O'''-P'''.H'''O'''$; ora evidentemente la rottura si farà secondo quella sezione pervui il momento per ruotarsi intorno ad un punto superiore è massimo; per vedere quale sia questo momento massimo, siccome dopo è formato di due parti una positiva l'altra negativa bisognerà che vediamo fino a quando crescerà il complesso di queste due parti.

Fingiamo perciò che la sezione di rottura sia a sinistra di P'', che sia per es. $O'M'$, e quindi che sia a destra di P'', e sia per es. $O''M''$, essendo $O''H''$ infinitamente piccola, e vediamo come varii il momento passando dalla 1ª alla 2ª ipotesi. Nella 1ª ipotesi il momento è $\Pi AO'-P.HO'-P'.H'O'$, passando alla 2ª la parte positiva cresce della quantità $\Pi.O'O''$, la parte negativa cresce della quantità $(P+P')/O''O''+P''.H''O''$, ossia, trascurando $P''.H''O''$ a fronte degli altri termini poichè $H''O''$ è infinitamente piccola, della quantità $(P+P')/O''O''$, quindi si vede che il momento cresce se $P+P'<\Pi$, cala se $P+P'>\Pi$. Il Problema è risolto; Quando ad un solido prismatico o cilindrico sono applicate più pesi normalmente alla sua lunghezza per sapere dove si potrà fare la rottura,

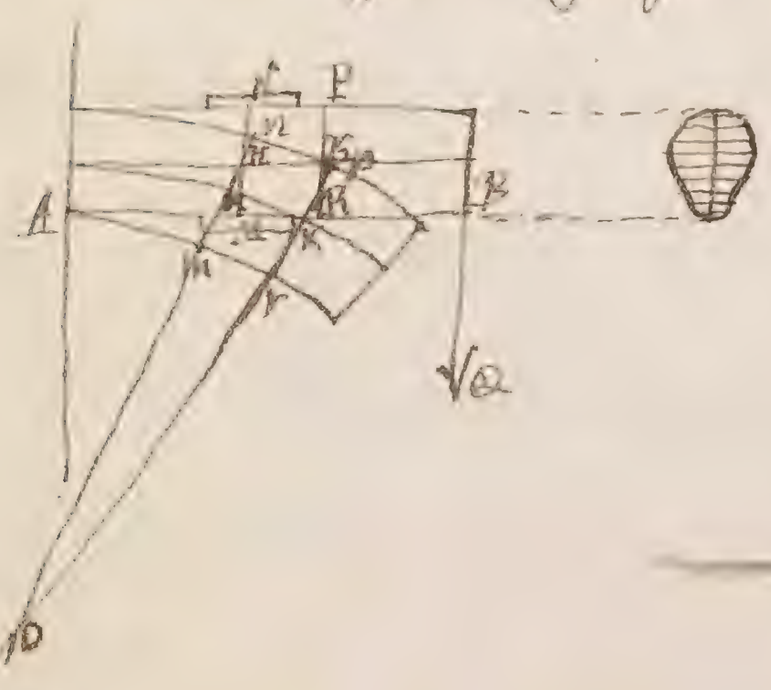
si calcoli la pressione Π sostenuta da uno degli appoggi del solido, quindi a partire da questo appoggio si facciano le somme ~~dei pesi~~ $P, P+P', P+P'+P'', P+P'+P''+P''', \ldots\ldots$, finchè se ne trovi una $> \Pi$, supponiamo che si sia trovato per es. che $P+P'+P'' < \Pi$, e che $P+P'+P''+P''' > \Pi$ si concluderà che la sezione di rottura è tra P'' e P'''; per determinare poi precisamente il luogo della rottura si supporrà successivamente che la sez. la rottura si faccia tra P'' e P''' in O'', in $n, in n'$, e ---- si vedrà per quale di queste sezioni il momento intorno ad O'', n, n' --- delle forze Π, P, P', P'' sia massimo, lì sarà la sezione di rottura.

Lezione 5ª

Teniamo conto della flessibilità delle fibre dei solidi.

Le fibre di un solido prima di rompersi ~~si~~ o sviarsi si allungano o si accorciano fino ad un certo limite, e gli allungamenti o gli accorciamenti sono proporzionali fino ad un certo limite alle tensioni, o pressioni, che le fibre sostengono; noi ammetteremo che siano proporzionali alle pressioni, e che i coefficienti di estensibilità di comprimibilità siano quali, in altre parole ammetteremo che gli allungamenti e gli accorciamenti di una stessa fibra prodotti dalla stessa forza siano eguali.

Consideriamo un solido, che supponiamo non è sollecitato da alcuna forza ha la figura settilinea; sia la sua sezione trasversale simmetrica rispetto alla verticale di mezzo, consideriamo una posizione MN di questa sezione, e il solido nominalmente alla sua lunghezza applicheremo un peso Q, per l'azione di questo peso le fibre collocate verso la parte superiore del solido si allungheranno, le fibre collocate verso la parte



inferiore si accorcierà, e vi avrà per conseguenza tra queste e quelle una fibra né allungata né accorciata.

Infatti ~~la tenacità~~ se il solido fosse rotto in due parti secondo la sezione MN, ossia se nella sezione MN non esistesse la tenacità bisognerebbe perchè le due parti di solido non si staccassero per l'azione della forza Q, che congiungessimo ~~le dette~~ parti con due lamine di ferro come vedesi nella fig.ª; ora la forza Q ~~tende a separare~~ produce pressioni sulle lamine N, M eguali direttamente opposte e dirette secondo la lunghezza del solido (V. Hat.ª pag.ª 204), ossia produce una tensione in N, una pressione in M; la prima allunga le fibre collocate in N, la 2ª accorcia le fibre collocate al di sotto in M. Le per impedire lo staccamento delle due porzioni di solido AN BM invece di fissare le ~~fibre~~ collocate in M, N avessimo fissate ~~altre fibre~~ per l'azione della forza Q quelle poste superiormente avrebbero ancora sofferta una tensione, quelle poste inferiormente una pressione; ora tutte le fibre del solido sono ritenute dalla tenacità di queste, dunque tutte le fibre del solido per l'azione della forza Q o si allungano o si accorciano; si allungano le più alte, si accorciano le più basse, ma la tensione delle più alte scema col scemare dell'altezza di queste, la pressione delle più basse ~~scema~~ scema anche andando da basso in alto, vi ha dunque una fibra tra queste e quelle né tesa né premuta, che per conseguenza né si allunga né si accorcia.

Questa fibra la Chiamiamo fibra media o fibra invariabile.

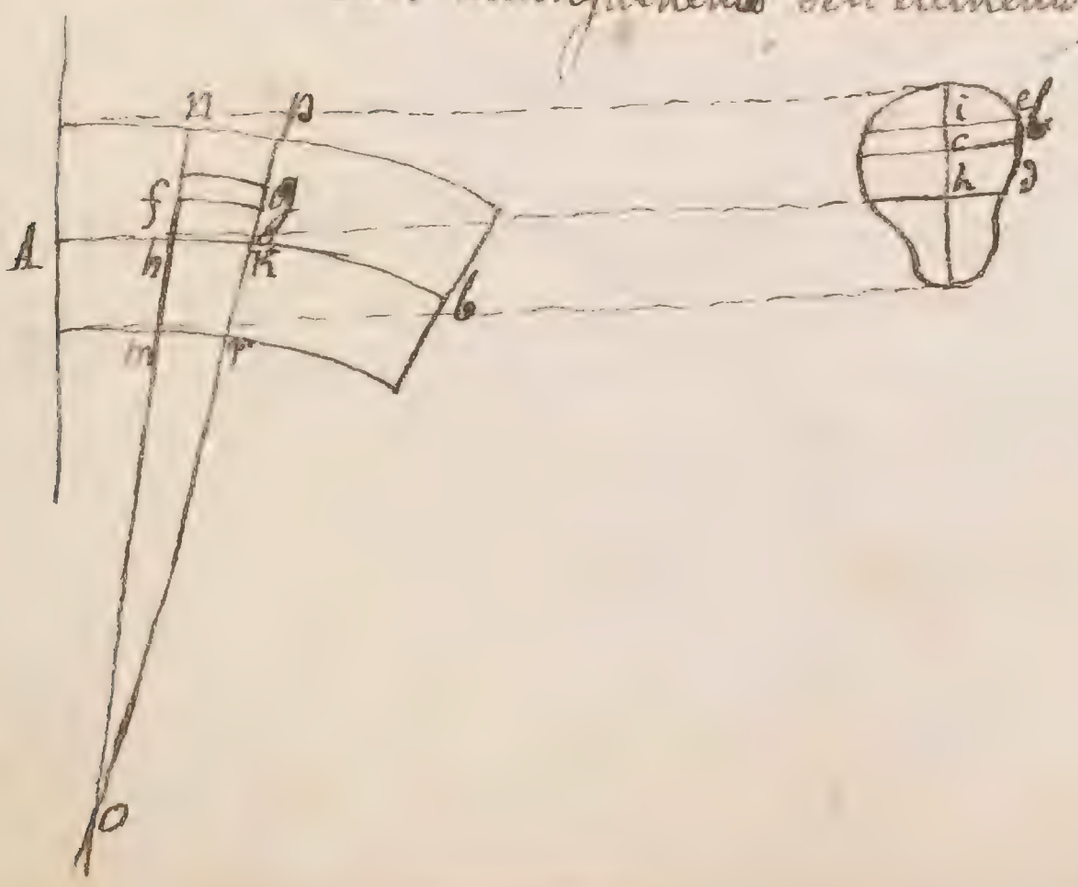
Tutte le fibre collocate in un medesimo piano orizzontale sono tese o premute egualmente, quindi possiamo concepire un solido come formato di tanti strati orizzontali i quali s'allungano o si accorciano per l'azione del peso Q.

Per l'azione di Q, il solido essendo flessibile, non solo i tratti di cui è formato si allungano o accorciano, ma di inflettono.

Riguardo all'inflessione facciamo pure una Ipotesi; Tutte le molecole di una sezione MN dopo l'inflessione si trovano ancora in un piano normale alla fibra media del solido. Quindi ne deduciamo che il piano delle molecole della sezione MN dopo l'inflessione si trova anche normale alle altre fibre inflesse, poichè non variando le distanze delle fibre per l'inflessione tutte si inflettono intorno curve parallele.

Ciò posto Consideriamo l'elemento di solido compreso tra due sezioni MN, PR, e tra le sezioni mn, pr dopo l'inflessione, che supponga infinitamente prossime, quest'elemento per l'inflessione non ha cangiato di massa, ma soltanto di forma, epperò dopo anche che abbia cangiato di volume. Prolunghiamo le sezioni mn, pr che lo comprendono finché s'incontrino in O, Om, Oh, Ok saranno i raggi di curvatura delle fibre ~~gh~~ km, media di infl. Se Q fosse stata obliqua alla lunghezza del solido la componente diretta avrebbe teso o premute tutte le fibre, epperciò anche la fibra media. Supponiamo perciò per fare il caso il più generale che hk abbia preso un cambiamento, e supponiamo che si sia allungata.

Chiamando ds la distanza delle sezioni MN, PR nello stato naturale del solido, ds la lunghezza alterata dell'elemento hK della fibra media, Kds l'allungamento dell'elemento hK, sarà $dS = ds(1+K)$.



Consideriamo uno strato orizzontale del solido non inflesso, sia questo strato compreso tra due piani orizzontali posti a distanze ch = u, ih = u + du dal piano orizzontale che contiene la fibra media, sia cl = v, l'area della

posizione della sezione MN compresa tra i due piani sarà espressa da 2 valori,
e se chiamiamo ρ il raggio di curvatura della fibra media hK sarà $\rho+u$ il
raggio di curvatura della fibra contenuta nel piano cl, ora $fg : hK :: ef : oh$,
dunque $fg = ds\frac{\rho+u}{\rho} = ds(1+K)\frac{\rho+u}{\rho} = ds(1+K)(1+\frac{u}{\rho})$, supponendo che
$\frac{u}{\rho}$ sia quantità infinitamente piccola possiamo trascurare il prodotto $K\frac{u}{\rho}$,
e scrivere $fg = ds(1+K+\frac{u}{\rho})$.

Questa espressione ci insegna, che K esprime l'allungamento dell'unità di lunghezza della fibra media, $K+\frac{u}{\rho}$ è l'allungamento dell'unità di lunghezza della fibra posta alla distanza u dalla fibra media, (avvertasi che sono fibre medie tutte quelle che sono collocate nel piano orizzontale hd) ora le fibre si allungano proporzionalmente alla tensione, se dunque chiamiamo dT la tensione della strato compreso tra i piani MN e cl, cioè, cl, sarà
$dT = \varepsilon du(K+\frac{u}{\rho})$, ε essendo un coefficiente costante.

Convenendo di dare al legno — alle distanze u prese al disotto del piano della fibra media questa formola vale per tutti i strati orizzontali del solido, se quindi chiamiamo T la somma delle tensioni di tutte le fibre, sarà evidentemente, chiamando u', u'' i limiti del solido rispetto ad u, $T = 2\varepsilon K\int_{u'}^{u''} v\,du + \frac{2\varepsilon}{\rho}\int_{u'}^{u''} v u\,du$;
ora se A^2 sia la sezione trasversale del solido, v la distanza del centro di gravità di questa sezione dal piano della fibra media, sarà $2\int_{u'}^{u''} v\,du = A^2$, $\int_{u'}^{u''} vu\,du = v\cdot A^2$,
dunque $T = \varepsilon K A^2 + \frac{2\varepsilon}{\rho} vA^2$.
se la fibra media passasse pel centro di gravità di tutte le sezioni, allora sarebbe $v=0$,
$T = \varepsilon K A^2$. Per semplificare le espressioni chiamiamo fibra
media quella che passa pei centri di gravità di tutte le sezioni, K l'allungamento
dell'unità di lunghezza di questa fibra sarà $T = \varepsilon K A^2$.

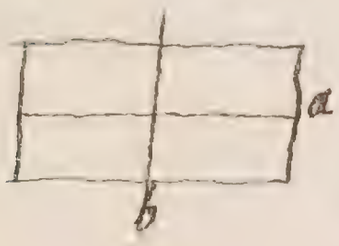
È da notarsi che la formola trovata è soltanto vera nel caso in cui l'inflessione sia piccolissima, poichè soltanto allora $\frac{u}{\rho}$ è quantità piccolissima.

Questa formola inoltre ci dice che l'allungamento K dell'unità di lunghezza della fibra media è eguale all'allungamento che prenderebbe una parte del solido di lunghezza = 1 se fosse tratta longitudinal-mente con forza T.

Le chiamiamo dM il momento di dT rispetto ad un'asse orizzontale condotto per h, abbiamo $dM = u\,dT = 2\varepsilon u v du \left(K + \frac{u}{\rho}\right)$, e questo è il momento con cui [illegible] tende agire intorno ad h per rimettersi nella sua posizione naturale; facendo la somma di tutti questi momenti abbiamo il momento totale $M = 2K\varepsilon \int_{u'}^{u''} u v du + \frac{2\varepsilon}{\rho} \int_{u'}^{u''} u^2 v du = \frac{2\varepsilon}{\rho} \int_{u'}^{u''} u^2 v du$ con cui [illegible] solido tende a girare intorno ad h per rimettersi nella sua posizione naturale; ove la forza che tende a rimettere un corpo nella sua posizione naturale, quando esso ne fu slogiato, l'abbiamo chiamata elasticità, M dunque è il momento dell'elasticità [illegible]; ma nell'espressione di M $\int_{u'}^{u''} u^2 v du$ è una quantità costante, il momento M è dunque invariabilmente proporzionale al raggio di curvatura ρ della fibra media.

Questo risultato l'abbiamo già ottenuto come ipotesi nella teoria della curva elastica, (V Stat.ª pag. 295), ed il momento M l'avevamo espresso colla formola $\frac{E}{\rho}$, quindi concludiamo, che l'ipotesi ottenuta è vera quando sieno vere le ipotesi da cui noi ora siamo partiti, e che $E = 2\varepsilon \int_{u'}^{u''} u^2 v du$, essendo un coefficiente dipendente unicamente dalla forma del solido, e che già (pagª 242) abbiam denominato coefficiente d'elasticità.

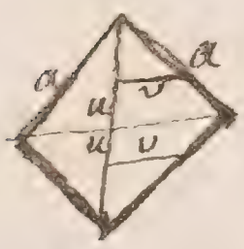
Ciò posto se la sezione trasversale del solido è un rettangolo di altezza a, di base b,



$$\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} u^2 \frac{b}{2}\,du = \frac{b}{2}\left[\frac{a^3}{3}\right] = \frac{a^3 b}{2 \cdot 12}$$, e quindi $E = \frac{\varepsilon}{12} a^3 b$.

Le la sezione è un quadrato di alt.a a $E_1 = \frac{\varepsilon}{12} a^4$;

Le la sezione quadrata del solido è posta colla diagonale verticale

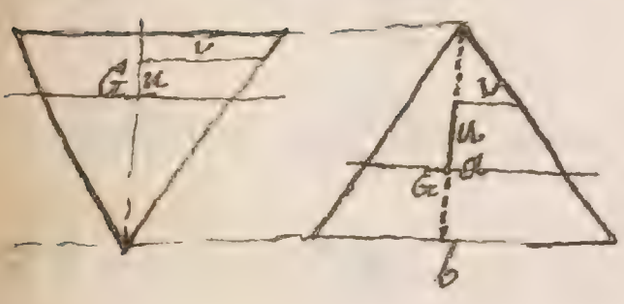


$$\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0} u^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+u\right)du + \int_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} u^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-u\right)du$$

$$= \frac{2^4}{24}\,, \text{ e quindi } E_1 = \frac{\varepsilon}{12} a^4 \text{ come quando il lato}$$

era verticale.

Le la sezione è un triangolo isoscele col vertice all'ingiù, di base b e di altezza a,



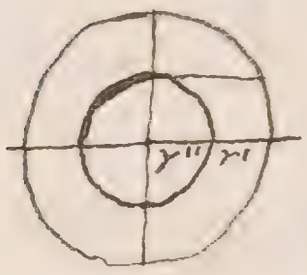
allora abbiamo $v = \frac{\frac{1}{2}b\left(\frac{2}{3}a-u\right)}{a}$, e quindi

$$\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du = \int_{-\frac{1}{3}a}^{\frac{2}{3}a} \frac{b}{2a} u^2\left(\frac{2}{3}a-u\right)du = \frac{1}{72} b a^3,$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon}{36} b a^3.$$

Se il triangolo isoscele è col vertice all'ingiù si ha parimente $E_1 = \frac{\varepsilon}{36} b a^3$.

Se il solido è un tubo circolare vuoto, di cui raggio esterno è r', l'interno r'',



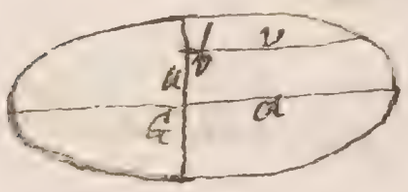
$$\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du = 2\int_{0}^{r''} u^2\left[\sqrt{r'^2-u^2} - \sqrt{r''^2-u^2}\right]du + 2\int_{r''}^{r'} u^2\sqrt{r'^2-u^2}\,du$$

$$= 2\int_{0}^{r'} u^2\sqrt{r'^2-u^2}\,du - 2\int_{0}^{r''} u^2\sqrt{r''^2-u^2}\,du = \frac{\pi}{8}\left(r'^4-r''^4\right)$$

e quindi $E = \frac{\varepsilon}{4}\pi\left(r^4-r''^4\right)$.

Se la sezione del solido è un cerchio di raggio r $E = \frac{\varepsilon}{4}\pi r^4$.

Se la sezione è una ellisse avente l'asse minore b verticale,



$$\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du = \frac{a}{b}\int_{-b}^{+b} u^2\sqrt{b^2-u^2}\,du = \frac{2a}{b}\int_{0}^{b} u^2\sqrt{b^2-u^2}\,du$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{\pi}{8}b^4 = \frac{\pi a b^3}{8}\,, \text{ e quindi}$$

$$E = \frac{\varepsilon}{4}\pi a b^3.$$

Lezione 58.ª

Se al solido non è applicata una sola forza, ma più forze comunque dirette, allora la curva della fibra media, che passa per i Centri di gravità di tutte le sezioni può essere a doppia curvatura, in tal caso bisognerà prendere l'asse delle u nel piano osculatore della curva, e quello delle v normale a questo piano.

Esempio.

Una sbarra di ferro di sezione quadrata, di lato $0^{m}.04$, e di altezza 2^{m} è appoggiata verticalmente sul suolo, prendendo il millimetro quadrato per unità di sezione pel ferro $\varepsilon = 20000$ chil., si domanda di qual peso si potrà gravare la testa della sbarra senza che si infletta ni punto ni poco, ossia qualunque l'ultimo peso incapace di produrre l'inflessione.

Sia P il peso domandato sarà $P = \frac{E' \pi^2}{L^2}$, L essendo la lunghezza della sbarra, (V. Mat.ª pag.ª 303), ora prendendo per unità il millimetro $L = 2000$,

$$E' = \frac{\varepsilon}{12} a^4 = \frac{20000}{12} (40)^4 = \frac{5000.64000}{3}, \text{ dunque}$$

$$P = \pi^2 \frac{3,200,000,000}{3 \times 4000000} = \pi^2 \frac{800}{3} = 2629,23 \text{ chil.}$$

Cerchiamo adesso come. Determinate le leggi con cui i solidi prismatici o cilindrici si inflettono si possa determinare la loro resistenza alla rottura.

La rottura evidentemente comincia sempre o nelle fibre più atte o nelle più basse, poichè queste sono le più accorciate, quelle le più allungate; per determinare la resistenza di un solido alla rottura facciamo una ipotesi:

Le fibre di ogni solido si allungano proporzionalmente alla tensione fino all'istante in cui si lacerano.

Posta questa ipotesi ripetta, che se K è il valore della tensione capace di produr lo sdrucciolamento in un solido di lunghezza uno, di sezione uno, 2K è il massimo allungamento che le fibre possono prendere senza sdrucciolarsi, ora ripetendo il raggio di curvatura della fibra invariata, ritenendo le denominazioni della sezione antecedente, l'allungamento della fibra ~~qualunque~~ più lontana del detto solido è $\frac{u''}{\rho}$, dunque all'istante della rottura $\frac{u''}{\rho} = \alpha K$; quindi ricaviamo $\frac{1}{\alpha\rho} = \frac{K}{u''}$, epperchè $\frac{1}{\alpha} = \varepsilon$, $\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{K}{u''}$.

Ma il momento M con cui il solido resiste ad una forza che tende ad infletterlo è $M = \frac{2\varepsilon}{\rho}\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du$. Dunque il momento della resistenza del solido alla rottura è

$$M = \frac{2K}{u''}\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du.$$

Per la sbranca di ferro del problema antecedente, se supponiamo che sia $K = 40$ chil. sul millimetro quadrato il peso che può sopportare una stessa sbranca senza rompersi, avremo $M = \frac{1}{6}(40)^4 = \frac{640000}{6} = 106666,666$.

La rottura avrà luogo dove M sarà massimo, epperchè ~~se~~ $M = \frac{E}{\rho}$, la rottura avrà luogo dove ρ sarà minimo, ovvero dove è massimo il momento della forza infletente ivi è minimo il raggio di curvatura, la rottura avrà dunque luogo nelle vicinanze del luogo ove il solido si incastra nel muro.

Ciò posto chiamando c la ~~metà~~ lunghezza del solido, nel caso in cui questo non si infletta molto prima di romperlo per determinare il peso Q che dello può sostenere senza romperlo, avremo ~~[redacted]~~ l'equazione $Q \cdot c = \frac{2K}{u''}\int_{u'}^{u''} u^2 v\,du$.

Nei casi pratici non bisogna tenere il K dato dalle esperienze, ma bisogna prenderlo molto epoco più grande di questo secondo le circostanze.

Statica Architettonica.

Lezione 1.ª

La Statica architettonica espone i principii Meccanici che devono presiedere al proget-
to di una fabbrica.

Per l'equilibrio di una fabbrica è necessario, che ciascuna parte componente la fabbrica lia-
-sida in se stessa che non si sciolga, e che tutte le parti non si muovano dalla posizione in cui
il Costruttore le colloca.

Nella Statica Architettonica si ricercano inoltre le condizioni necessarie perchè l'equilibrio sia
stabile, ora perchè l'equilibrio sia stabile bisogna 1.° che rimosse alquanto le parti dalla
loro posizione d'equilibrio esse ritornino al loro luogo. 2.° che la fabbrica per le cause estrinseche
che agiscono lentamente e continuamente sul di essa non si muova per un dato tempo; le
forze estrinseche che possono far rovinare la fabbrica dopo un dato tempo sono molte, come il gelo,
e disgelo, gli agenti Chimici, l'infracidire di legname, le pioggie, le nevi, ecc.ecc.;
Perchè
Perquest' ultima condizione sia soddisfatta è necessaria una buona scelta di materiali, la
buona disposizione di giunti, il buon mantenimento della fabbrica dopo che essa è costrutta, e
quel che importa di più, l'esperienza; perciò non tiene parte di questa 2.ª parte la Statica ar-
-chitettonica, ma soltanto stabilisce le condizioni perchè l'equilibrio di una fabbrica sia
stabile riflettendo alle forze, che tenderebbero a smuovere alquanto le parti della fabbrica dalla loro
posizione.

In una fabbrica havvi delle parti, che sono puramente sostenute, e delle parti, che debbono
sostenere le stesse e le prime, quindi la Statica Architettonica si divide in due par-

Nella 1ª parte si ricercano le condizioni perchè i sostegni reggano alle spinte ed ai carichi che devono sopportare;

Nella 2ª Parte si ricercano ~~le condizioni~~ quali sono le spinte che le parti sostenute fanno sopportare ai loro sostegni e quali le condizioni perchè le parti sostenute non si sciolgano.

Parte 1.ª

Le Parti di una fabbrica, che sono destinate a sostenere delle spinte dei carichi sono le travi, le corde, le chiavi di ferro, i modiglioni, i puntelli, le colonne, i pilastri, i muri, ~~i pilastri~~, la fondazione ecc.

La fondazione sostiene una pura pressione, pressione che trasmette al suolo sottoposto, è quindi condizione indispensabile per l'equilibrio di una fabbrica, che la resistenza del suolo sia tale da reggere al peso di tutta la fabbrica senza che questa si avvalli.

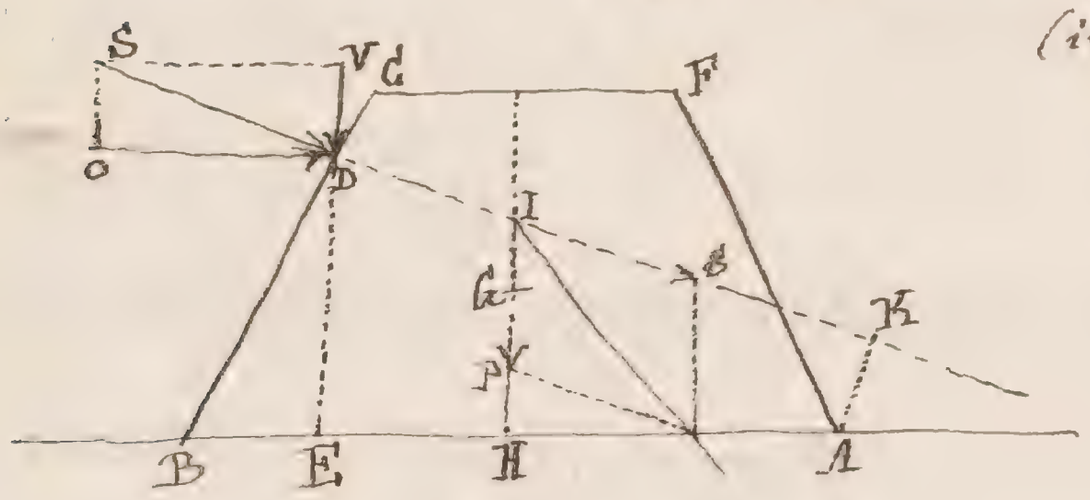
Tutte le parti di una fabbrica che sono soggette a spinte si chiamano col termine generico Piedritti, Lo studio della 1ª parte della Statica Architettonica consiste dunque nello stabilire le condizioni perchè l'equilibrio di un Piedritto sia stabile.

Condizioni perchè un dato Piedritto soggetto a una spinta verticale e ad una orizzontale e appoggiato sul suolo non si avvalli nel suolo, non si pieghi sotto, non si schiacci, e non si rompa.

I Piedritti sono di due specie, Isolati o Continui.

Diconsi isolati quelli le cui dimensioni orizzontali sono paragonabili insieme, come le Colonne o pilastri; Diconsi continui quelli in cui una dimensione orizzontale supera di molto le altre anche orizzontali come i muri; Trattando

di questi considereremo soltanto di essi una porzione di lunghezza 1, quindi il loro peso ~~assoluto~~ lo otterremo moltiplicando il peso dell'unità cubica per l'area della sezione, e quando diremo, che un piedritto è soggetto ad una spinta si intenderà che è soggetto a tale spinta l'unità di lunghezza del piedritto.

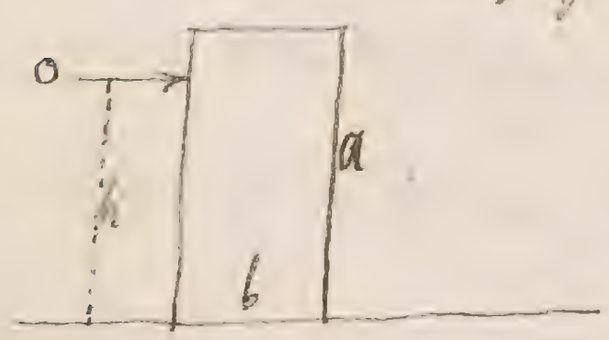


Ciò posto sia ~~un piedritto~~ ABGF la sezione trasversale del Piedritto, e sia soggetto ad una spinta S diretta nel piano della sezione ABGF, si domanda se l'equilibrio è stabile.

sia P il peso assoluto del piedritto, f il coefficiente dell'attrito, che si avrebbe sul suolo, se il piedritto strisciasse, si componiamo la spinta S in due una orizzontale, l'altra verticale, sia O l'orizzontale, V la verticale, evidentemente la condizione perchè il Piedritto non scivoli sul suolo sarà $f(P+V)>O$, e la condizione perchè il Piedritto non si rovesci prendendo un moto rotatorio intorno ad A sarà $P.AH > S.AK$.

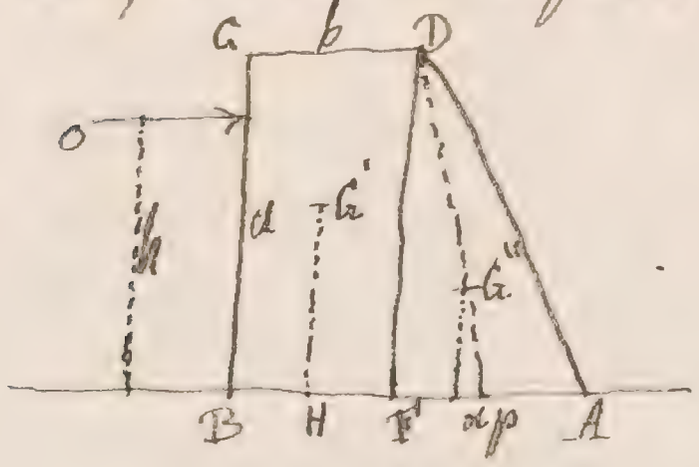
Si può anche ricongiere se l'equilibrio del Piedritto sia stabile cercando graficamente la risultante del peso P della forza S e vedendo se questa passi per la base AB; se vi passerà l'equilibrio sarà stabile, ma questo metodo non vale più per determinare per es.° la larghezza del piedritto in modo che il suo equilibrio sia stabile quando è data la spinta. ~~Come~~ Da cui è formato il piedritto, e la sua altezza.

Risolviamo ~~[redacted]~~ questo Problema in alcuni casi particolari:



Sia il piedritto di peso specifico δ un muro di sezione rettangola di altezza a, e di base incognita b, sia questo muro soggetto ad una spinta orizzontale O applicata a distanza h dalla base, per deter-

minore b avremo le condizioni $f.abG > 0$, $\frac{ab^2G}{2} > Oh$, quindi ricavasi che deve essere $b > \frac{O}{faG}$. $b > \sqrt{\frac{2Oh}{aG}}$; quando saran dati in numeri O, h, a, f, G, si calcoleranno le quantità $\frac{O}{faG}$, $\sqrt{\frac{2Oh}{aG}}$, e si prenderà $b >$ di quella che avrà un valor massimo.



Sia un muro a scarpa, di cui si debbano determinare le condizioni dell'equilibrio stabile.

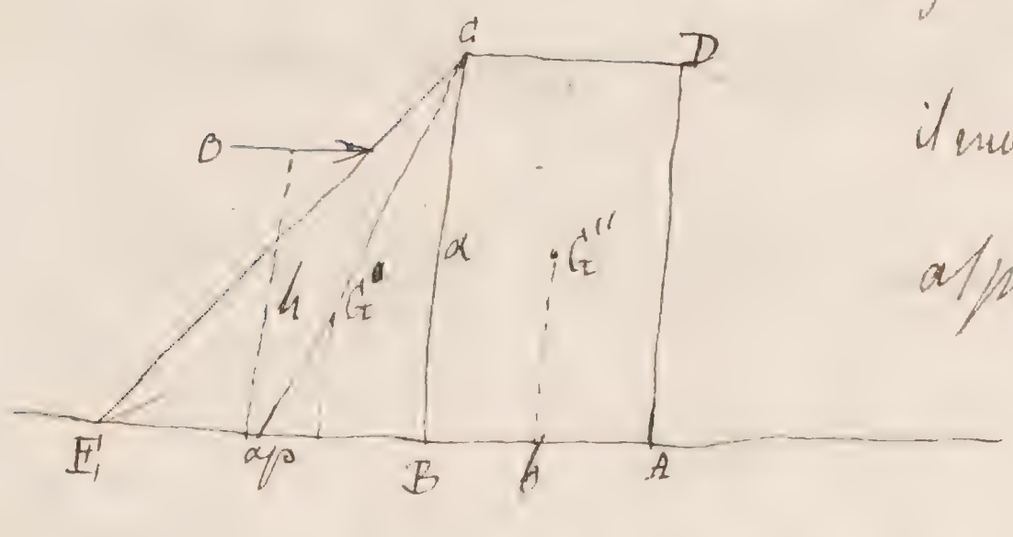
La scarpa può essere interna, od esterna, od interna ed esterna. Dicesi interna quando è dalla parte ove è applicata la spinta, esterna quando è dall'altra parte, interna ed esterna quando vi è da una parte che dall'altra.

Sia la scarpa esterna, sia a l'altezza del muro, p il rapporto $AF : FD$, il quale misura l'inclinazione della scarpa colla verticale, b la larghezza GD del muro, G il peso specifico di esso, f il coefficiente dell'attrito, O la spinta, presupponga orizz.e ad altezza h. Sarà $ab + \frac{1}{2}a^2p$ l'area della sezione $ABGD$, $fG(ab + \frac{1}{2}a^2p)$ il valore dell'attrito, e quindi $fG(ab + \frac{1}{2}a^2p) > O$ la condizione necessaria perchè il muro non strisci,

$G ab(\frac{1}{2}b + ap) + G \cdot \frac{1}{2}a^2p \cdot \frac{2}{3}ap > Oh$ la condizione perchè il muro non di rovesci girando intorno al punto A.

Alle volte sarà data b e dovrà determinare l'inclinazione da darsi alla scarpa; altre volte sarà data l'inclinazione della scarpa, come quando il muro dovesse servire di fortificazione di una Cittadella, ed allora le condizioni suddette somministrano la larghezza b del muro.

Sia la scarpa interna, ritenendo le stesse denominazioni, la condizione perché il muro non ribalti sarà $f\,G\left(ab+\frac{1}{2}a^2p\right)>0$, e la condizione perché il muro non si rovesci girando con moto rotatorio intorno al punto A sarà $G\left\{\frac{ab^2-a^2p\left(b+\frac{1}{3}ap\right)}{2}\right\}>0h$.

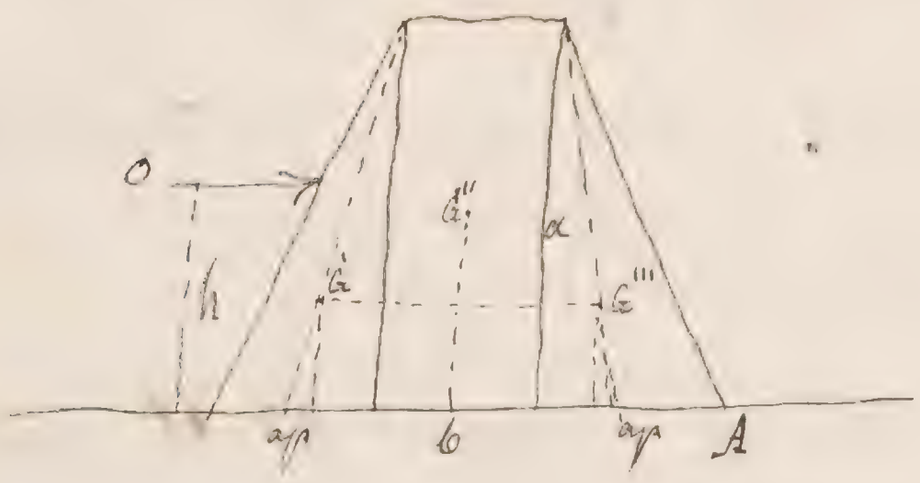


Se la scarpa è interna ed esterna, supponendo le due scarpe simmetriche dalle due parti e ritenendo le stesse denominazioni, la condizione perchè il muro non ribalti sarà

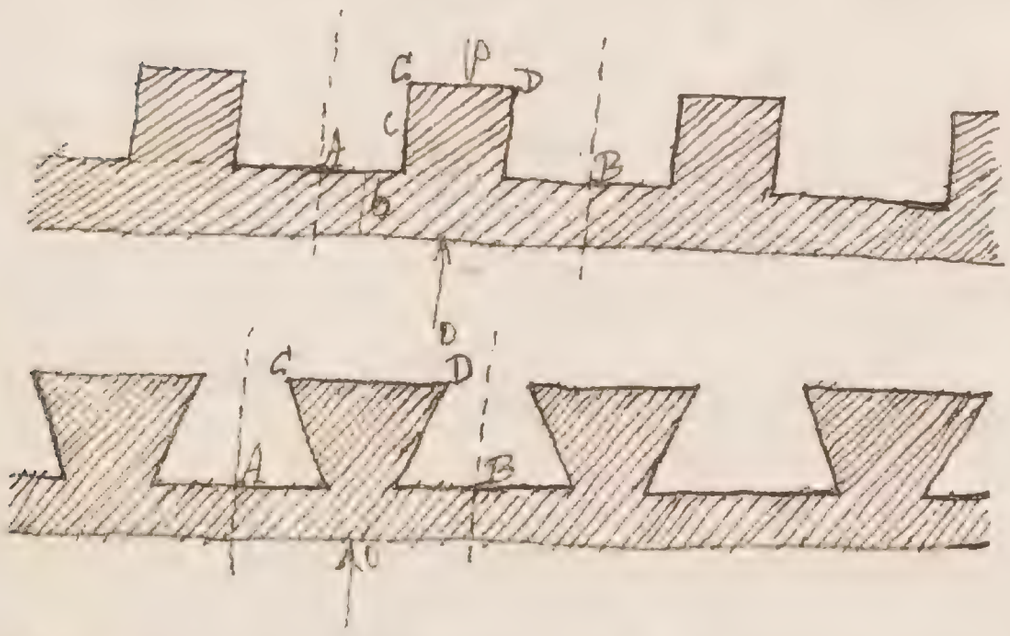
$$f\,G\left\{ab+a^2p\right\}>0$$

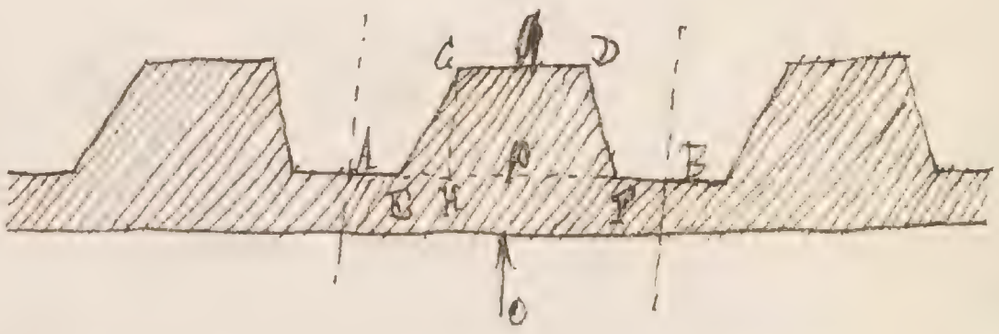
, e la condizione perchè non si rovesci girando intorno ad A sarà

$$\frac{1}{2}\,Ga\,(ap+b)\,(2ap+b)>0h\,.$$



Alle volte invece di scarpe continue ai muri si aggiungono dei contrafforti prismatici di distanza in distanza a base rettangola o trapezia. Si chiama Cortina lo spazio compreso tra due contrafforti.





Quest'ultima specie di contrafforti son detti a coda di rondine.

Per scrivere le condizioni d'equilibrio dei muri così muniti di contrafforti ~~si~~ bisogna scrivere le condizioni di stabilità della parte compresa fra due piani verticali A, B condotti pel mezzo della cortina, e la spinta orizzontale opera egualmente su tutta la lunghezza del muro.

sia a l'altezza del muro, h l'altezza a cui si gerita la spinta, b la larghezza del muro; c il peso specifico della materia componente il muro del contraffforte, d la distanza AB. sia nel 1° Caso in cui la base del contraffforte è rettangola e la ~~lun~~ lunghezza di questo, p la larghezza, la condizione perchè il muro non ribalti sarà

$$f \frac{c}{a}(bd+cp) > 0$$, e la condizione perchè il muro non si rovesci girando intorno a CD sarà $\frac{c}{a}\left[\frac{1}{2}b^2d+bcd+\frac{1}{2}c^2p\right] > 0h$.

Quando la base del contraffforte è trapezia e la coda CD è ~~EF~~ $< o > EF$, essendo $CH = c$ $CD = q$, $EF = p$, la condizione perchè il muro non ribalti sarà

$$f\frac{c}{a}\left[bd+\frac{1}{2}(q+p)\right] > 0$$, e la condizione perchè non si rovesci sarà

$$\frac{c}{a}\left[\frac{1}{2}b^2d+bcd+\frac{1}{6}c^2(2p+q)\right] > 0h.$$

La forma $p > q$ è più vantaggiosa pei contraffforti esterni, la forma $p < q$ è più vantaggiosa per gli interni.

Lezione 2ª.

La terra si considera o come parte sostenente quando è base di fondazione, o come parte sostenuta come nei terrapieni.

Considerata come parte sostenente per l'equilibrio della fabbrica è necessario, che la sua resistenza alla compressione sia tale, che la fabbrica non s'avvalli. Se non è possibile di fare che la fabbrica non s'avvalli, ossia se l'altezza non è la resistenza della terra da reggere il peso della fabbrica senza s'incavi, bisogna fare che l'avallamento sia uniforme, ora possono avvenire due Casi, od il suolo è dappertutto egualmente comprimibile ovvero; nel 1° Caso bisogna fare che la pressione su ciascuna area del suolo sia a questa proporzionale, ossia che il peso

totale della fabbrica si possa scomporre in tante forze parallele eguali uniformemente distribuite sul piano della fondazione, ora la risultante di un sistema di forze parallele, eguali ed uniformemente distribuite sopra un'area piana passa pel centro di gravità di quest'area, bisogna dunque, perché l'avvallamento della fabbrica sia uniforme, che la verticale eretta sul centro di gravità del piano della fondazione passi pel centro di gravità della fabbrica.

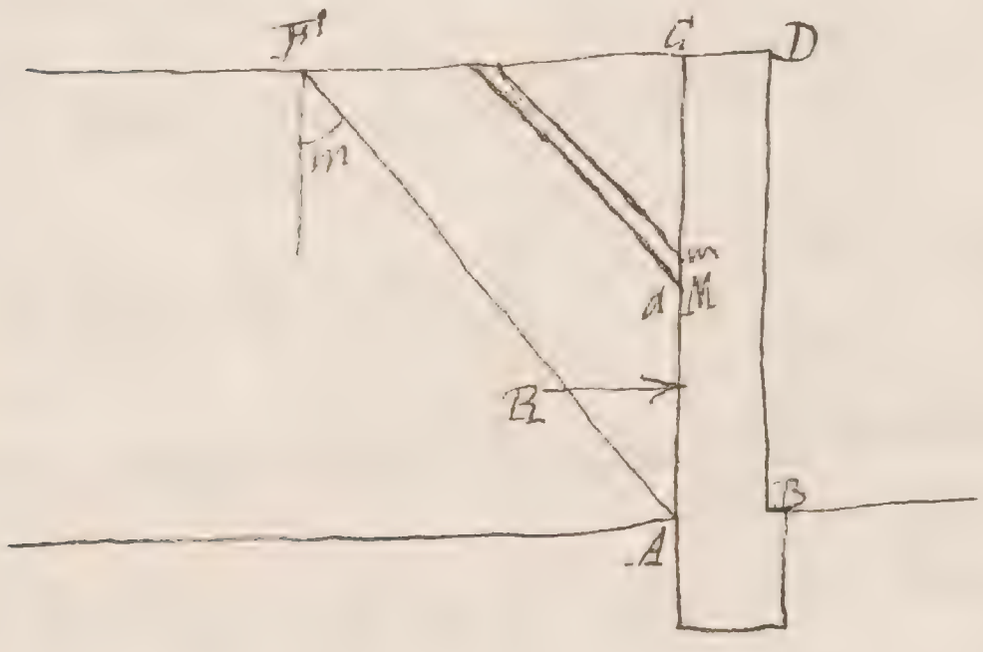
Nel 2° Caso la pressione sul suolo deve distribuirsi in modo che ciascuna parte della fondazione porti una pressione proporzionale alla sua area ed al peso che essa può sopportare senza avvallarsi, o peravvallarsi di una data quantità; in altre parole il peso della fabbrica deve potersi scomporre in tante forze parallele e proporzionali che tengono in ragione com-posta dell'area di suolo da esse premuta e del peso che ciascuna può sopportare senza avvallarsi, ora questa condizione sarà soddisfatta quando la verticale che passa pel centro di gravità della fabbrica passerà pel centro di gravità della base supponendo questa caricata in ogni suo punto di un peso proporzionale a quello che essa può sostenere in quel punto.

Se la fabbrica sostiene delle spinte orizzontali o oblique si comporrà il peso della fabbrica con queste spinte, e si vedrà se la risultante passa pel centro di gravità della base considerata come caricata in ciascun punto di un peso prop.e a quello che essa può sost.e in quel punto. Se questa con-dizione non si trova verificata, e se d'altronde non si volesse cangiare la forma e le dimensioni della fabbrica, bisogna, perchè la fabbrica si avvalli uniformemente, aggiungere al disotto della fabbrica un muro in modo, che la risultante del peso del muro, del peso della fabbrica, e delle spinte, che sollecitano questa passi pel centro di gravità della base di fondazione considerata come cari-cata di pesi nel modo già detto.

Quando una fabbrica sia appoggiata sopra una palafitta ~~fisso~~ perchè l'equilibrio sia stabile bisogna che tutti i pali sieno tutti egualmente caricati, ossia che la verticale che passa pel Centro di Gravità della fabbrica passi pel Centro di gravità delle teste dei pali considerati come gravati di pesi eguali.

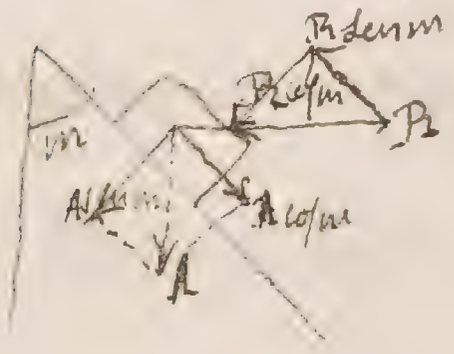
Ordinariamente le dimensioni della fabbrica sono determinate allora bisogna convenientemente distribuire i pali.

La terra considerata come materia dei terrapieni è parte sostenuta, e diciamo spinte essa esercita sui piedritti che la sostengono.



L'osservazione ci fa vedere che ogniqualvolta un muro di rivestimento non è abbastanza gagliardo da poter resistere alla spinta del terrapieno esso si rovescia, ~~e~~ nel terrapieno si fa un fesso, e questo fesso si fa secondo un piano AF' il quale parte dal piede A del muro e va fino alla sommità del ~~Terrapieno in F'~~, facendo colla verticale un certo angolo m.

Il muro ABCD resiste normalmente alla sua ~~faccia~~ AG alla spinta del terrapieno, la resistenza del muro è dunque una forza orizzontale; questa forza orizzontale, che denomino R deve sostenere il prisma di terra AGF, che tende a scorrere sul piano inclinato AF, se dunque chiamo A il peso del detto prisma AGF, f il coefficiente dell'attrito del prisma sul piano, dovrà essere $f(A\,\mathrm{sen}\,m + R\cos m) = A\cos m - R\,\mathrm{sen}\,m$,



e quindi $R = A\,\dfrac{\cos m - f\,\mathrm{sen}\,m}{f\cos m + \mathrm{sen}\,m} = A\,\dfrac{1 - f\,\mathrm{tang}\,m}{\mathrm{tang}\,m + f}$.

diciamo n l'angolo di natural declivio dalla verticale della terra supponendo il terrapieno angolo, che si può conoscere sperimentalmente facendo un cumulo della detta terra e vedendo come si disponga in equilibrio, avremo $f = \cot n$ (V. pag.ª 236. 3 maggio 1858), ecc. ciò $R = \frac{A[\tang n - \tang m]}{1 + \tang n \tang m} = A \tang(n-m)$.

Ora se G sia il peso specifico della terra del terrapieno, a l'altezza di questo e la sua lunghezza, sarà $A = \frac{1}{2} G a^2 \tang m$; dunque finalmente $R = \frac{1}{2} G a^2 \tang m \tang(n-m)$; questo è il valore della spinta del terrapieno contro il muro, determiniamone ancora il momento con cui essa tende a rovesciare il muro attorno al punto A; perciò immaginiamo diviso il prisma ACF in elementi con piani paralleli ad DF, la spinta di ciascun elemento essendo proporzionale al peso dell'elemento, ~~la spinta totale del terrapieno~~, il peso di ciascun elemento essendo proporzionale alla distanza ME dell'elemento dalla cima del muro, la spinta totale del terrapieno equivarrà ad una somma di spinte applicate al muro a distanze eguali l'una dall'altra e proporzionali alle loro distanze da G, ~~cioè~~ ora la risultante di tali spinte è applicata ad una distanza da G eguale ai $\frac{2}{3}$ di a, dunque anche la spinta del terrapieno è applicata ad un punto la cui distanza dal punto A è $= \frac{1}{3} a$, e per conseguenza il suo momento è $R \cdot \frac{1}{3} a = \frac{1}{6} G a^3 \tang m \tang(n-m)$.

Ci non lo conosciamo, ma lo cerchiamo quale debba essere il suo valore, perchè cogl'R come il suo momento sieno massimi, evidentemente l'equilibrio del piedritto sarà stabile se supporremo che n abbia questo valore e determineremo quindi la larghezza del piedritto perchè eguale alla spinta R corrispondente; ora cogl'R come il suo momento sono massimi se

massimo è il prodotto $\tan m \tan (n-m)$, ma perchè questo prodotto sia massimo deve essere $\frac{\tan(n-m)}{\cos^2 m} - \frac{\tan m}{\cos^2(n-m)} = 0$, poichè $\cos m$, $\cos(n-m)$ non possono mai essere nulli ossia $\sin(n-m)\cos(n-m) = \sin m \cos m$.

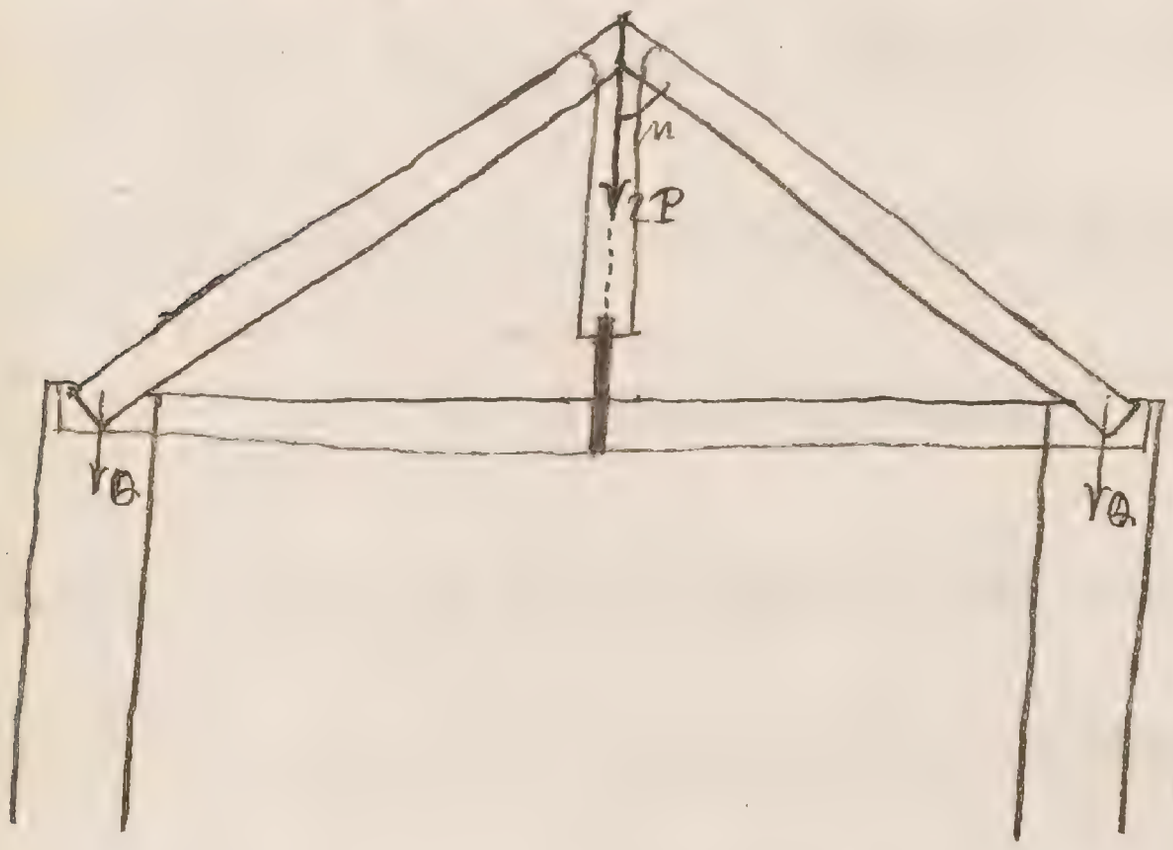
Da questa equazione ricaviamo $2n-2m = 2m$, $m = \frac{n}{2}$, dunque il valor massimo di R è $R = \frac{1}{2} G a^2 \tan g^2 \frac{n}{2}$, e il valor massimo del momento di R è $= \frac{1}{6} G a^3 \tan g^2 \frac{n}{2}$.

Lezione 3ª

Equilibrio e spinte dei Poligoni.

Nei poligoni rigidi le stesse condizioni sono necessarie per l'equilibrio che pei poligoni flessibili, se nonchè le forze devono essere dirette dall'infuori all'indentro, e possono anche non essere applicate nei vertici.

Le travi composte a foggia di poligono di compongono i tetti, i ponti di legno, le armature dei palchi ed altre simili opere. Noi Considereremo principalmente l'equilibrio delle armature dei tetti.



1° Sia un tetto triangolare simmetrico rispetto alla verticale di mezzo e sia d'armatura formata di due puntoni inclinati ad angolo n colla verticale, tutto il peso del tetto (compreso quello che si appoggia sui due muri verticali) decomponiamolo in tre forze verticali una 2P applicata nel vertice dell'angolo dei puntoni, le altre Q, Q applicate alle estremità dei puntoni che si appoggiano sui muri; risolviamo la forza 2P in due dirette secondo le lunghezze dei puntoni, ciascuna sarà $= \frac{P}{\cos m}$, e poniamo intendiamo trasportata all'estremità del puntone; queste forze così trasportate risolviamole di nuovo in due una verticale, l'altra

orizzontale, la verticale sarà P, e l'orizzontale P tang m; ciascun muro sopporta dunque una pressione verticale P+Q, e una spinta ~~verticale~~ orizzontale P tang m.

Quando i puntoni sono caricati uniformemente ed in proporzione della loro lunghezza, cresce l'altezza o la monta del tetto la spinta orizzontale diminuisce e la pressione verticale cresce. Infatti se a sia la distanza di due muri, b la monta del tetto, sarà tang $m = \frac{a}{b}$, e P sarà proporzionale a $\sqrt{a^2+b^2}$, quindi la spinta orizzontale sarà proporzionale a

$$\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$

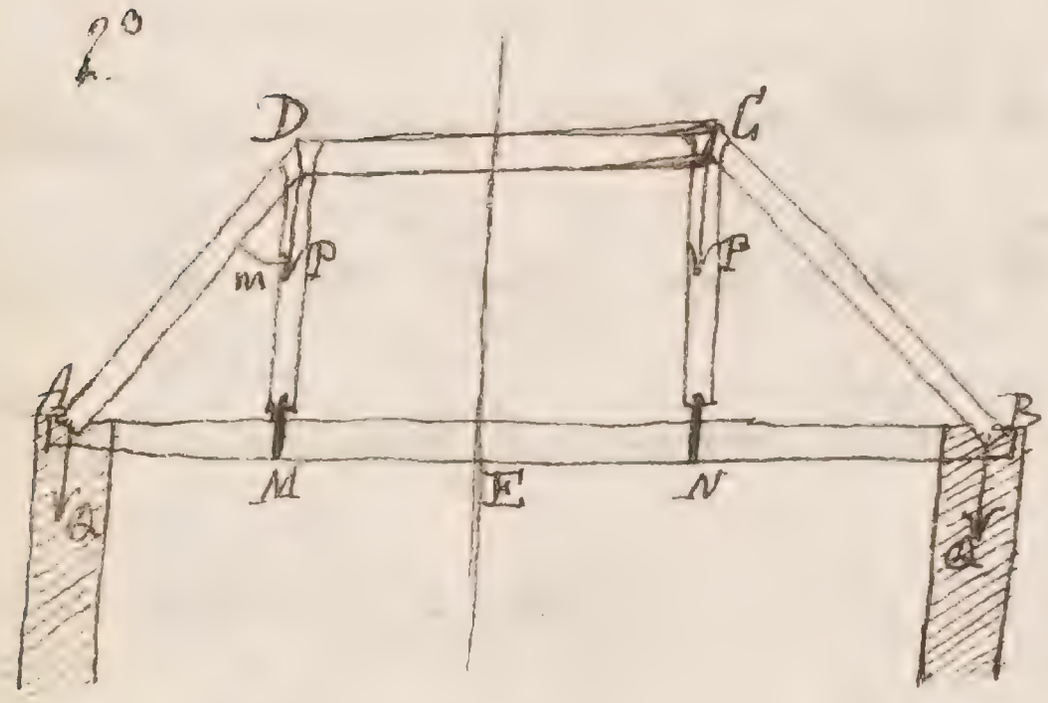
, ora crescendo b questa quantità diminuisce; la spinta verticale cresce poichè crescendo b cresce P.

Quando si dia al tetto una altezza b piccola la spinta orizzontale è dunque grande; per evitare questa spinta si aggiunge ordinariamente una piana o catena orizzontale, sui cui si appoggiano i puntoni, allora la spinta orizzontale P tang m non è più sostenuta dai muri ma tende a piegare la piana. La Piana pel proprio peso tende ad inflettersi, per evitare questa inflessione si mette un trave ~~detto~~ verticale detto monaco o colonnetto, il quale si connette coi puntoni nel colmo del tetto, e d'inferiormente colla piana. La piana (V. pag.a 254) tende a rompersi, se è perfettamente flessibile come se nella metà di essa fosse applicata la metà del proprio peso, il colonnetto porta dunque in questo caso la metà del peso della piana; se la piana è rigida il colonnetto porta un peso nullo; ora la piana è nè assolutamente rigida nè perfettamente flessibile, il colonnetto dunque porta sempre un peso minore della metà del peso della piana; nelle applicazioni si può supporre che il colonnetto porti la metà del peso della piana, poichè proporzionando in questa ipotesi la grossezza delle travi e dei muri alle spinte che devono sopportare saremo certi che

non solo vi avrà equilibrio, ma che dippiù sarà stabile.

In questa ipotesi sia V il peso della piana, quello del colonnetto sul colmo del tetto invece della forza P avremo la forza $2P+V+\frac{1}{2}V$, la piana sarà dunque soggetta ad una tensione ~~P~~ $/P+\frac{1}{2}V+\frac{1}{4}V/$ Kang m, e i muri sotterranno una pressione verticale $P+\frac{1}{2}v+\frac{1}{4}V+Q$.

2°

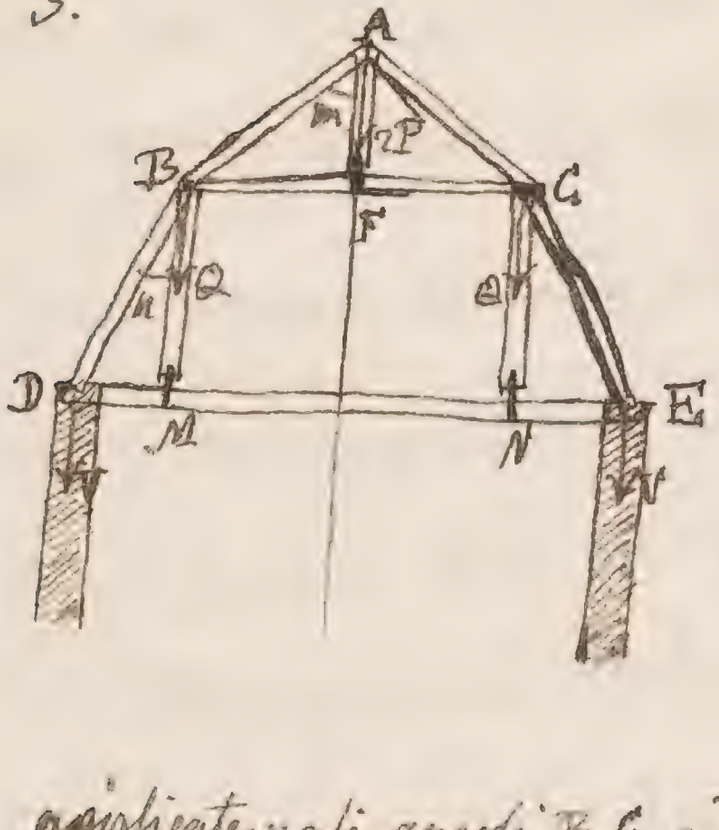


Sia il tetto quadrangolare e simmetrico rispetto alla verticale di mezzo, e sia la sua armatura composta di una trave superiore orizzontale, e di due travi inclinate ad angolo medio verticale ed appoggiantesi sopra una piana orizzontale posta su due muri verticali, sia la piana sostenuta da due colonnette verticali congiunte superiormente colle altre travi nei vertici degli angoli che esse fanno tra loro.

Si decomponga il peso totale del tetto in quattro forze Q. Q. P. P applicate nei vertici degli angoli del quadrilatero, sia V il peso della piana, le esta [v pag.a 255] è perfettamente flessibile tende a rompersi nei punti M. N dove è sostenuta dai colonnette con forza tanto minore quanto minore è il prodotto AM. MB = NB. MA, le piana è rigida tende a rompersi con forza nulla, non essendo mai nè rigida nè perfettamente flessibile, le supporremo che i colonnetti sopportino gli sforzi che sopporterebbero le piana fosse perfettamente flessibile, proporzionando allora le ~~spes~~ grossezze dei muri e delle travi in modo che resistano alle spinte risultanti, saremo sicuri, che l'equilibrio sarà stabile.

Supponiamo, che R. R siano gli sforzi sostenuti dai colonnetti, siano v. v i pesi dei co-lonnetti, ~~gli~~ gli angoli del quadrilatero ABCD saranno gravati dei pesi Q, Q, P+R+v, P+R+v, la trave CD tenderà adessere schiacciata con forza (P+R+v) tang m, la piana AB sarà tesa colla stessa forza (P+R+v) tang m ed i muri sosterranno le pressioni verticali P+Q+R+v, P+Q+R+v.

3°



Sia il tetto pentagono, e sia la sua armatura composta di quattro travi disposti simmetricamente alla verticale di mezzo, e che facciano colla verticale gli angoli m, n, si risolva il peso totale del tetto in cinque forze una 2P applicata nel colmo del tetto, due Q, Q applicate negli angoli B, C, e due V. V applicate in D, E dove e travi BD, CE si appoggiano sui muri verticali, la tensione orizzontale essendo costante in un poligono equilibrato e carico di pesi, dovrà essere $\frac{2P}{2\cot m} = \frac{Q}{\cot n - \cot m}$, ossia $P \tan g\, m = (P+Q) \tan g\, n$, e la spinta orizzontale sui muri sarà $P \tan g\, m$, la spinta verticale $= P+Q+V$. Se si vuole che le travi siano egualmente lunghe, esse sosterranno allora egual peso, sarà perciò $Q = 2P$. e la condizione d'equilibrio sarà $\tan g\, m = 3 \tan g\, n$. Sia in questo caso data la larghezza $2p$ del tetto, ~~l'altezza~~ e la lunghezza q di ciascuna trave, vogliasi determinare la monta totale q del tetto e gli angoli m, n, avremo per determinare queste tre quantità le tre equazioni

$p = a(\operatorname{sen} m + \operatorname{sen} n)$, $q = a(\cos m + \cos n)$, $\operatorname{tang} m = 3 \operatorname{tang} n$.

Per rendere queste equazioni algebriche chiamiamo x, y le distanze DM. BM, la figura del tetto sarà evidentemente congiunta quando conosceremo x, y, q, e avremo per determinare queste tre quantità le equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2 , \quad (p-x)^2 + (q-y)^2 = a^2 , \quad \frac{p-x}{q-y} = 3\frac{x}{y} .$$

Ordinariamente per impedire che gli angoli B, G si aprano o si chiudano, e perchè i muri verticali non soffrano la spinta orizzontale $P \operatorname{tang} m$ che sovente è molto grande si aggiungono due piane BG, DE, in tal modo viene a formarsi un sistema composto dal tetto triangolare ABG e dal quadrangolare BGDE, per sostenere le piane si mette ancora dei colonnetti AF, BM, GN; sieno v, v', v' i pesi dei colonnetti, V il peso della piana BG, R, R i pesi sostenuti dai colonnetti BM, GN, pesi facili a calcolarsi conoscendo x, il peso della piana DE, Q il coefficiente di tenacità di questa, il tetto triangolare ABG genera sulla piana BG la tensione orizzontale $(P + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}V) \operatorname{tang} m$, e le pressioni verticali $P + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}V$, $P + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}V$ nei punti B, G, quindi il tetto quadrangolare DBGE sarà gravato negli angoli B, G dei pesi eguali a $P + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}V + Q + R + v'$, però genererà sulla piana BG una pressione orizzontale $= (P + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}V + Q + R + v') \operatorname{tang} n$, una tensione orizzontale eguale a questa pressione sulla piana DE, e una pressione verticale $= P + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}V + Q + R + v' + V$. La piana BG sostenendo due spinte in sensi contrarii, la sua tensione orizzontale sarà

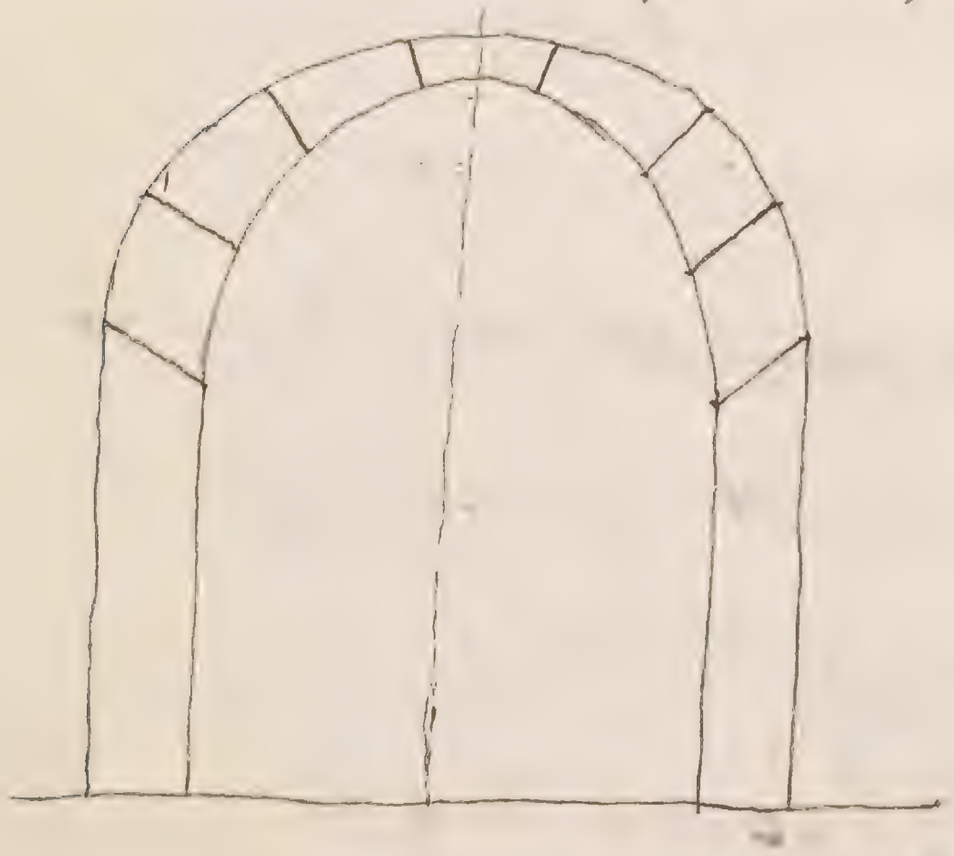
$$(P + \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{4}V) \operatorname{tang} m - (P + \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{4}V + Q + R + v') \operatorname{tang} n .$$

abbiamo finora considerate le travi come assolutamente rigide, ma poichè non lo sono che possono rompersi in virtù del peso sovrapposto e del loro proprio, quegli ergi sono uniformemente dis-tribuiti su tutta la lunghezza delle travi, ma le travi in questo caso resistono di più di quello che se il peso fosse applicato tutto in un punto, inoltre le travi sono non ~~sono~~ orizzontali, ora ciò favorisce ancora la loro resistenza all'inflessione ed alla rottura poichè i pesi operano con bracci di leva minori, e quindi daremo alle travi tali dimensioni che resistano all'azione del peso totale che le grava supponendo questo appli-cato nel loro punto di mezzo e supponendo le travi orizzontali saremo sicuri che l'equilibrio sarà stabile e le travi non si romperanno ancorchè vengano ad agire le dieci altre forze ipotetiche.

Se l'inclinazione delle travi alla verticale è molto grande si potrà prendere pei coefficienti delle resi-stenze anche il terzo od il quarto dei valori di questi che si trovano nelle tavole.

Dell'Equilibrio e delle Spinte degli Archi.

Le medesime leggi che assicurano l'equilibrio dei tetti assicurano l'equilibrio degli archi. La differen-za essenziale che passa tra i tetti egli archi sta in ciò, che nei tetti le diverse parti che li com-pongono non possono scorrere le une sulle altre, mentre negli archi, i quali sono formati di cunei, i cunei possono scorrere gli uni ~~sugli~~ sugli altri, e gli angoli che essi fanno possono chiudersi o aprirsi

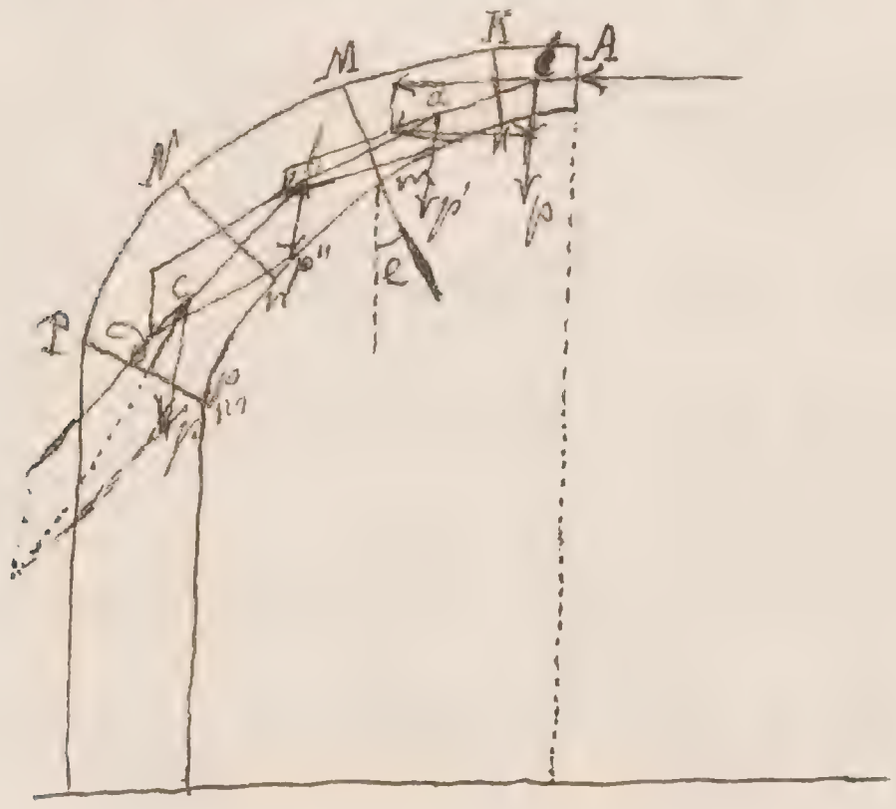


Sia l'arco simmetrico rispetto alla verticale di mezzo, le superficie secondo cui esso si appoggia sui piedritti la-terali che lo sostengono si chiamano geleirnai od imposte; sono i cunei disposti simmetricamente alla verticale di mezzo, il cuneo che sta nel colmo dell'arco, cuneo che si dispone sempre in modo che sia diviso in due parti eguali dalla verticale di mezzo è detto chiave

Dell'arco.

Ciò posto Supponiamo Data la corda dell'arco, la forma della curva interna detta intradosso, la forma della curva esterna detta estradosso, e la legge secondo i tagli dei cunei, detti anche letti, sono inclinati alla verticale, e cerchiamo se l'arco sopra stare in equilibrio non Tenendo Conto degli attriti e delle tenacità dei cementi, troveremo perciò delle Condizioni a cui debbono soddisfare le quantità date, condizioni, le quali ci serviranno a determinare una delle tre cose sudette, curva interna, curva esterna e legge delle inclinazioni dei letti alla verticale, giacchè saranno date due altre due.

Le due metà dell'arco esercitano una pressione vicendevole l'una contro l'altra, proviamo quindi sopprimere una metà dell'arco sostituendovi una forza eguale alla spinta che essa esercita contro l'altra metà dell'arco. Questa forza dovendo essere normale alla superficie di Contatto dei due mezzi archi è orizzontale.



Sia A la spinta orizzontale della metà dell'arco che togliamo, evidentemente l'arco sarà in equilibrio se ciascuna delle parti che lo compongono sarà in equilibrio. Consideriamo perciò una porzione qualunque di arco compresa tra la chiave ed un letto qualunque Mm come la sopra d'un dol pezzo, chiamiamo e l'angolo che il piano del letto fa colla verticale, Π il peso della detta porzione, dopo potendoci considerare come un corpo posto sopra un piano inclinato sostenuto da una forza orizzontale A, per l'equilibrio bisognerà che la direzione della risultante tra il peso Π e la spinta A sia normale al letto e passi tra i punti M, m, ora la 1ª condizione è soddisfatta se $\Pi = A \tang e$, l'arco è

Dunque in equilibrio se il peso di una sua porzione qualunque è proporzionale alla tangente dell'angolo che il letto su cui posa la detta porzione fa colla verticale, e se la risultante del peso e della spinta orizzontale alla chiave passa tra i due terzini del letto.

Sezione 4.ª

Da quel che si è detto risulta un metodo per riconoscere graficamente se un'arco è in equilibrio; Componga si la spinta orizzontale alla chiave col peso p del 1° cuneo a partir dalla chiave, la risultante dovrà essere normale al letto di giunto cuneo, posto che ciò sia componga si questa risultante col peso del 2° cuneo. la nuova risultante dovrà essere normale al letto del 2° cuneo, se ciò si componga si col peso del 3° cuneo, la risultante dovrà essere normale al letto di giunto cuneo, se ciò si componga col peso del cuneo seguente, si verifichi se la risultante è normale al letto di giunto cuneo, continuando in tal modo si verificherà se la risultante tra il peso di una porzione qualunque di arco e la spinta A è normale al letto su cui posa questa porzione. ~~Verrano~~ se il poligono formato dalle risultanti ba, ab, bc.... sarà tutto contenuto nell'arco vi sarà equilibrio.

Le risultanti ba, ab, bc.... non sono altro che le pressioni sui letti K K, M m, N n, ..., se il numero dei letti è infinito il detto poligono diventa una curva, che vien detta Curva delle pressioni.

La curva delle pressioni è dunque quella secondo i lati della quale si esercitano le pressioni sui letti dei cunei, essa è quindi normale in ciascun punto ai tagli dei cunei, e si spicca dal punto d'applicazione della spinta A.

Perchè l'equilibrio sia stabile non basta che la curva delle pressioni sia tutta contenuta nell'arco, ma bisogna inoltre che essa sia sempre notabilmente lontana dalle curve di intradosso e estradosso, anzi perchè la linea [illegible] qualche movimento nell'arco questo sia il meno irregolare possibile bisogna che la curva

delle pressioni passi pei centri di gravità dei letti dei cunei.

Finalmente perchè i cunei non si schiaccino, se R sia la pressione che sopporta un cuneo qualunque, w l'area del letto su cui esta si esercita, K il coefficiente della resistenza del cuneo allo schiacciamento dovrà essere $R < K w$.

R è facile a calcolarsi per un cuneo qualunque; siano $p, p', p'' \ldots$ i pesi dei cunei a partire dalla chiave pel 2° cuneo alla chiave $R = A$, pel 1° cuneo $R = \sqrt{p^2 + A^2}$, pel 3° $R = \sqrt{(p'+p)^2 + A^2}$, pel 4° $R = \sqrt{(p''+p'+p)^2 + A^2}$, e così di seguito.

Per determinare A chiamiamo E l'angolo che il pulvinare fa colla verticale, e Π il peso di tutto l'arco avremo $\Pi = A \operatorname{tang} E$, quindi ricaviamo $A = \frac{\Pi}{\operatorname{tang} E}$.

Di queste condizioni facciamo ora l'applicazione analitica.

Cominciamo dal caso di una piattabanda orizzontale di grossezza uniforme, e determiniamo quale debba essere la legge dei tagli dei cunei perchè la piattabanda stia in equilibrio.

Consideriamo della piattabanda una porzione qualunque mMBA appoggiantesi sul taglio Mm che fa angolo ε colla verticale, se la piattabanda è di grossezza uniforme, o di uno spessore,

il peso della porzione mMBA è proporzionale all'area mMBA, per l'equilibrio bisogna dunque che l'area mMBA sia proporzionale a tang ε, ora, se chiamo m la grossezza AB della volta, e chiamo x la lunghezza di MB, ho

$$mMBA = \frac{1}{2} m \left[x + mA \right] = \frac{m}{2} \left[2x + m \operatorname{tang} \varepsilon \right],$$

il 2° termine del 2° membro di questa eguaglianza

è proporzionale a tange, basta dunque che sia x proporzionale a tange; ma se prolungo AB, Mm finchè s'incontrino in G dal triangolo MBG ho tange = $\frac{x}{BG}$, e quindi $BG = \frac{x}{tange}$, Se dunque x è proporzionale a tange, BG è quantità costante per ogni taglio, per l'equilibrio tutti i tagli dei cunei prolungati devono dunque passare per un medesimo punto G.

Per l'equilibrio bisogna inoltre che la curva delle pressioni passi nell'interno della piattabanda; a questa condizione evidentemente è adempiuta se rifletendo il peso di una porzione qualunque di piattabanda come mMBA in due forze normali una ad AB l'altra ad MN dopo passeranno tra i punti A,B e tra i punti M,m, ossia se sulla verticale condotta pel centro di gravità di MBAm vi ha un punto da cui si possano abbassare due normali sovra le rette definite Mm, AB, ora se questa condizione si verifica per la mezza piattabanda a fortiori si verifica per le altre parti di questa, poichè andando verso la chiave i tagli dei cunei fanno sempre angoli minori colla verticale.

Per la mezza piattabanda la detta condizione si verifica se la normale eretta al polvinare in D va a ferire l'estradosso a destra della verticale che passa pel centro di gravità della mezza piattabanda, ossia se AK < GI, contando positive le distanze AK a sinistra del punto A.

Per scrivere analiticamente questa condizione chiamo 2a la larghezza della intiera piattabanda, y la lunghezza EH, sarà $GI = \frac{3a^2+3ay+y^2}{3(2a+y)}$, $AK = a - \frac{m^2}{y}$, la condizione è dunque

$$\frac{3a^2+3ay+y^2}{3(2a+y)} > \frac{ay-m^2}{y}, \text{ ossia riducendo } y^3+3y(m^2-a^2)+6am^2>0.$$

In questa condizione date y, m potremo sempre trovare i limiti dei valori che si possono dare ad a perchè vi sia equilibrio. Per trovar questi limiti si risolva l'equazione $y^3+3y(m^2-a^2)+6am^2=0$ rispetto ad a si troverà $\left.\begin{matrix} a=f(y) \\ a=f'(y) \end{matrix}\right\}$, e la disuguaglianza

suddetta si potrà perciò scrivere sotto quest'altra forma $\{a-f(y)\}\{a-f'(y)\}>0$.

Perchè questa disuguaglianza abbia luogo dovranno essere dello stesso segno i fattori $a-f(y)$, $a-f'(y)$ del 1° membro. Risolvendo la suddetta equazione trovasi che

~~[illegible]~~ la condizione d'equilibrio si riduce alla seguente

$$3y\left[a-\frac{m^2\sqrt{3}+\sqrt{y^4+3m^2y^2+3m^4}}{y\sqrt{3}}\right]\left[a-\frac{m^2\sqrt{3}-\sqrt{y^4+3m^2y^2+3m^4}}{y\sqrt{3}}\right]<0\,;$$ ora

perchè si verifichi i due fattori $a-\frac{m^2\sqrt{3}+--}{y\sqrt{3}}$, $a-\frac{m^2\sqrt{3}---}{y\sqrt{3}}$ devono essere di segni contrarii, ma y dovendo sempre essere positivo il secondo fattore è essenzialmente positivo. per l'equilibrio dunque deve essere

$$\frac{m^2\sqrt{3}+\sqrt{y^4+3m^2y^2+3m^4}}{y\sqrt{3}}>a \quad \text{~~[illegible]~~ ossia } a<\frac{m^2\sqrt{3}+\sqrt{y^4+3m^2y^2+3m^4}}{y\sqrt{3}},$$

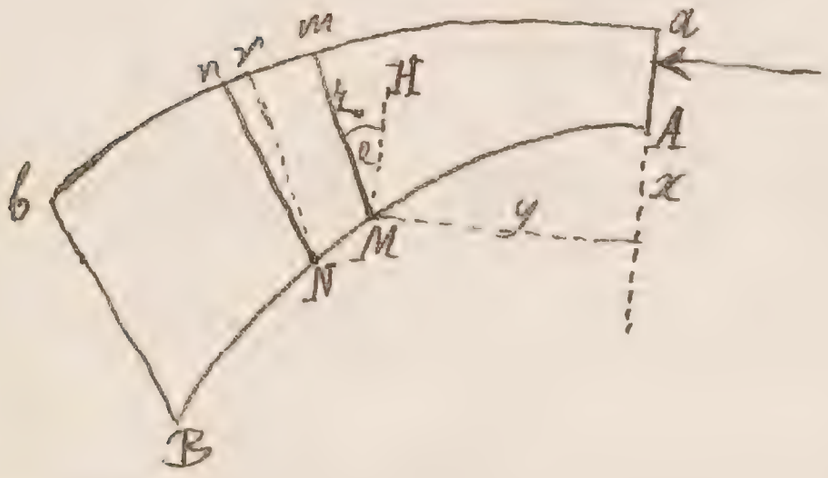
$$a<m\left[\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}\tan g^4 E+\tan g^2 E+1}}{\tan g E}\right].$$

Se $E=30°$ si trova che $2a$ può essere tutt'al più quale a 7 volte e mezza la grossezza m. Dalla condizione $h<m\left[\frac{1+--}{\tan g E}\right]$ si scorge che crescendo E cresce a e che a cresce pure diminuendo E, e che quindi il pulvinare di una piattabanda non può mai essere nè orizzontale nè verticale, poichè nel 1° caso la pressione sul piedritto laterale sarebbe infinita, nel 2° sarebbe infinita la spinta orizzontale della piattabanda contro questo piedritto.

Veniamo ora al problema Generale. Data la curva d'intradosso e la legge dei tagli dei cunei determinare la curva d'estradosso dell'arco, perchè desso sia in equilibrio.

Sia la Curva di intradosso determinata per la sua equazione riferita a due assi passanti pel punto A della Chiave ed uno ~~[illegible]~~ delle x ~~[illegible]~~ verticale e diretto all'ingiù,

l'altro dalle y orizzontale e diretto verso sinistra, sia e dato in funzione dell'ascissa x della curva di intradosso, per conoscere l'estradosso ci bastera conoscere la lunghezza Mm che chiamo z del taglio che passa pel punto x, y dell'intradosso.



Il Problema dunque consiste nel determinare z affinchè MAam sia proporzionale a tange.

Soluzione.

Troviamo che per l'equilibrio deve essere il peso della porzione d'area MA a m

$\Pi = A \operatorname{tang} e$, differenziamo questa equazione avremo il peso di un'elemento compreso tra due tagli successivi M m, N n $d\Pi = A \frac{de}{\cos^2 e}$, ora $d\Pi$ è proporzionale all'area elementare MNnm dunque quest'area per l'equilibrio deve essere proporzionale ad $A\frac{de}{\cos^2 e}$. Per avere l'espressione dell'area MNnm tiriamo da N una parallela Nr ad Mm sarà $MNnm = MNrm + Nnr$,

ma $MNrm = MN \cdot z \cdot \operatorname{sen} m MN = z\, ds \operatorname{sen}(HMN - e) = z\, ds \left[\frac{dx}{ds}\operatorname{sen} e + \frac{dy}{ds}\cos e\right] = z\left[dx \operatorname{sen} e + dy \cos e\right]$

$Nrn = \frac{1}{2} z^2 de$, dunque finalmente la condizione analitica dell'equilibrio dell'area, la di cui larghezza è l'unità il peso specifico G, è la seguente

$$\frac{1}{2} z^2 de + z\left(dx \operatorname{sen} e + dy \cos e\right) = \frac{A}{G} \cdot \frac{de}{\cos^2 e}.$$

Questa equazione ci fa conoscere z in funzione di x, ma se fossero date le due curve di intradosso e di estradosso e si chiedesse la legge dei tagli bisognerebbe integrare.

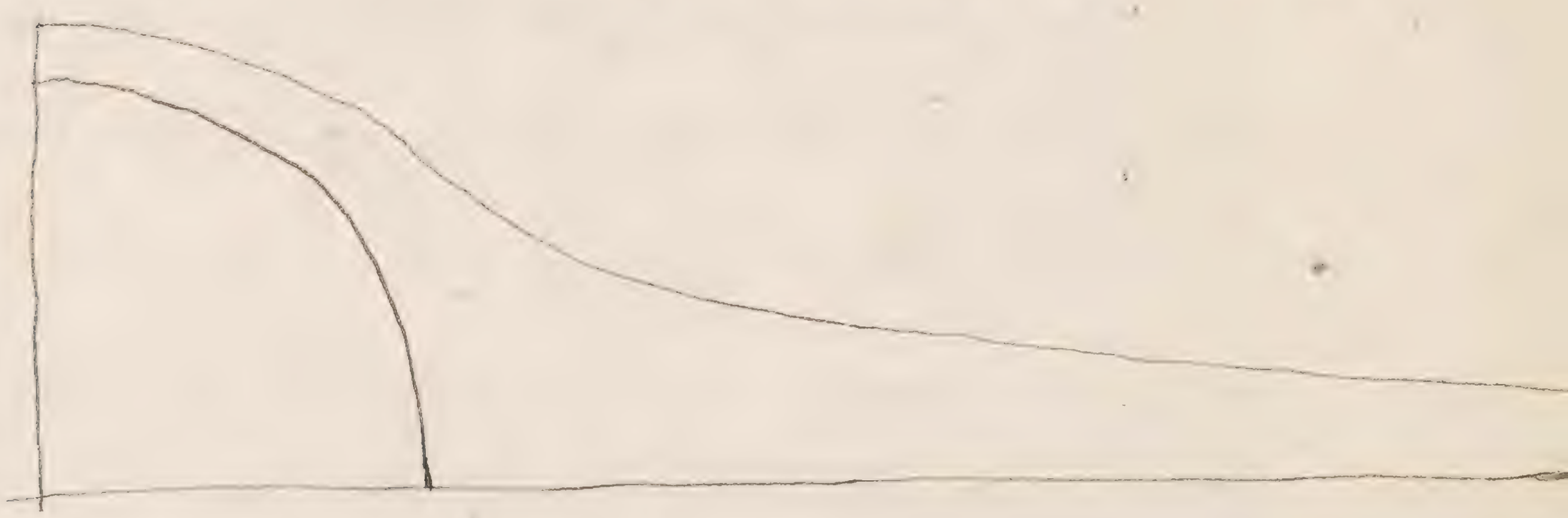
I tagli di fan quasi sempre perpendicolari all'intradosso; in tal caso e eguale all angolo che la normale all'intradosso fa coll'asse delle x dunque $HMN - e = 90°$, per conseguenza $\frac{1}{2} z^2 de + z\, ds_1 = \frac{A}{G} \cdot \frac{de}{\cos^2 e}$, dividendo per $\frac{de}{2}$

$$z^2 + 2\frac{ds_1}{de} z = \frac{2A}{G} \cdot \frac{de}{\cos^2 e}, \text{ ma } \frac{ds_1}{de} = R, \text{ R essendo il raggio di curvatura}$$

dell'intradosso. Dunque finalmente $\zeta^2 + 2R\zeta = \frac{2A}{G\cos^2\varepsilon}$, donde

$$\zeta = -R + \sqrt{R^2 + \frac{2A}{G\cos^2\varepsilon}}$$

Se l'intradosso è circolare R è il raggio del circolo, e la curva d'intradosso si estende all'infinito poichè in questo caso il polverino è orizzontale epperciò $\varepsilon = 0$, $\zeta = \infty$, $\tan g E = \infty$, $\Pi = \infty$, è dunque impossibile astrazion fatta dall'attrito di impostare un'arco sopra un polverino orizzontale.



Lezione 5.ª

Equilibrio e spinte degli archi tenendo conto degli attriti e della tenacità dei cementi

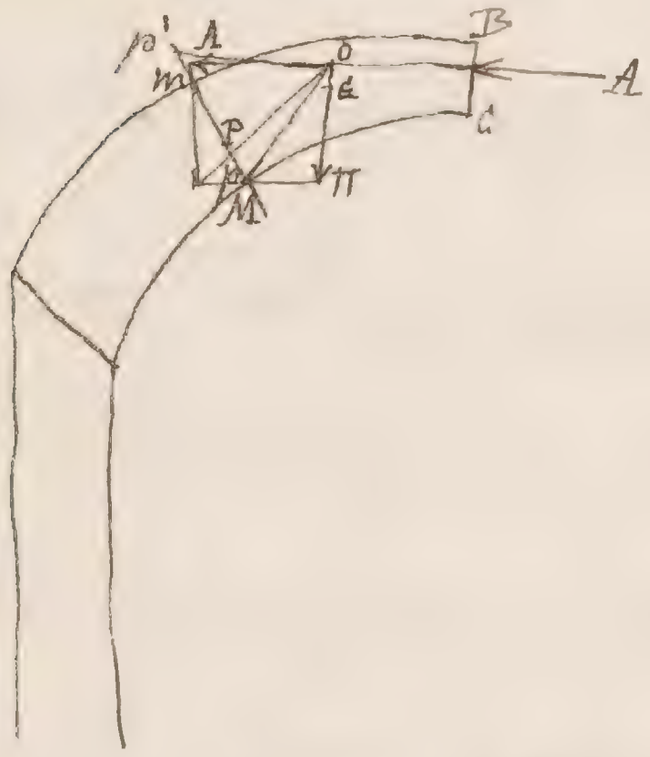
Supponiamo che per smuovere un punto materiale posto in equilibrio sopra una superficie curva si richieda una forza T, sarà T la misura dell'adesione della superficie e del punto. Coll'esperienza si trovò che l'adesione è proporzionale alle superficie che sono in contatto, ed indipendente dalla pressione.

Supponiamo applicata al suddetto punto materiale una forza S che faccia angolo α colla normale alla superficie, scomponiamo questa in due una normale $S\cos\alpha$, l'altra tangenziale $S\operatorname{sen}\alpha$, perchè il punto non si muova dovrà essere $S\operatorname{sen}\alpha < T$, ossia $\alpha < \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{T}{S}\right)$, quindi la intorno alla normale descrivo una superficie conica la cui generatrice

faccia angolo λ colla normale ed i cui vertice sia nel punto materiale: questo sarà in equilibrio se la forza S è diretta nella detta superficie.

La stessa cosa dicasi per l'attrito; questo è proporzionale alla pressione quindi la di lui resistenza supponiamo esprimerla col prodotto fR essendo f, per altra parte $S\operatorname{sen}\alpha$ è la forza tangenziale che tende a vincere questa resistenza, per l'equilibrio dovrà dunque essere $S\operatorname{sen}\alpha < fS\cos\alpha$, ossia $\tan\alpha < f$, se quindi descriviamo una superficie conica intorno alla normale i cui generatrici fanno angolo $\alpha = \arctan f$ colla normale il punto sarà in equilibrio se la forza S sarà diretta in questo cono.

Se il corpo tocca la superficie curva con una superficie piana, la direzione della risultante del peso del corpo e delle forze che adesso sono applicate dovrà, perchè vi sia equilibrio, passare



tra i punti p, m, Op essendo una retta che fa colla normale al letto Mm l'angolo λ, che ha per tangente f: infatti Op', Op facendo l'angolo λ la cui tangente è f colla normale, perchè il corpo non istrisci la risultante delle forze che lo sollecitano deve passare tra p, p', inoltre perchè il corpo non prenda moto rotatorio intorno ad M od m la risultante suddetta deve passare tra M ed m, dunque ecc.

Scriviamo questo pensiero analiticamente applicandolo al caso della porzione d'arco $BCMm$ che poggia sul letto Mm inclinato di angolo ε colla verticale.

Affinchè la detta porzione ~~sia~~ sia nel punto di istrisciare deve essere calando da m verso M deve essere

$$\Pi\cos\varepsilon - A\operatorname{sen}\varepsilon = f\left|\Pi\operatorname{sen}\varepsilon + A\cos\varepsilon\right| \quad \text{ossia} \quad \Pi = A\cdot\frac{\tan\varepsilon + f}{1 - f\tan\varepsilon},$$

perchè

sia sul punto di
strisciare salendo da M verso m deve essere $H = A \cdot \frac{tang\varepsilon - f}{1 + f\,tang\varepsilon}$. La porzione
d'arco M m BC non strisciarà semprechè il valore di H darà compreso
fra i due dati valori, che si propone comprendere ambi nella formola

$$H = A \cdot \frac{tang\varepsilon \pm f}{1 \mp f\,tang\varepsilon}$$. Differenziando questa equazione abbiamo

$$dH = \frac{A\,d\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} \cdot \frac{1+f^2}{(1 \mp f\,tang\varepsilon)^2}$$; Questo valore sostituendo nell'equazione

fra ζ ed ε (pag.a 266) l'equazione risultante

$$\frac{1}{2}\zeta^2 d\varepsilon + \zeta\,(dx\,sen\varepsilon + dy\cos\varepsilon) = \frac{A}{G} \cdot \frac{d\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} \cdot \frac{1+f^2}{(1 \mp f\,tang\varepsilon)^2}$$

servirà a determinare la curva di estradosso quando conosceremo la curva di
intradosso e la legge dei tagli.

Da quel che di sopra fu è detto risulta che, se si tien conto dell'attrito, Dato l'intra-
-dosso e la legge dei tagli vi ha una infinità di estradossi che soddisfanno al
problema di rendere stabile l'equilibrio dell'arco.
L'ultima equazione che abbiamo scritta ci somministra le due curve limiti
di tutte le altre, fra le quali vi sarà anche quella corrispondente ad $f=0$.
Prima di adottare però una delle dette curve per curve di estradosso bisognerà con
pazienza verificare se la curva delle pressioni sarà tutta contenuta nell'arco.
Vediamo ancora quale sia la spinta sul piedritto; E essendo l'angolo di questo
colla verticale, 2Π il peso di tutto l'arco la spinta normale al piedritto
sarà $= \Pi \sqrt{1 + \frac{1}{tang^2 E}} = \frac{\Pi}{sen E}$, e quindi la spinta orizzontale $= \Pi \cot E$, e la
spinta verticale $= \Pi$. Conosciute queste spinte sarà facile il calcolare le
dimensioni, che devono darsi ai piedritti, perchè resistano alla loro azione.

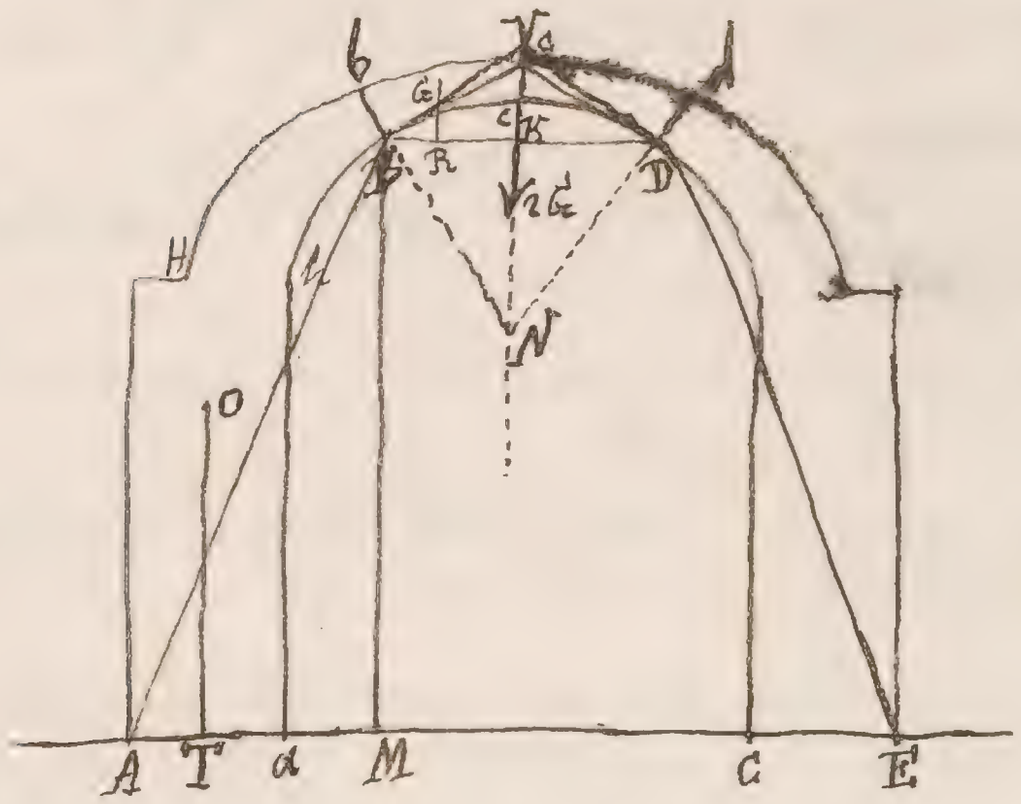
Introduciamo ora nelle condizioni d'equilibrio degli archi la resistenza proveniente dalla tenacità dei Cementi.

Consideriamo di nuovo la porzione mNCB di arco, ritenendo le stesse denominazioni, e ricordandoci che abbiam chiamato α l'angolo che la risultante delle forze A, H fa colla normale al letto Mm, avremo subito le componenti ~~orizzontale~~ e ~~verticale~~ normale e tangenziale al letto Mm di questa risultante, che saranno $\begin{cases} \cos\alpha\sqrt{A^2+H^2} \\ \operatorname{sen}\alpha\sqrt{A^2+H^2} \end{cases}$ ciò posto sia w la superficie del taglio, i il coefficiente di adesione proveniente dalla tenacità dei cementi, la resistenza, che si oppone allo strisciamento dell'arco MmBC, sarà $iw + f\cos\alpha\sqrt{A^2+H^2}$, per l'equilibrio dovrà dunque essere $\operatorname{sen}\alpha\sqrt{A^2+H^2} < iw + f\cos\alpha\sqrt{A^2+H^2}$, o pia $\operatorname{tang}\alpha < \dfrac{iw}{\cos\alpha\sqrt{A^2+H^2}} + f$.

Per applicare questa formola ad un'arco particolare bisognerebbe costruire la curva delle pressioni e vedere se i suoi lati fanno dappertutto colle normali ai tagli angoli che soddisfacciano alla detta condizione; il numero dei tagli essendo ordinariamente molto grande, principalmente se l'arco è costrutto con mattoni, l'operazione per riconoscere se l'arco sia in equilibrio riesce molto lunga e noiosa, ma vi ha una osservazione che agevola di molto questa applicazione.

Quando un'arco si rompe si rompe soltanto in alcuni tagli in grazia della tenacità dei cementi, e l'osservazione fa conoscere che le sezioni di rottura sono generalmente due o tre. Supponiamo pertanto che nell'arco si sian già fatte le rotture, e vediamo come potremo assicurare l'arco contro i due pericoli di rovesciamento e di strisciamento dei piedritti. Le consolideremo e daremo ai piedritti le convenienti dimensioni ~~saremo~~ affine l'arco stará se le rotture non siano ancora fatte, oppero il suo equilibrio

Sarà sicuramente stabile.



Supponiamo, che l'arco stia retto secondo le sezioni B b, D d prese simmetricamente rispetto alla verticale di mezzo, ma che le parti staccate non si tengano ancora unite dal loro luogo, Scriviamo le condizioni d'equilibrio dell'arco così spezzato. Sia O il centro di gravità di un piedritto col suo piedestallo H h B b, sia 2G il peso della parte d'arco B b d D che resta intendere applicato nel colmo dell'arco, sia O il peso del ~~sotto~~ piedritto col suo piedestallo, risolviamo 2G in due forze dirette secondo le normali V B, V D ai tagli B b, D d, queste saranno le pressioni esercitate contro i piedestalli dall'arco B b d D e ciascuna varrà $\frac{G}{\cos BVN}$; tutto essendo simmetrico basterà che stabiliamo le condizioni d'equilibrio di uno dei piedritti col suo piedestallo, poichè le stesse condizioni assicureranno anche l'equilibrio dell'altro. Risolviamo la pressione $\frac{G}{\cos BVN}$ in due forze una orizzontale, l'altra verticale, la 1ª sarà $= G \tang BVN$, la 2ª sarà $= G$; ciò posto, perchè il piedritto non prenda moto progressivo, se teniamo soltanto conto dell'attrito, dovrà essere $G \tang BVN < f(O+G)$, e perchè non prenda moto rotatorio dovrà essere $G . \tang BVN . BM < G . AM + O . AT$, ora $\tang BVN = \frac{NK}{BK}$, dunque le condizioni d'equilibrio sono (1) $fO > G\left(\frac{NK}{BK} - f\right)$

(2) $O . \frac{AT}{BM} > G\left[\frac{NK}{BK} - \frac{AM}{BM}\right]$

adesso Supponiamo che l'arco siasi rotto secondo le sezioni Bb, Cc, Dd, come generalmente accade quando le sezioni di rottura sono tre, formiamo il poligono ABCDE, il punto C del colmo dell'arco tendendo a discendere col girare attorno ai punti B, D, questi tendendo ad alzarsi girando attorno i punti A, E, l'arco tenderà ad aprirsi al di dentro in c e al di fuori in b, d, appunto come se il poligono ABCDE rimanesse aprendosi l'angolo C del colmo e chiudendosi gli angoli laterali B D, potremo perciò riguardare l'arco siccome un poligono ABCDE mobile intorno ai suoi angoli, e saremo precisamente nel caso di un tetto pentagono, se i pesi O, O dei piedritti coi loro pèrnacci li supporremo applicati nei punti ove le loro direzioni ferigono i lati del poligono.

Ciò posto le forze come alla pag.a 278a ~~sul tetto~~ m, n gli angoli che i lati AB, BC fanno colla verticale le condizioni d'equilibrio saranno

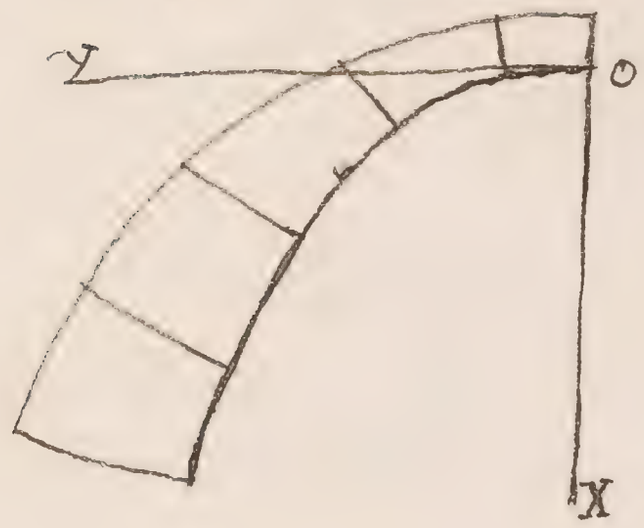
$$G.\frac{BR}{BK}.\operatorname{tang} m < \left[G.\frac{BR}{BK} + G.\frac{RK}{BK} + O.\frac{AT}{AM}\right]\operatorname{tang} n$$ perché il poligono non si apra, e $G.\frac{BR}{BK}\operatorname{tang} m < f(O+G)$ perché il piedritto col pèrnacio non sia rimosso orizzontalmente, ora $\operatorname{tang} m = \frac{BK}{CK}$, $\operatorname{tang} n = \frac{AM}{BM}$, le condizioni dell'equilibrio dell'arco sono dunque

$$(3)\quad fO > G\left(\frac{BR}{CK} - f\right)$$

$$(4)\quad O.\frac{AT}{BM} > G\left[\frac{BR}{CK} - \frac{AM}{BM}\right].$$

Dall'ultima ~~equaz.~~ condizione si vede che crescendo AT cresce la sicurezza dell'arco. Gli archi di tutto sesto si rompono ordinariamente nella vicinanza dei 45°; negli archi di sesto scemo la rottura succede più verso i pulvinari, e nei sesti scemi che sono in uso la rottura succede verso i 30° di distanza dal pulvinare. Nelle Piattabande la rottura si fa nel pulvinare.

Se l'arco non ha spessezza la forma della curva secondo cui esso è piegato deve essere una Catenaria omogenea.



[redacted]. Se l'arco ha spessezza ad intradosso e tagli dei cunei che lo compongono sono normali alla curva di intradosso, la forma di questa deve essere una Catenaria ~~de~~ conforme alla Catenaria caricata di pesi proporzionali ai pesi dei cunei dell'arco. Infatti l'equazione $H = A\tan\varphi$ se riferiamo la curva di intradosso all'asse OY orizzontale ed all'asse OX verticale diviene a questa altra $H\,dy = A\,dx$, poichè $\tan\varphi = \frac{dx}{dy}$.

In quest'ultima ipotesi è inutile il cercare se la curva delle pressioni è contenuta nell'interno dell'arco, perciò negli archi si fanno quasi sempre i tagli normali alla Curva di intradosso.

Delle Macchine in equilibrio e nello stato prossimo al moto.

Lezione 1.ª

Le Macchine sono sistemi di parti mobili appoggiate sopra uno o più punti fissi adatti a trasmettere pressioni o movimenti.

La Teoria delle Macchine si divide in tre parti, nella 1ª si considerano le Macchine in equilibrio astrazion fatta da ogni resistenza, nella 2ª si considerano le Macchine in equilibrio tenendo conto degli attriti, nella terza si considerano le Macchine in moto.

Generalmente le Macchine sono così costituite che ciascun punto non può percorrere che una data traiettoria ma può percorrerla in due sensi contrarii.

In ogni Macchina vi ha necessariamente almeno due forze, la forza che consideriamo come a nostra disposizione e di cui ci serviamo per applicarla alla Macchina e produrre quell'effetto che vogliamo, la quale vien detta Potenza, e la forza che noi vogliamo equilibrare o superare, la quale vien detta Resistenza e più comunemente Peso, poichè possiamo sempre supporre che la forza la quale vogliamo vincere od equilibrare sia un peso, come il più delle volte lo è.

Noi lascieremo la 3ª parte della Teoria delle Macchine Trattando soltanto delle prime parti, chè anzi di queste ne faremo una sola Considerando successivamente una stessa Macchina nello stato d'equilibrio quando non si tien conto degli attriti, e quando se ne tien conto.

Tenendo conto degli attriti siccome questi resistono soltanto mentre son capaci di produr movimento [illegible] si comprende facilmente ancor'esso più valori della Potenza capaci di mantenere la Macchina in equilibrio. Lo stato della Macchina in cui la potenza sta per vincere la resistenza, e lo stato in cui la resistenza sta per vincere la potenza si chiamano Stati prossimi al moto.

Della Leva.

Leva è una verga rigida retta o curva appoggiata ad un punto fisso o fulcro e sollecitata comunque da forze.

L'unico effetto che tali forze possano produrre è di far girare la leva intorno al punto fisso, possiamo quindi a tutte quelle che tendono agire per un verso, ed a tutte quelle che tendono a far girare pel verso contrario sostituirne due sole, che producano gli stessi effetti, una sarà la Potenza, l'altra il Peso.

Quindi si rifletta, che nella Leva vi sono tre punti da considerare il fulcro ed i punti d'applicazione della Potenza e del Peso.

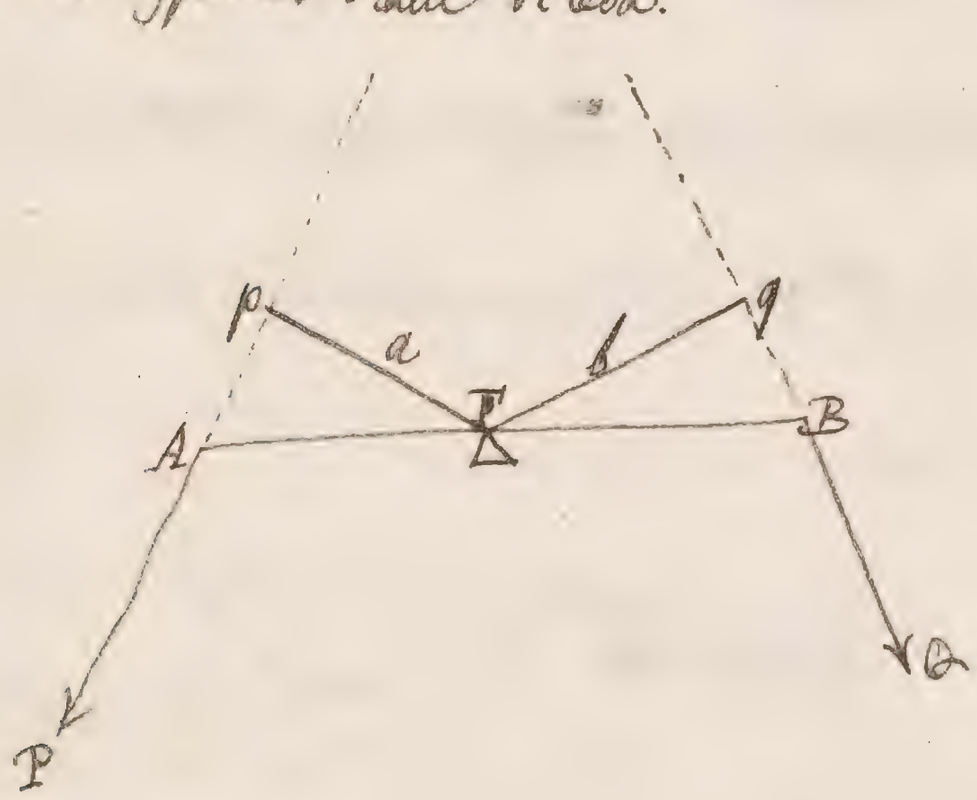
Se il fulcro sta fra gli altri due punti la leva dicesi di 1° genere;

Se sta in mezzo [illegible] la leva dicesi di 2° genere; se finalmente sta in mezzo [illegible] la leva dicesi di 3° genere. Le distanze delle direzioni della Potenza e del peso dal fulcro diconsi bracci di leva delle forze, e devono distinguersi dalle braccia della leva, che sono le distanze dei punti d'applicazione delle forze dal fulcro.

Qualunque sia la leva se P sia la Potenza, a il suo braccio, e il peso, b il suo braccio,

non tenendo conto dell'attrito la condizione d'equilibrio è $Pa = Qb$; quindi hassi

$P : Q :: b : a$. Dunque nella leva in equilibrio sta la potenza al peso in ragione inversa dei rispettivi bracci di leva.



Le leve ordinariamente sono rette, possono quindi la Potenza ed il peso Lenza che cangi il loro effetto intendersi trasportate nel loro piano in modo da diventar parallele, basta perciò che le applichiamo normalmente alla leva alle distanze a. b dal fulcro.

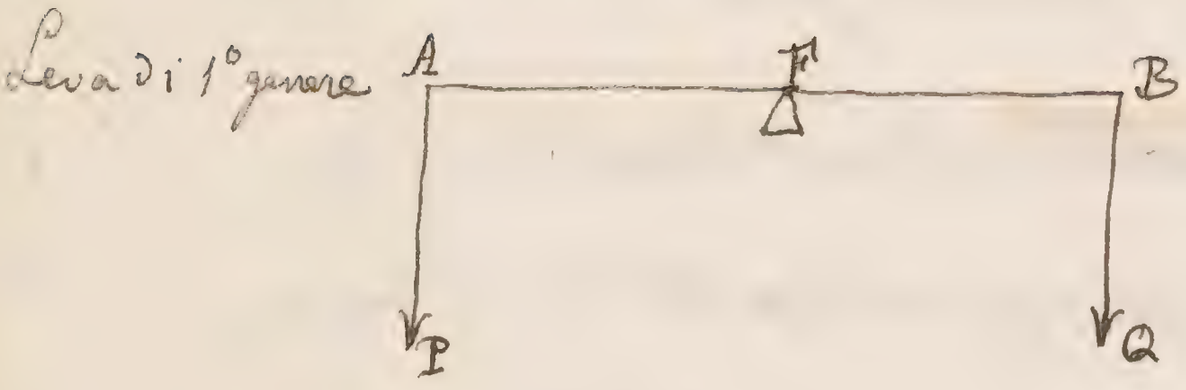
Le forze essendo così disposte risulta che nella leva di 1° genere FA. FB possono essere grandezze, come pure P. Q;

che nella leva di 2° genere FA > FB e P < Q;

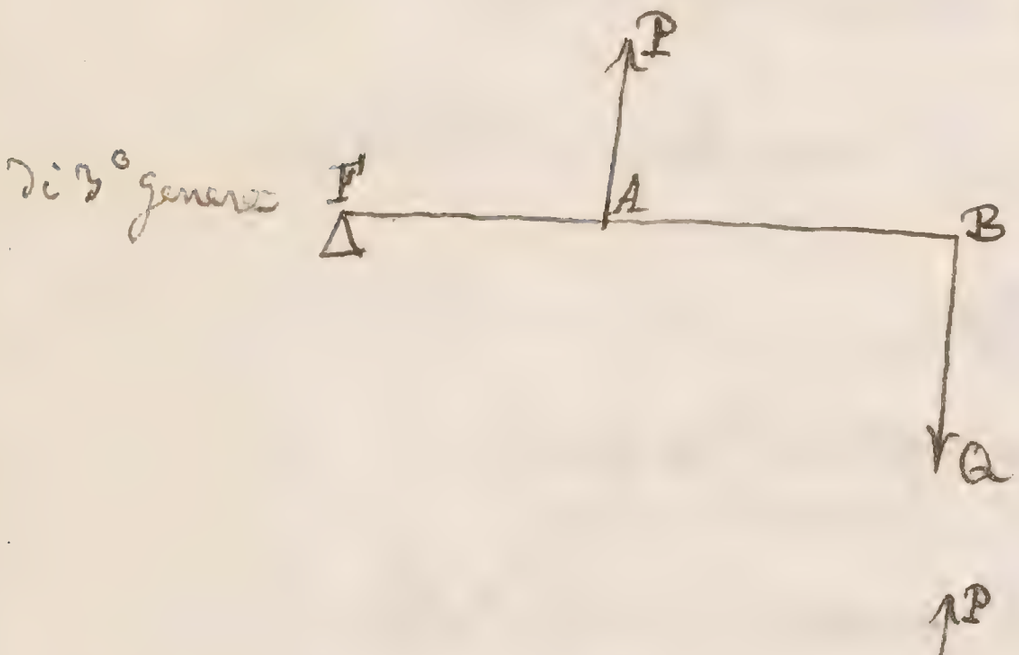
che nella leva di 3° genere FA < FB e P > Q;

che finalmente nella leva di 1° genere la potenza ed il peso sono sempre dirette nello stesso senso mentre nelle leve di 2° e di 3° genere sono sempre dirette in sensi contrari, e nella leva la risultante della potenza e del Peso è elisa dalla resistenza del fulcro, Quindi nella leva di 1° genere il fulcro sostiene uno sforzo $= P + Q$, e nelle leve di 2° e 3° genere sostiene uno sforzo $= Q - P$, oppure $= P - Q$.

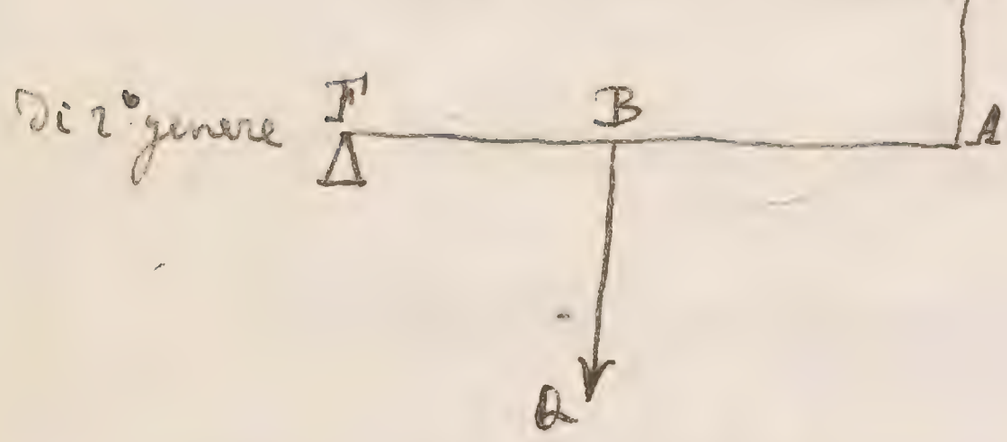
Leva di 1° genere



di 3° genere



di 2° genere



Per tener conto del peso della leva supponiamo questo tutto concentrato nel centro di gravità della leva, sia V il peso proprio della leva, c la distanza della verticale condotta pel detto centro dal fulcro la condizione d'equilibrio sarà $Pa = Qb \pm Vc$, secondochè il peso V ajuterà il peso Q o la potenza P.

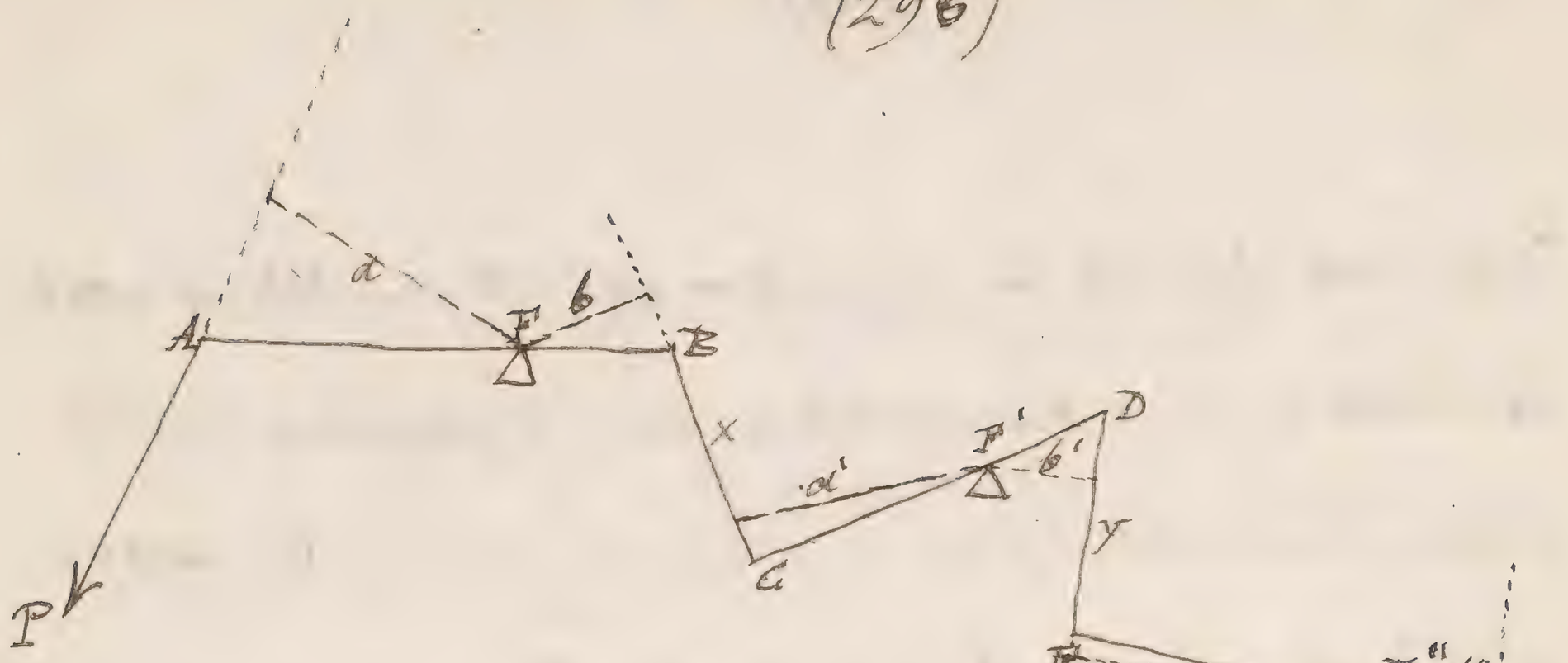
Nella leva di 2° ed di 3° genere il peso proprio della leva torna a vantaggio del peso Q; allungando la leva di 2° genere, se per una parte si avvantaggia la potenza accrescendo il suo braccio, per l'altra si scapita poichè cresce il momento Vc del peso proprio della leva, proponiamo quindi proporci il seguente problema: Dato il peso Q ed il suo braccio, dato il peso G dell'unità di lunghezza della leva, che supponiamo omogenea, [illegible], trovare che lunghezza a debba darsi alla leva, perchè si abbia l'equilibrio col minor sforzo possibile, ossia perchè P sia un minimo.

Poichè deve essere per l'equilibrio $Pa = Qb + \frac{1}{2}Ga^2$, ne segue, che dovremo cercare il valor di a che rende minima l'espressione $P = \frac{Qb}{a} + \frac{1}{2}Ga$: perciò differenziamo questa equazione rispetto ad a poniamo $\frac{dP}{da} = 0$, l'equazione risultante $-\frac{Qb}{a^2} + \frac{1}{2}G = 0$ ci somministra subito il valore conveniente di a

$a = \sqrt{\frac{2Qb}{G}}$, sostituendolo abbiamo il valore corrispondente di P

$$P = \sqrt{2QbG}.$$

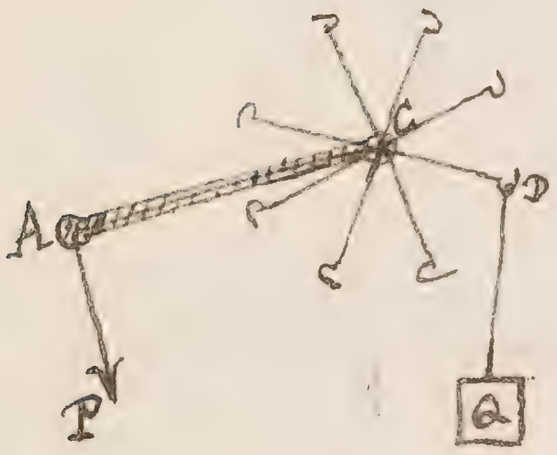
Consideriamo ora non più una leva ma un sistema qualunque di leve.



Se le diverse leve sono unite con spranghe come BC, DE, queste saranno tese e la tensione è facile a calcolarsi, se non sono unite con spranghe ma attaccate l'una all'altra vi avrà pressione tra una leva e l'altra, pressione che sarà anche facile il Calcolare.

Sieno X, Y..... le tensioni delle spranghe nel 1° caso, oppure le pressioni delle leve una contro l'altra nel 2° caso. per l'equilibrio dovrà essere $Pa = xb$, $xa' = yb'$, $ya'' = Qb''$, ogni moltiplicando tra di loro queste tre equazioni e riducendo $Paa'a'' = Qbb'b''$. Questa è l'equazione dell'equilibrio della Macchina, ci dice che $P:Q :: bb'b'' : aa'a''$, ogni che la potenza sta al peso come il prodotto dei bracci di leva presi dalla parte del peso sta al prodotto dei bracci di leva presi dalla parte della potenza.

Con questa Macchina il peso Q non può essere sollevato che fino ad una data altezza, bisogna che la modifichiamo se vogliamo che sia atta a sollevarlo ad una altezza qualunque.

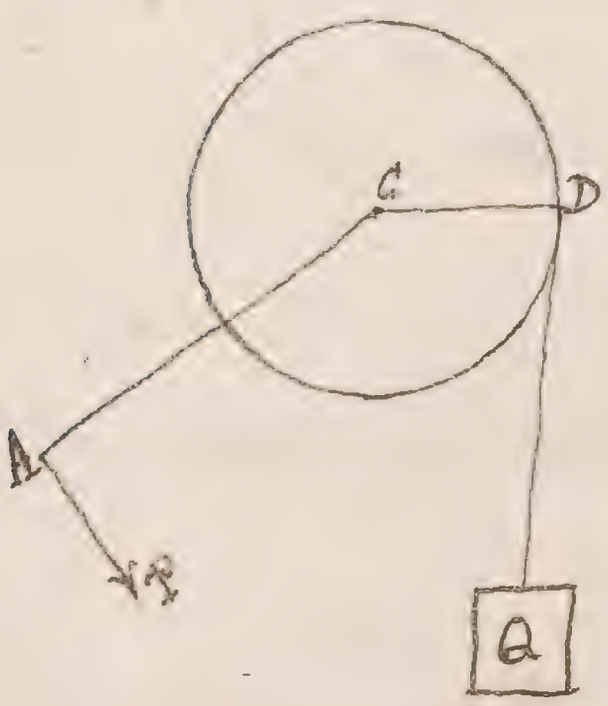


Una prima maniera di modificare la leva si è quella di attaccare ad una spranga AC mobile intorno al punto C tante altre spranghette come CD le quali portino all'altra estremità degli uncini a cui si possa attaccare il peso Q.

con questa disposizione attaccando all'estremità A della spranga AC la potenza P, attaccando all'uncino D il peso Q si potrà sollevare il peso finchè la spranga sarà orizzontale. allora senza togliere abbassare il peso Q si stacca la fune che lo porta dall'uncino D e si attacca al seguente, la potenza P continuando ad agire normalmente ad AC e per conseguenza al braccio di leva AC solleverà quest'uncino col peso Q, quando la Macchina avrà girato tanto, che la spranga seguente sia orizzontale si staccherà il peso Q si attaccherà alla spranga orizzontale, e così continuando si solleverà il peso Q ad una qualunque altezza purchè non maggiore di quella della Macchina della quantità CD.

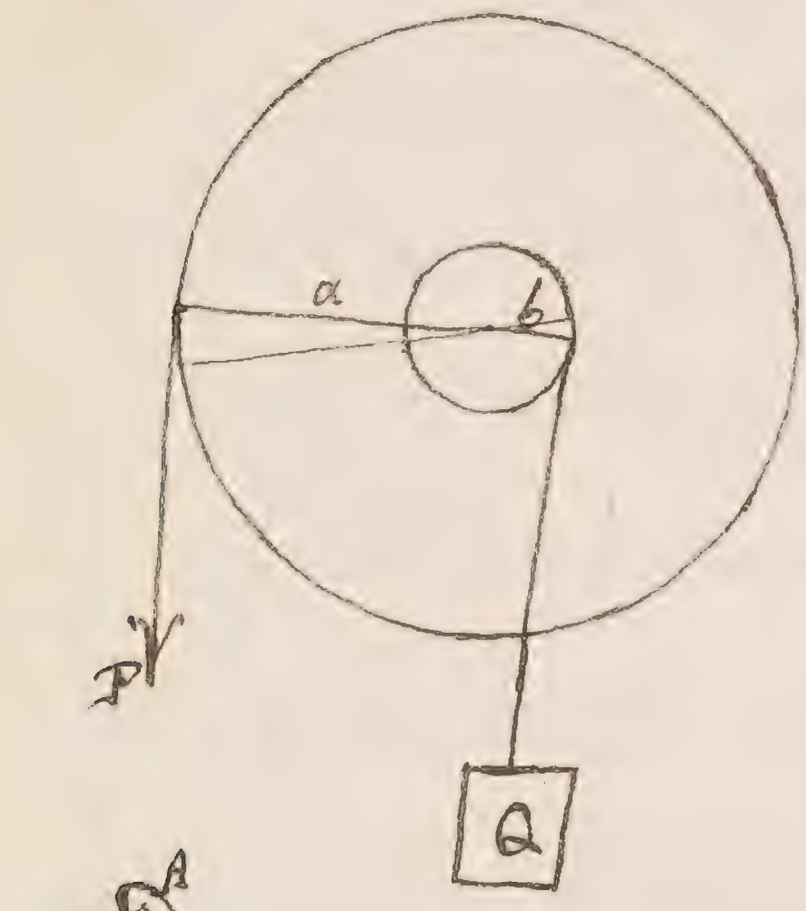
a questa la lunghezza AC, e la lunghezza CD delle spranghe che portano gl'uncini. siccome questa Macchina non è altro che una combinazione di leve in cui i bracci della potenza e del peso sono a, b le spranghe a cui è attaccato il peso è orizzontale, ne segue che quando la macchina è in tal posizione la condizione d'equilibrio è $Pa = Qb$.

Moltiplicando il numero delle spranghe CD sino all'infinito esse formeranno un cilindro e non sarà più bisogno degli uncini per sostenere il peso Q. Quest'ultima disposizione è più vantaggiosa poichè per far salire il peso Q non fa bisogno di far variare la potenza P come nella 1ª disposizione, inoltre il peso Q sale con moto continuo per la verticale DQ tangente al cilindro. poichè in questa macchina la spranga CD a cui è attaccato il peso è sempre orizzontale.

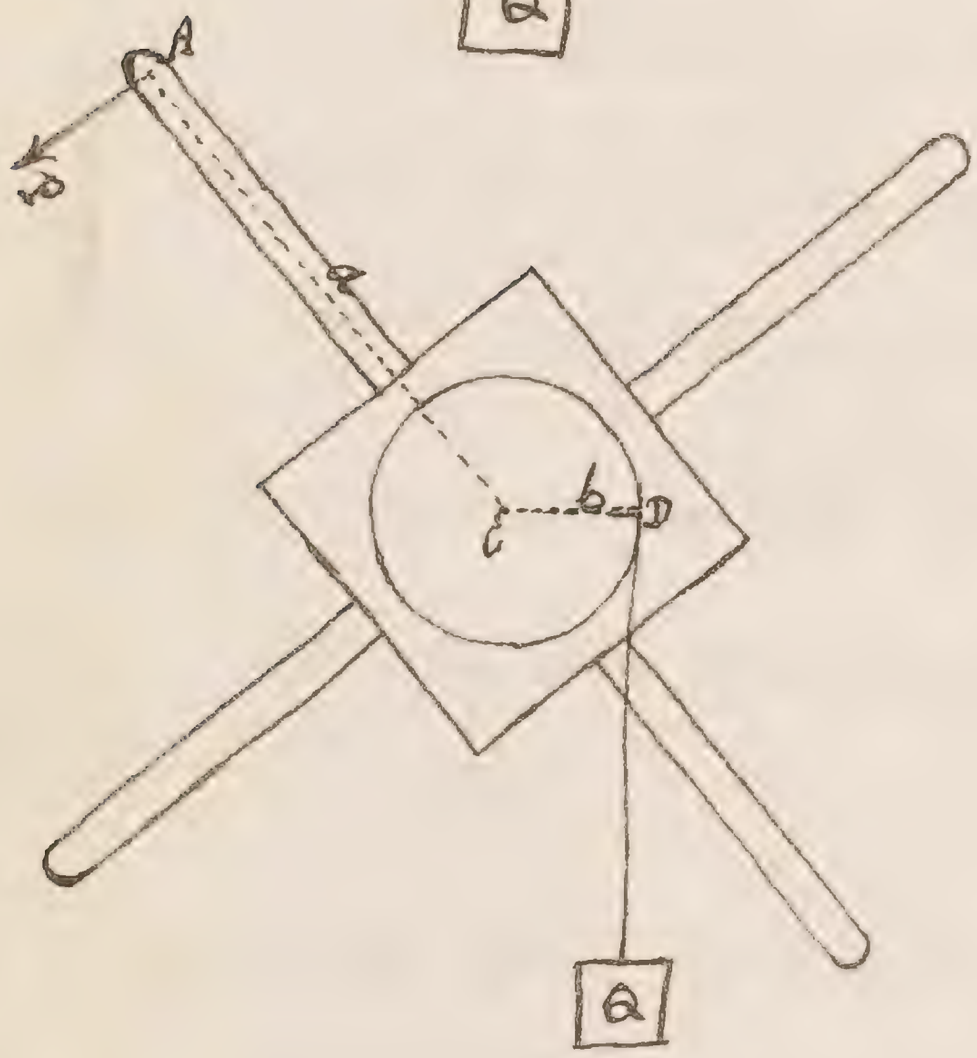


Questa Macchina si diriama dai Meccanici asse nella ruota, quando la potenza P

è applicata alla periferia di una ruota di raggio Ab che gira col cilindro CD.



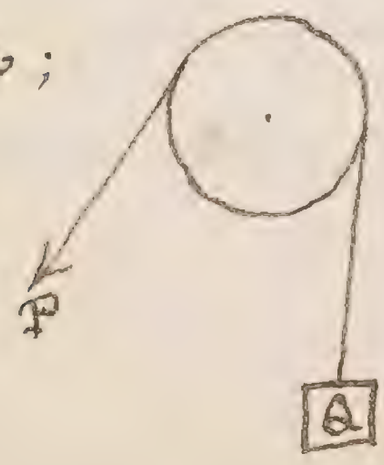
~~allora~~ L'asse della ruota non è dunque che una leva di leva e la condizione d'equilibrio è $Pa = Qb$. In questa macchina la potenza P deve sempre conservare la stessa direzione perciò non serviri per sollevare il peso Q di un peso P.



alle volte invece di una ruota è un parallelepipedo che gira insieme col cilindro CD e la potenza P si applica normalmente a delle stanghe che traversano il parallelepipedo ed il cilindro passando per l'asse di questo.

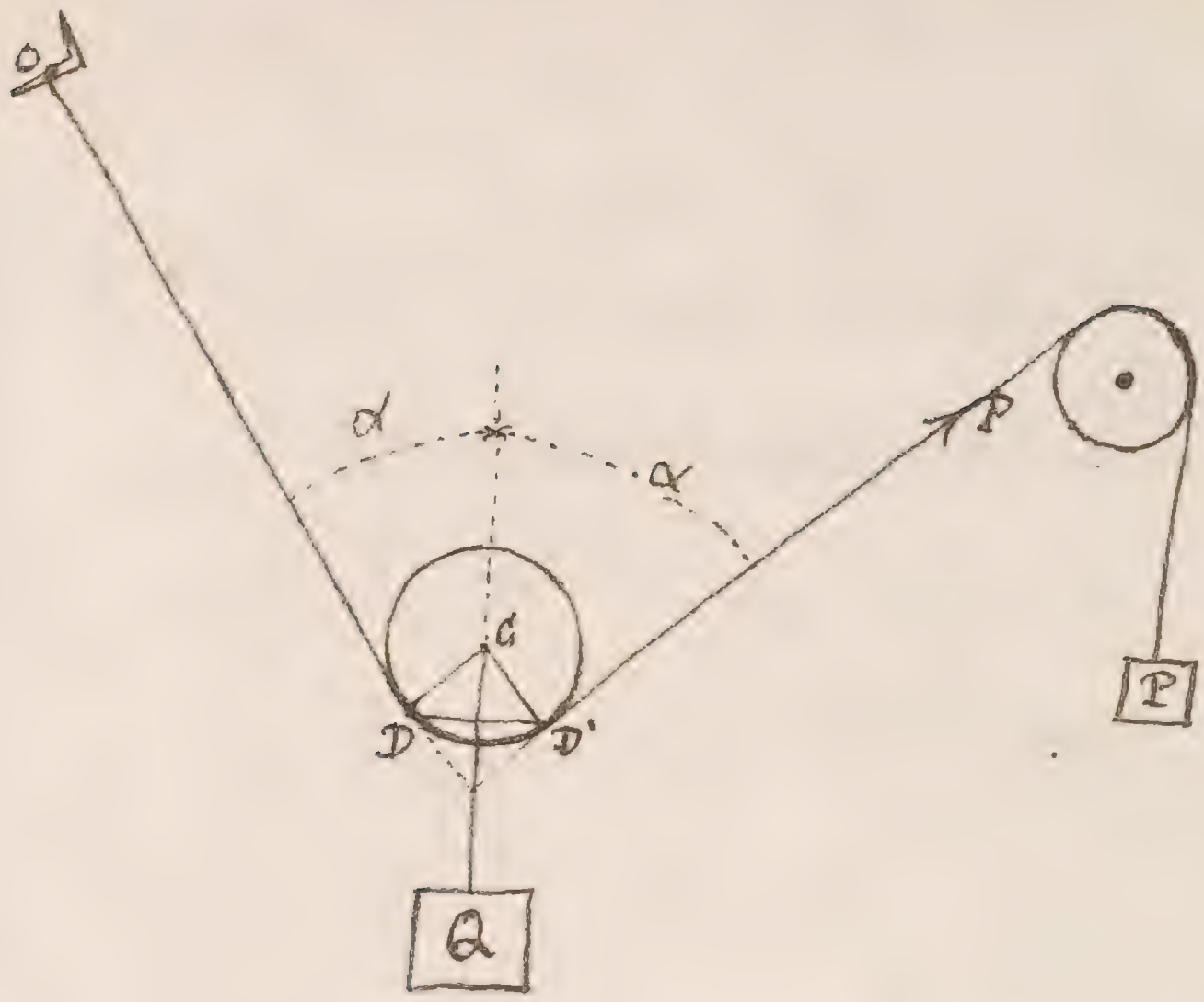
~~Anche~~ se l'asse del cilindro è orizzontale questa macchina chiamasi Verricello; se l'asse del cilindro è verticale chiamasi Argano. Così nell'argano come nel verricello se $CA = a$, $CD = b$ la condizione d'equilibrio è $Pa = Qb$. L'argano serve a trascinare dei pesi orizzontalmente.

Nell'asse nella ruota se $b = a$ la macchina riducesi ad una girella, alla cui periferia è applicata da una parte la potenza e dall'altra il peso, e prende il nome di puleggia o troclea;



La condizione d'equilibrio della puleggia è dunque $P = Q$.

In questa macchina la potenza e il peso si applicano ad una stessa



Si può impiegare la puleggia in modo diverso attaccando il peso al centro della puleggia, ed attaccando la fune che avvolge la puleggia ad cui è attaccata la potenza P ad un punto fisso O. In questa macchina la puleggia è mobile, e la Macchina chiamasi puleggia mobile. Generalmente in questa macchina per comodità si aggiugne una troclea fissa per rendere P verticale.

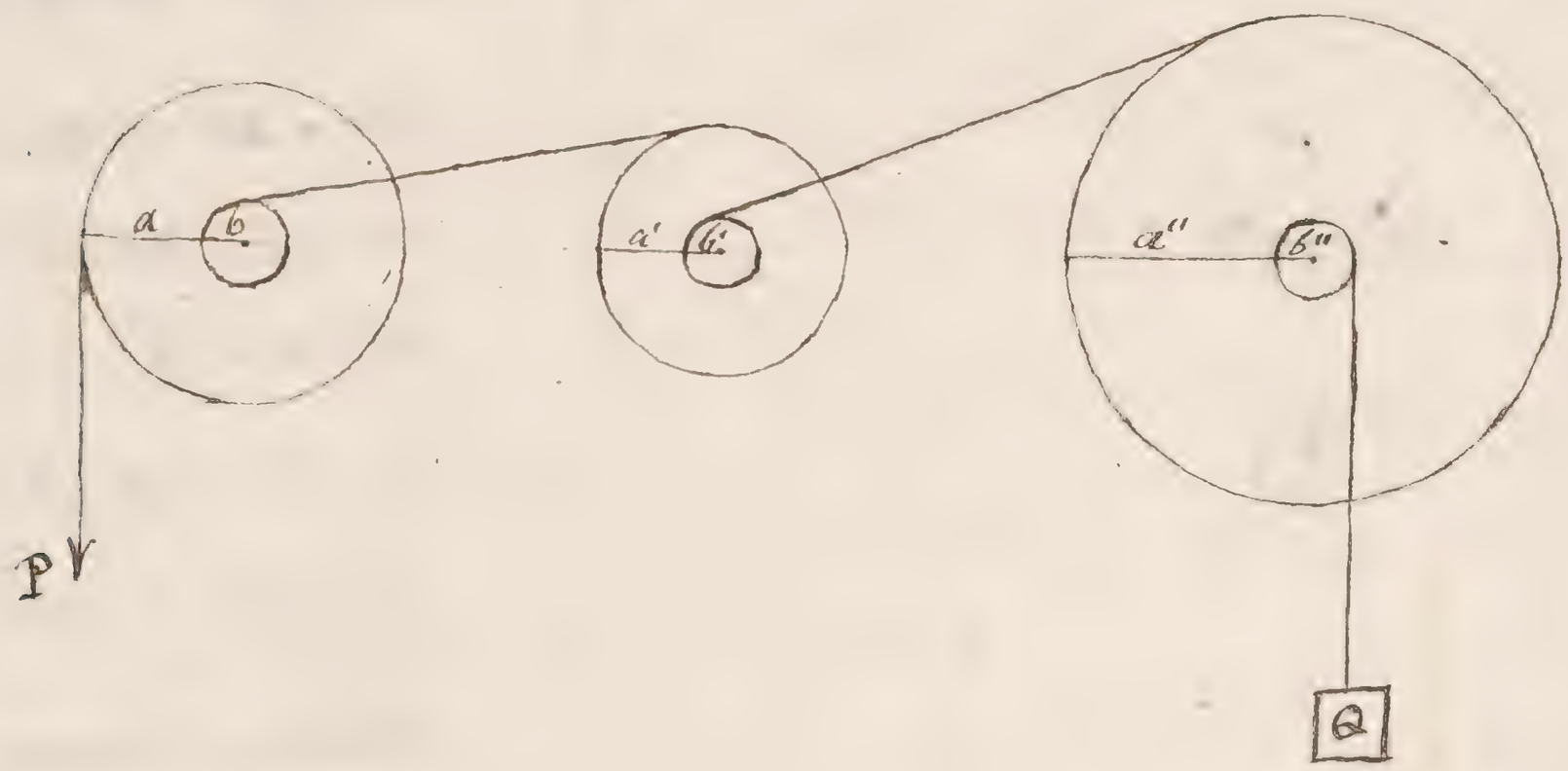
La teoria della puleggia mobile non è altro che una applicazione della teoria del poligono funicolare, poichè siamo precisamente nel caso contemplato nella Statica alla pag.a 238. L'equazione dell'equilibrio della puleggia mobile è dunque $P = \frac{Q}{2\cos\alpha}$, α essendo l'angolo che la direzione della potenza fa colla direzione del peso Q. e che per l'equilibrio deve essere eguale a quello che il tratto di fune OD fa colla direzione di Q. Dalla detta equazione hassi $P:Q :: 1:2\cos\alpha$, ora $1:2\cos\alpha :: CD: 2.CD\cos\alpha :: CD:DD'$, dunque nella puleggia mobile sta

$P:Q :: CD:DD'$ e $P = Q.\frac{CD}{DD'}$, ossia Sta la potenza al peso come il raggio della puleggia alla corda dell'arco abbracciata dalla fune.

La maniera la più vantaggiosa di impiegare la troclea mobile consiste nel fare che la potenza sia parallela al peso, allora $P = \frac{1}{2}Q$.

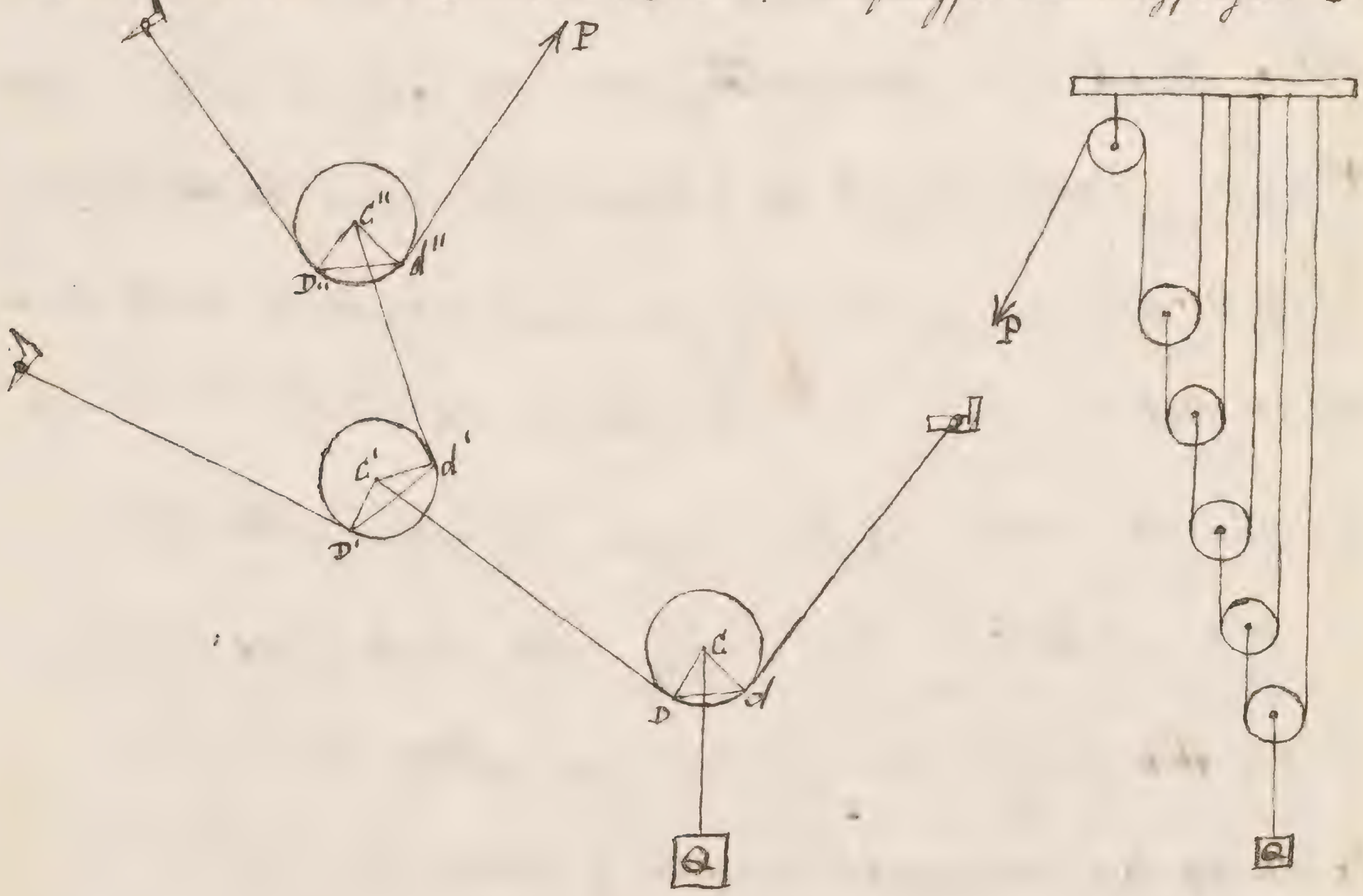
nella troclea mobile la tensione del tratto OD è $= P = Q.\frac{CD}{DD'}$.

Se si combinano insieme più assi nella ruota come si vede nella figura, la condizione d'e-
-quilibrio è come in una combinazione di leve $P.aa'a''... = Q.bb'b''...$



Varii sono i sistemi di troclee che si adoperano per sollevar pesi.

In un sistema qualunque di troclee mobili come il seguente la condizione d'equilibrio
è $P.Dd.D'd'.D''d''... = Q.CD.CD'.CD''...$, e se le puleggie sono m di raggio eguali $P.Dd.D'd'... = Q.CD^m$.



La maniera la più vantaggiosa per la potenza P di disporre le puleggie si è di rendere tutte le funi parallele,
allora $P = \frac{Q}{2^m}$. Facile è il calcolare in queste Macchine il calcolare le tensioni di ciascun tratto di fune.

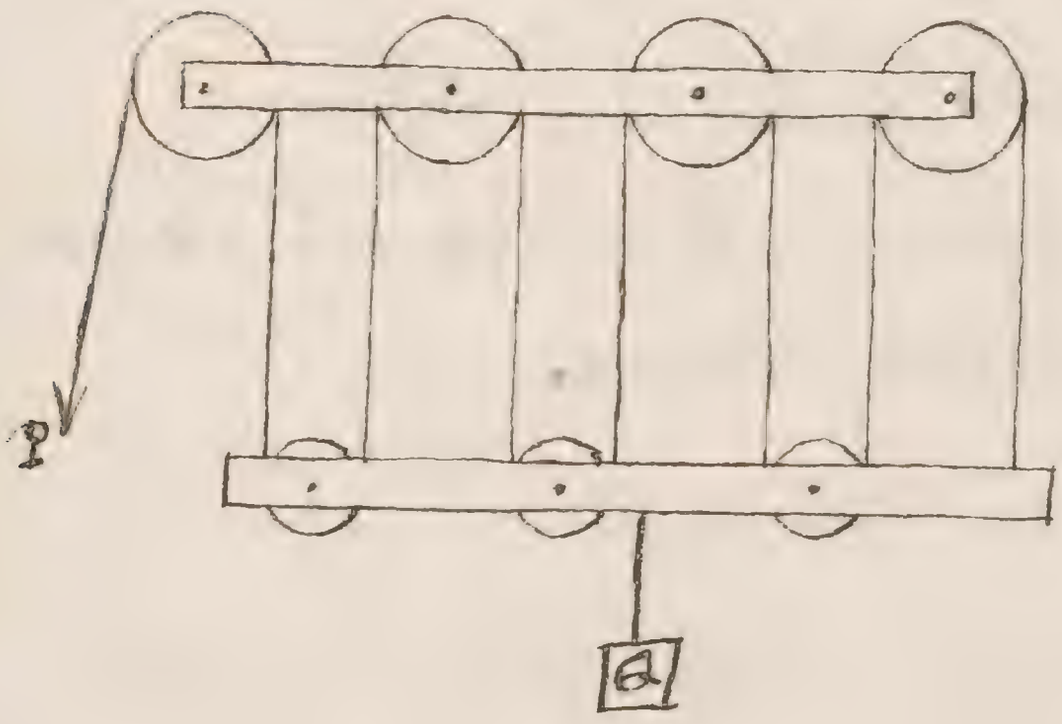
Lezione 2ª.

Le alla troclea mobile sono attaccati tre tratti paralleli di fune nel modo indicato sulla figª, i tre tratti essendo egualmente tesi, la tensione di ciascuno sarà = P, d'altronde la somma delle tensioni deve essere = Q, dunque $P = \frac{1}{3} Q$.

Diconsi Paranchi certi particolari congegni composti di due sistemi di trocle fisse e di trocle mobili; questi due sistemi si chiamano taglie.

Il numero delle trocle componenti una taglia può essere qualunque, tutte però son sempre in una medesima cassa rigida. Nel Paranco una stessa fune abbraccia tutte le trocle. Uno dei capi della fune è fermato ad un punto del sistema, l'altro capo uscendo fuori da una delle trocle fisse è tratto dalla potenza. Il peso è attaccato alla cassa delle trocle mobili.

Nel Paranco per l'equilibrio bisogna, che la risultante delle tensioni di tutte le funi sia eguale e direttamente opposta al peso, quindi se il Paranco è tale, che le funi siano parallele, e le trocle di una stessa taglia siano eguali, perchè vi sia equilibrio il peso Q deve essere applicato nel centro delle forze parallele dirette secondo i diversi tratti di fune le quali rappresentano le tensioni di queste, le tensioni di ciascun tratto di fune devono essere eguali ed eguali a P, e la loro somma deve essere = Q, se dunque n sia il numero dei tratti di fune



sarà $P = \frac{Q}{n}$.

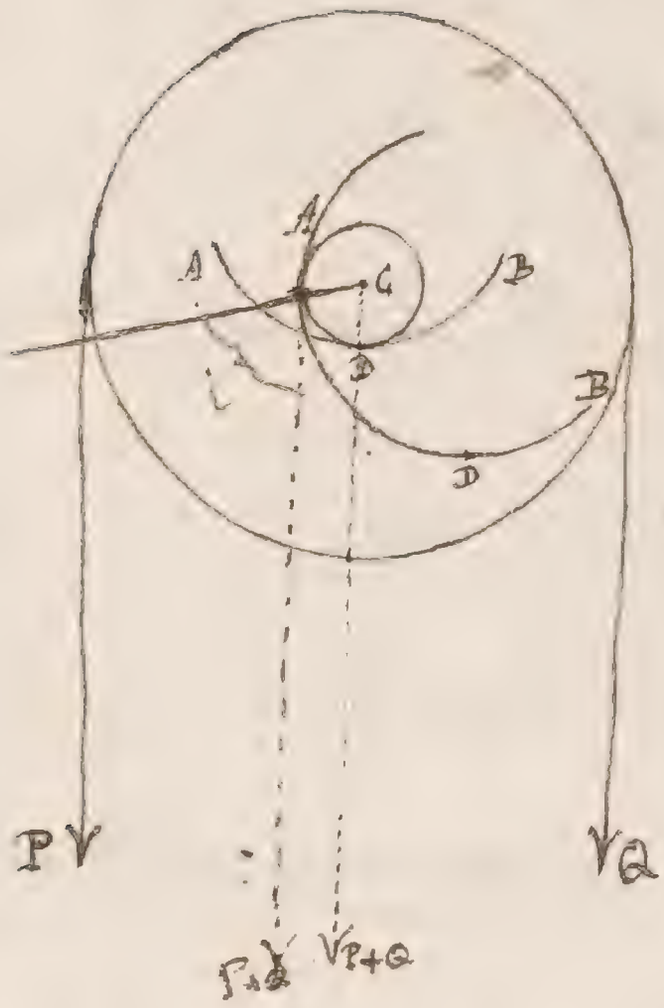
Se nel Paranco i tratti di fune non sono paralleli per l'equilibrio bisogna, che supponendo alla Cassa delle troclee mobili attac-cate tante forze eguali e parallele alle tensioni di ciascun tratto di fune nei punti dove questi vanno a finire la Cassa il peso Q sia applicato nel centro di queste forze, e chiamando t', t'', t''', t^{IV}... le tensioni dei singoli tratti di fune ed $\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}$,--- gli angoli, che questi tratti fanno colla direzione del peso Q sia $t'\cos\alpha' + t''\cos\alpha'' + t'''\cos\alpha''' + t^{IV}\cos\alpha^{IV} + \text{---} = Q$, intendendo positivi tutti gli

$t'\operatorname{sen}\alpha' + t''\operatorname{sen}\alpha'' + t'''\operatorname{sen}\alpha''' + t^{IV}\operatorname{sen}\alpha^{IV} + \text{---} = 0$ angoli formati alla destra delle verticali eretta nei punti dove le funi incontrano la Taglia delle troclee mobili, negativi quelli formati alla sinistra delle dette verticali; ora le tensioni t', t'', t''', t^{IV}... sono tutte eguali ed eguali a P, dunque $P(\cos\alpha' + \cos\alpha'' + \cos\alpha''' + \cos\alpha^{IV} + \text{---}) = Q$ ossia $P : Q :: 1 : \Sigma\cos\alpha$.

Si dà anche al Paranco quest'altra forma;

La Leva, la Troclea, e l'asse nella ruota e le loro combinazioni costituiscono le Macchine di rotazione.

Introducendo in queste macchine la considerazione dell'attrito e della rigidezza delle funi.



Quando abbiamo una puleggia di cui

l'asse è collocato sopra un cilindro AB e

i pesi attaccati alla fune che la avvolge

sono eguali, la loro risultante passando per

l'asse del perno è elisa dalla resistenza del cilindro

AB, ma se aumentiamo un poco il peso P,

questo tende a far muovere la puleggia,

ora tra l'asse ed il cilindro si generano due specie di

attriti uno di 1ª, l'altro di 3ª specie, il primo si oppone allo scorrimento della

puleggia, il 2° ~~di~~ si oppone al moto di rotazione che questa può prendere,

l'attrito di 3ª specie è molto maggiore di quello di 1ª specie, quindi la macchina rimarrà

ferma quale attrito che l'altro, e si segnerà come si vede nella fig.ª, prima di girare,

finchè la risultante delle forze P, Q non venga a passare dinuovo pel punto di contatto

dell'asse col cilindro ADB; allora questa risultante tenderà a far girare la puleggia

intorno al suo centro di grandezza Dafar strisciare l'asse di questa sul cilindro; alla

1ª impossa si oppone l'attrito di 3ª, alla 2ª l'attrito di 1ª specie.

Perchè la macchina sia nello stato proprio al moto bisognerà che ~~l'attrito~~ gli attriti e la

forza P+Q si facciano equilibrio, ora le decomponiamo la forza P+Q in due

una normale al cilindro, l'altra tangenziale, e chiamiamoci l'angolo che questa fa

colla normale sarà (P+Q)cosi la componente normale, (P+Q)seni la tangenziale,

sarà $f'(P+Q)\cos i$ il valore dell'attrito di 1ª specie, che si oppone allo strisciamento,

$f'''(P+Q)\cos i$ il valore dell'attrito di 3ª specie che si oppone al moto rotatorio.

Se sia il raggio della puleggia, r il raggio dell'asse, le condizioni d'equilibrio saranno dunque

$(P+Q)\operatorname{sen} i = f'(P+Q)\cos i$. Dalla 1ª equazione hassi $\cos i = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$. Sostituendo

$(P-Q)a = f'''r(P+Q)\cos i$ questo valore nella 2ª avremo l'equazione dello stato

prossimo al moto della puleggia

$$(P-Q)a = \frac{f'''r(P+Q)}{\sqrt{1+f'^2}}$$; Con un procedimento affatto analogo si trova

che l'equazione dello stato prossimo al moto dell'asse nella ruota è

$$Pa-Qb = \frac{f'''r(P+Q)}{\sqrt{1+f'^2}}$$. La stessa equazione serve per la leva quando

le forze sono parallele, e non sono parallele, ma fanno un'angolo θ avremo

l'equazione dello stato prossimo al moto sostituendo nel 2° membro della detta equazione

in vece di $P+Q$ la risultante $\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta}$.

Siccome f'^2 è quantità molto piccola a fronte dell'unità possiamo trascurarlo, allora l'equazione

dello stato prossimo al moto dell'asse nella ruota, e della leva in cui le forze sono parallele

diventa $Pa-Qb = f'''r(P+Q)$, e cioè subito $\frac{P}{Q} = \frac{b+f'''r}{a-f'''r}$; quindi si vede che se

f''' è positivo il 2° membro di questa equazione è $> \frac{b}{a}$, epperciò P ha il massimo valore che può

vincere il peso e l'attrito, se f''' è negativo il 2° membro è $< \frac{b}{a}$ epperciò P ha il minimo valore

necessario per vincere il peso e l'attrito, Dunque se f''' in questa equazione lo prendiamo positivo

avremo il valore della potenza quando questa è sul punto di vincere il peso, se f''' lo prendiamo negativo avremo il valore della potenza quando questa è sul punto di esser vinta dalla resistenza.

Aggiungiamo ancora i termini provenienti dalla rigidezza delle funi.

abbiamo altra volta detto che la rigidezza d'una fune tesa da un peso Q è espressa da $\mu + \nu Q$. μ, ν dipendendo dal diametro della girella o cilindro a cui ~~è~~ la fune è accavalcata, e dal diametro e dalla fabbricazione di esa fune, dunque nell'eq. nella ruota l'equazione dello stato prossimo al moto quando la potenza sta per vincere la resistenza è $Pa - Qb = f'''(P+Q)r + b(\mu + \nu Q)$, e basterà cangiare f''' ~~in~~ in $-f'''$ b in $-b$ nel 1° membro per avere l'equazione relativa al caso in cui la resistenza sta per vincere la potenza.

Facciamo l'applicazione di ciò al Varanco, supponendo

1° che i tratti di fune sieno tutti paralleli, 2° che le girelle sieno dello stesso diametro, 3° che i perni sieno tutti dello stesso diametro, 4° che la tensione della fune sia molto grande sicché si possa sottrarre il termine μ.

Per un tratto qualunque sarà

$$(P-Q)a = f'''(P+Q)r + a\nu Q \text{ . ossia}$$

$$P = Q\,\frac{a + f'''r + a\nu}{a - f'''r} = QA \text{ , chiamando } A \text{ il coefficiente costante di } Q \text{ per}$$

tutte le girelle; per avere la condizione di equilibrio di ciascuna girella basterà sostituire in vece di P, Q le tensioni dei tratti di fune corrispondenti quindi

$P = t'A$, $t' = t''A$, $t'' = t'''A$. $t''' = t^{IV}A$ ---- , ma per l'equilibrio deve essere $Q = \Sigma t$, dunque $Q = P\left[\frac{1}{A} + \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^4} + \text{---} + \frac{1}{A^m}\right]$. m essendo il numero dei tratti di fune, quindi ricavasi $Q = \frac{P}{A} \cdot \frac{\left(\frac{1}{A}\right)^m - 1}{\frac{1}{A} - 1} = \frac{P}{A^m} \cdot \frac{1 - A^m}{1 - A}$,

e $P = QA^m \frac{A-1}{A^m - 1}$.

Sarebbe ancora da considerarsi l'attrito delle girelle contro le casse, per diminuir questo il più che si può si usano le girelle quasi sempre di metallo invece di legno

Lezione 3ª

Supponiamo, che la potenza P sostenga il peso Q mediante una fune applicata all'arco AB di una curva qualunque, cerchiamo l'equazione dello stato prossimo al moto tenendo conto dell'attrito della fune sull'arco.

Riferiamo il sistema a due assi ortogonali OY. OX; Consideriamo un'elemento Mm = ds, a questo elemento sono applicate tre forze la tensione dT, la forza normale Nds proveniente dalla pressione vicendevole tra l'arco e la fune, e l'attrito, la cui intensità è perciò espressa da f'Nds; quindi perchè P sia sul punto di vincere Q deve essere $dT = f'N ds$, ora chiamando r il raggio di curvatura in M abbiamo $T = Nr$, se dunque eliminiamo N fra questa equazione e la precedente sarà $\frac{dT}{T} = f'\frac{ds}{r}$ l'equazione dello stato prossimo al moto. Cangiando il segno ad f' avremo l'equazione dello stato prossimo al moto quando Q è sul punto di vincere P, dunque $\frac{dT}{T} = \pm f'\frac{ds}{r}$ è l'equazione dello stato prossimo al moto che abbraccia i due casi cioè quello in cui P sta per vincere Q e quello contrario. Questa equazione si può dare un'altra forma osservando che $\frac{ds}{r}$ è eguale all'angolo di contingenza; chiamiamo quest'angolo $d\theta$ l'equazione diventerà $\frac{dT}{T} = \pm f'd\theta$; quest'equazione si può integrare e ci dà $\log T = \pm f'\theta + \text{Cost.}$

θ è l'angolo che la tangente alla curva fa coll'asse delle y, se dunque chiamiamo β l'angolo che la direzione del peso Q cioè che la tangente in B fa coll'asse delle y potremo determinare la costante scrivendo che a T = Q deve corrispondere $\theta = \beta$, avremo

ossia $\log T - \log Q = \pm f'(\theta - \beta)$ ossia $T = Q\, e^{\pm f'(\theta-\beta)}$.

Questa formola ci dà la tensione della fune T in un punto qualunque N;
questa tensione è $= P$ nel punto A, cosicchè chiamiamo α l'angolo
che la direzione di P fa coll'asse delle y avremo $P = Q\, e^{\pm f'(\alpha-\beta)}$, ma
$\alpha - \beta = BRC$, se dunque chiamo γ l'angolo delle forze P, Q, poichè $BRC = 180° - \gamma$,
avremo ancora $P = Q\, e^{\pm f'(180°-\gamma)}$.

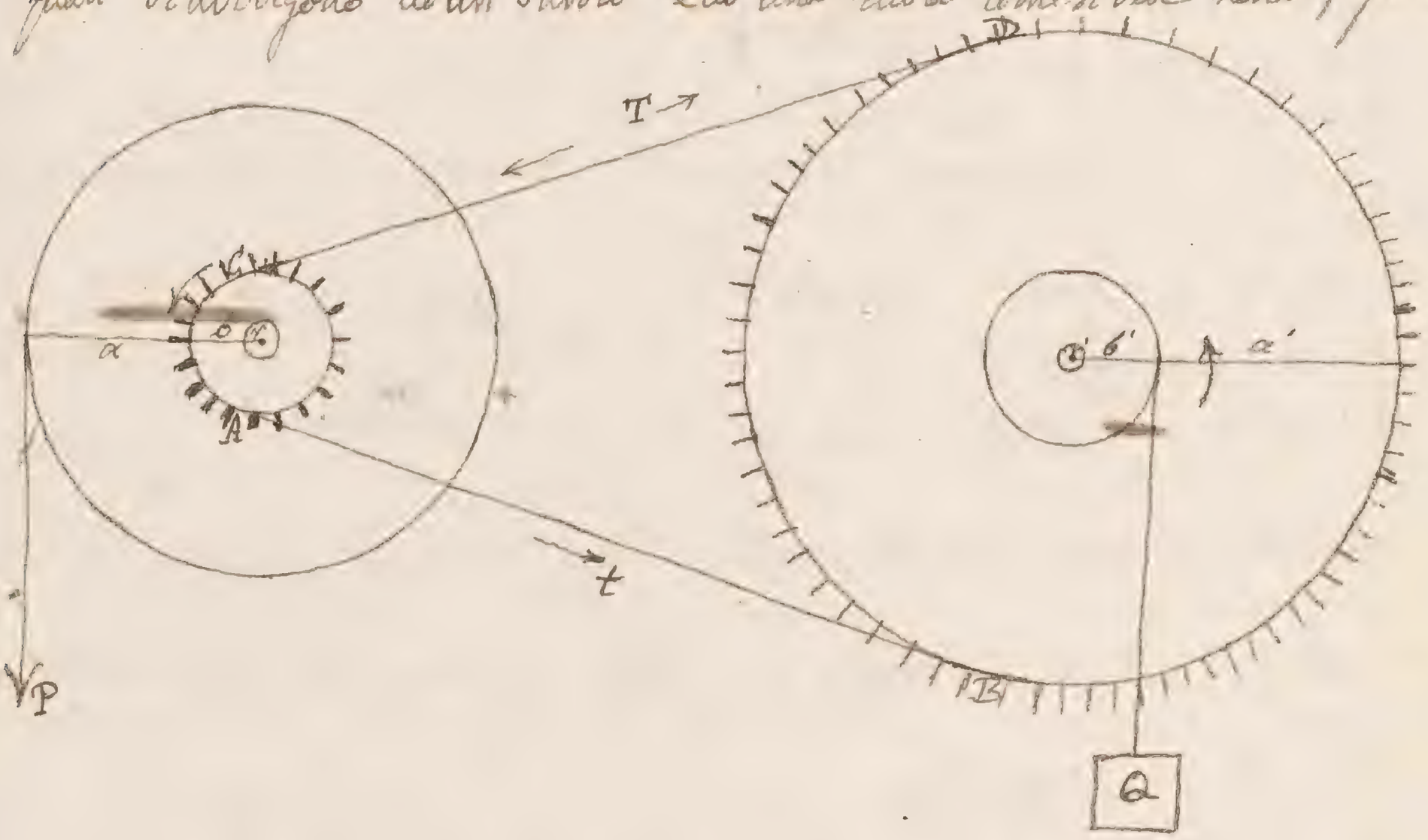
Sia AMB un'arco di circolo di raggio r e di lunghezza a sarà evidentemente
$180° - \gamma = \frac{a}{r}$, e quindi $P = Q\, e^{\pm \frac{f'a}{r}}$; se la fune da più giri
sul cilindro un numero m di giri avremo $P = Q\, e^{\frac{\pm f'(2m\pi r + a)}{r}}$, quindi si vede
qual forza occorre per sostenere il peso mediante una fune che con
molte spire abbraccia un cilindro immobile e qual piccola forza sia bastante
ad impedire la discesa del peso.

È da notarsi che la formola $P = Q\, e^{\pm f'(180°-\gamma)}$ vale soltanto per il caso in cui la
fune non da più giri sullo stesso arco; è però sempre cosa facile in ciascun
caso particolare l'applicarla al caso in cui la fune da più giri come abbiamo fatto
nell'esempio antecedente.

Nell'asse nella ruota abbiamo trovato che occorre $Pa - Qb = (P+Q) f''' r + b(\mu + \varkappa Q)$
affinchè la macchina sia nello stato prossimo al moto, la stessa equazione non
serve più per l'argano dove la potenza è distribuita a più punti fra loro
diametralmente opposti, poichè allora essa potenza non influisce più sull'attrito.
L'equazione dello stato prossimo al moto dell'argano è dunque

$$Pa - Qb = 2 f''' r + b(\mu + \varkappa Q), \text{ ossia } Pa = Q\,(b + f''' r + b\varkappa) + b\mu.$$

Per sollevare un peso se si usa un sistema di assi nella ruota accade l'inconveniente che quando esso si mette in moto ~~[illegible]~~ dopo un certo tempo una delle funi del sistema si sarà tutta svolta da un cilindro ed avviluppata sull'altro. Affine di evitare a questo inconveniente si usano le funi dette senza fine le quali non sono altro che funi annodate le quali si avvolgono attorno ad un subbio e ad una ruota come si vede nella figura qui annessa.



Vogliono in questa macchina succedere varii casi quando essa si mette in moto secondo la maggiore o minore lunghezza della fune combinata coll'attrito che ha luogo nell'estensione in cui essa è accavalciata al subbio ed alla ruota. Può darsi, che la potenza faccia girare il subbio dentro la fune senza che questa scorra ovvero che il subbio faccia scorrere la fune senza che questa non comunichi il movimento alla ruota del peso.

Quando non avviene alcuno di questi due casi ma si fa la trasmissione del moto è facile determinare la ragione d'equilibrio della macchina tanto quando si fa astrazione dalle resistenze, che quando se ne tien conto.

~~Dinotato~~ sia T la tensione del tratto CD ~~[illegible]~~, t la tensione del tratto AB ~~[illegible]~~, non tenendo conto delle resistenze la ragione d'equilibrio della 1ª ruota

col suo subbio sarà $Pa + tb = Tb$, ossia $Pa = (T-t)b$, la ragione d'equilibrio della 2ª ruota col suo subbio sarà $Qb' = (T-t)a'$, e quindi la ragione d'equilibrio della macchina darà $P\,aa' = Q\,bb'$, ossia $P = Q \cdot \frac{bb'}{aa'}$.

Tenendo conto delle resistenze la ragione d'equilibrio della 1ª ruota col suo subbio sarà (1) $Pa = (T-t)b + f'''Rr + b(\mu + \nu T)$, R essendo la risultante delle forze P, T, t; la ragione d'equilibrio della 2ª ruota col suo subbio sarà, chiamando R' la risultante delle forze Q, T, t,

(2) $(T-t)a' = Qb' + f'''R'r' + b'(\mu' + \nu' Q) + a'(\mu'' + \nu'' t)$; queste equazioni valgono pel caso in cui la potenza sta per vincere il peso; pel caso contrario le equazioni sono

per la 1ª ruota (3) $Tb = tb + Pa + f'''Rr + b(\mu + \nu t)$

per la 2ª ruota (4) $Qb' + ta' = Ta' + f'''R'r' + a'(\mu'' + \nu'' T)$.

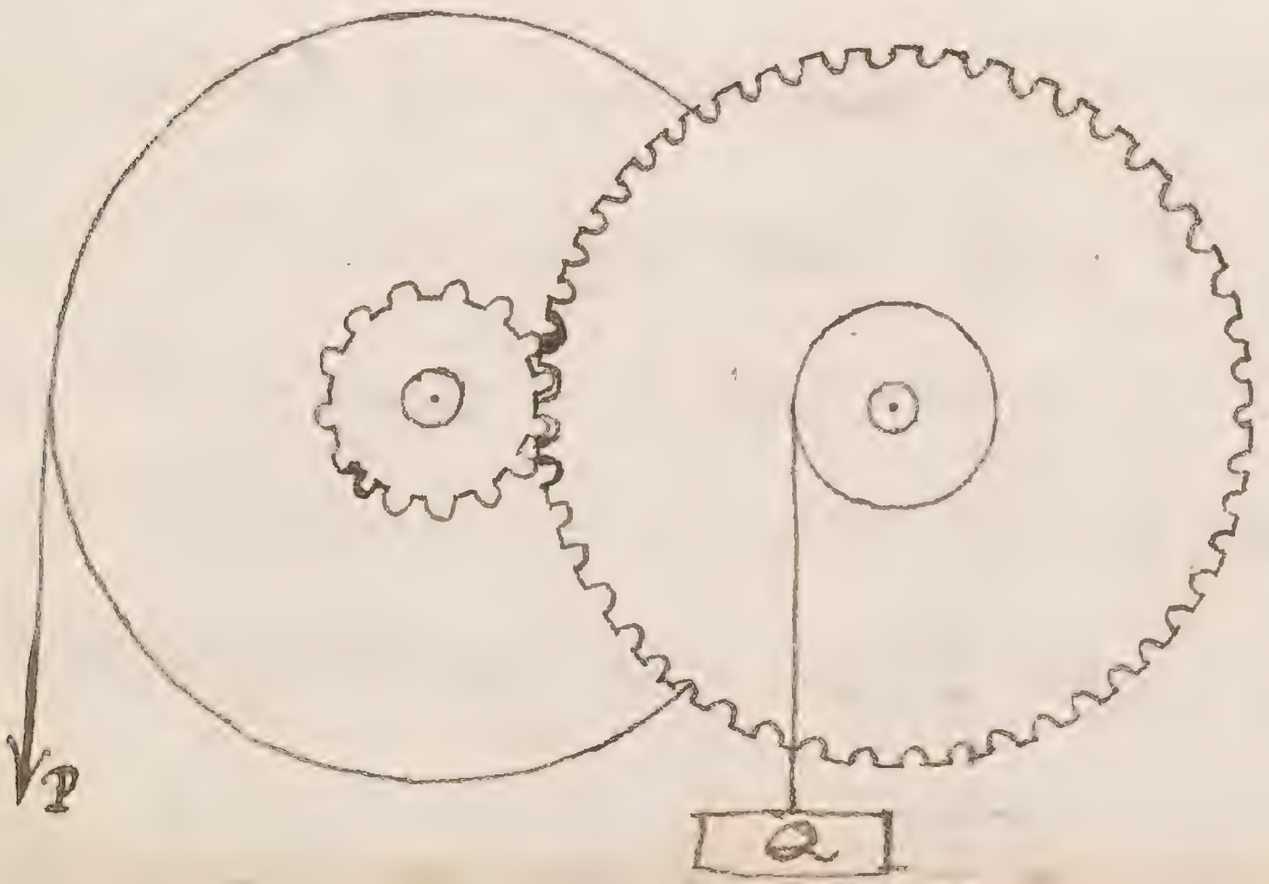
Resta a determinarsi la tensione da darsi alla fune perchè l'attrito basti a trasmettere il movimento dall'una ruota all'altra.

Sia la potenza P sul punto di vincere il peso Q da quel che fu detto sul principio di questa Lezione risulta che dovrà essere, chiamando φ la lunghezza della fune che abbraccia il subbio, $t = T e^{\frac{f\varphi}{b}}$ perchè l'attrito del subbio colla fune fa sul punto di far muovere questa, e che, chiamando φ' la lunghezza della fune che abbraccia la ruota, dovrà essere $T = t e^{\frac{f'\varphi'}{a}}$ perchè l'attrito della fune colla ruota fa sul punto di far muovere questa, ora da queste equazioni ricavasi una equazione identica in φ, φ', ciò dimostra, che quando la ruota ed il subbio sono della stessa sostanza e il subbio sarà tal punto di far muover la fune, la tensione di questa sarà anche tal punto di

per muover la ruota. Se dunque sostituiamo nelle equazioni (1), (2) in vece di t il suo valore conveniente $T\varepsilon^{\frac{f'\varphi}{b}}$ avremo due equazioni, fra le quali eliminando T avremo l'equazione dello stato prossimo al moto della macchina, quando P sta per vincere Q, e le sostituiamo nelle equazioni (3), (4) in vece di t il suo valore conveniente $T\varepsilon^{-\frac{f'\varphi}{b}}$ avremo due equazioni, che ci daranno ~~fatta~~ l'eliminazione di T l'equazione dello stato prossimo al moto della Macchina quando Q sta per vincere P.

Vorrete la Macchina quando le due ruote sono molto lontane e che si richiedono delle tenzioni grandissime per la trasmissione del movimento si usa invece di una fune una correggia di cuoio o una catena in cui vi sono dei fori nei quali vengano successivamente ad introdursi dei piccoli o denti piantati distribuiti uniformemente nel subbio e nella ruota ovvero si sostituisce alla fune una correggia la quale porta nella sua lunghezza dei piccoli i quali vanno insinuandosi successivamente in piccole cavità praticate nelle due circonferenze.

Quando le ruote sono vicine si evita l'uso e della fune e della correggia e della catena ponendo a contatto il subbio e la ruota in modo che si premano alquanto, allora l'attrito stesso, se sarà piuttosto grande, servirà a trasmettere il movimento; se poi l'attrito non è bastante si praticano dei denti nel subbio e nella ruota delle cavità capaci di ricevere tali denti.



Quando il subbio e la ruota sono semplicemente a contatto, a, a' essendo i raggi delle ruote, b, b' i raggi dei subbii, l'equazione dello stato prossimo al moto tenendo conto del solo attrito

fra il 1° subbio e la 2ª ruota è $\frac{P}{Q} = \frac{bb'}{aa'}$.

Infatti l'attrito rispetto al 1° subbio opera dall'alto al basso, rispetto alla 2ª ruota opera dal basso all'alto, di modoche per la 1ª ruota col suo subbio chiamando P_1 l'attrito, l'equazione dellotato prossimo al moto è $\frac{P}{P_1} = \frac{b}{a}$, per la 2ª ruota col 1° subbio l'equazione è $\frac{P_1}{Q} = \frac{b'}{a'}$; moltiplicando queste due equazioni tra di loro abbiamo $\frac{P}{Q} = \frac{bb'}{aa'}$.

Facile sarebbe il tener conto delle altre resistenze.

Quando il 1° subbio è munito di denti, evidentemente perché i denti s'introducano uno dopo l'altro nelle cavità della 2ª ruota, il numero dei denti nel subbio ed il numero delle cavità nella ruota dovranno essere proporzionali ai rispettivi raggi; inoltre gli spazii descritti dal subbio e dalla ruota in tempi eguali essendo eguali ne segue che le loro velocità angolari sono in ragione inversa dei loro raggi; quindi si può sciogliere così bel problema.

Determinare i raggi da darsi ~~alle ruote~~ a due ruote una munita di denti, l'altra di cavità capaci di riceverli perchè la 1ª faccia un giro mentre la 2ª ne fa m; sieno r, r' i raggi incogniti, sia data la distanza d dei centri delle ruote, per determinare r, r' avremo le equazioni $r + r' = d$, $nr = mr'$, donde ricavasi

$r = \frac{md}{m+n}$, $r' = \frac{nd}{m+n}$.

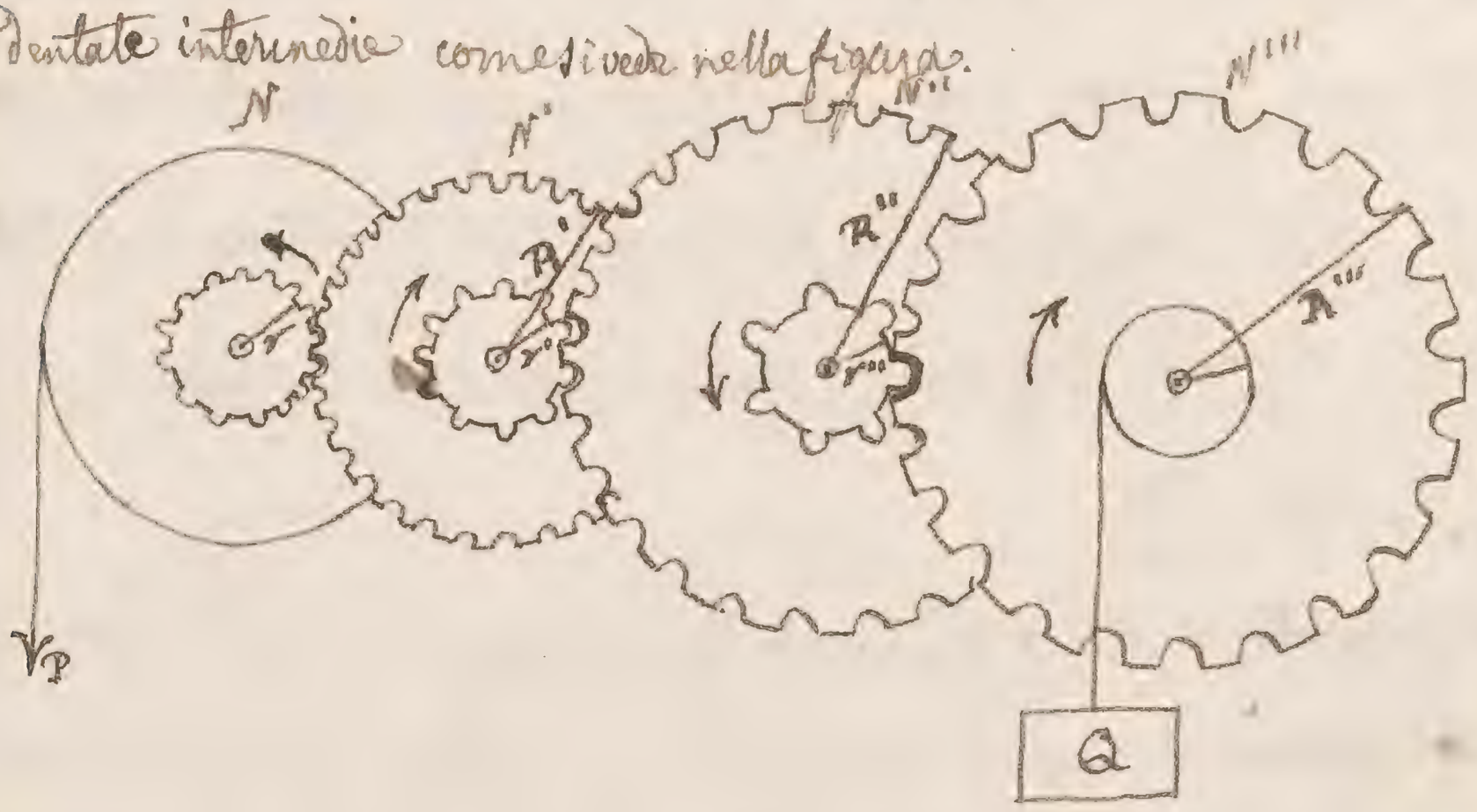
Nello stesso problema sia a l'intervallo fra gli assi di due denti consecutivi, e vogliasi conoscere il numero dei denti della 1ª ruota, e il numero delle cavità della 2ª, chiamando μ, ν questi numeri avremo per determinarli le relazioni $\mu : \nu :: m : n$, $\mu a = 2\pi r$, donde ricavasi $\mu = \frac{2\pi r}{a}$, $\nu = \frac{n}{m} \cdot \frac{2\pi r}{a} = \frac{2\pi r'}{a}$.

Cercando così i numeri m, m' arriverà quasi sempre di trovare per ~~M, N~~ dei numeri fra-
-zionarii ; ficcome conviene per la simmetria e facilità di sistemi che gli ingegneri
fieno interi bisognerà perciò in ciascun caso dovendo ~~a~~ un valore conveniente ~~che~~ che
renda M, N interi, e ad a non solo, ma anche bisognerà secondo i casi modificare le ipote-
m, n oppure d, poichè non sempre vi sarà un valor di a che soddisfi per le alle dette con-
-dizioni. a si chiama il passo dell'ingranamento.

Un sistema di due ruote od ambe dentate od una dentata l'altra no, la ruota più grande dicesi
semplicemente ruota, la ruota più piccola dicesi rocchetto.

Quando le ruote non sono ambe dentate ordinariamente la forma della ruota non dentata si
scosta alquanto da quella della ruota, essa consta allora di due dischi circolari paralleli nelle
cui circonferenze sono infitti a distanze eguali dei cilindretti, e dicesi lanterna. Nella lan-
-terna i vuoti che si trovano fra i cilindretti rappresentano ciò che abbiam detto le cavità.

Se le ruote a cui sono attaccate la potenza ed il peso sono lontane si impiegano delle ruote
dentate intermedie come si vede nella figura.



In un tal sistema di ruote dentate, se chiamiamo N, N', N''... i numeri dei denti che ciascuna ruota (fra cinquate tempo) R, R', R''... i raggi, detti rispettivamente r, r', r''... i raggi delle ruote, dovrà aversi

$$N : N' :: R' : r$$
$$N' : N'' :: R'' : r'$$
$$N'' : N''' :: R''' : r''$$
$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

essere, moltiplicando queste proporzioni fra loro

$$N N' N'' \text{---} N_{m-1} : N' N'' N''' \text{---} N_m :: R' R'' R''' \text{---} : r r' r'' \text{---},$$

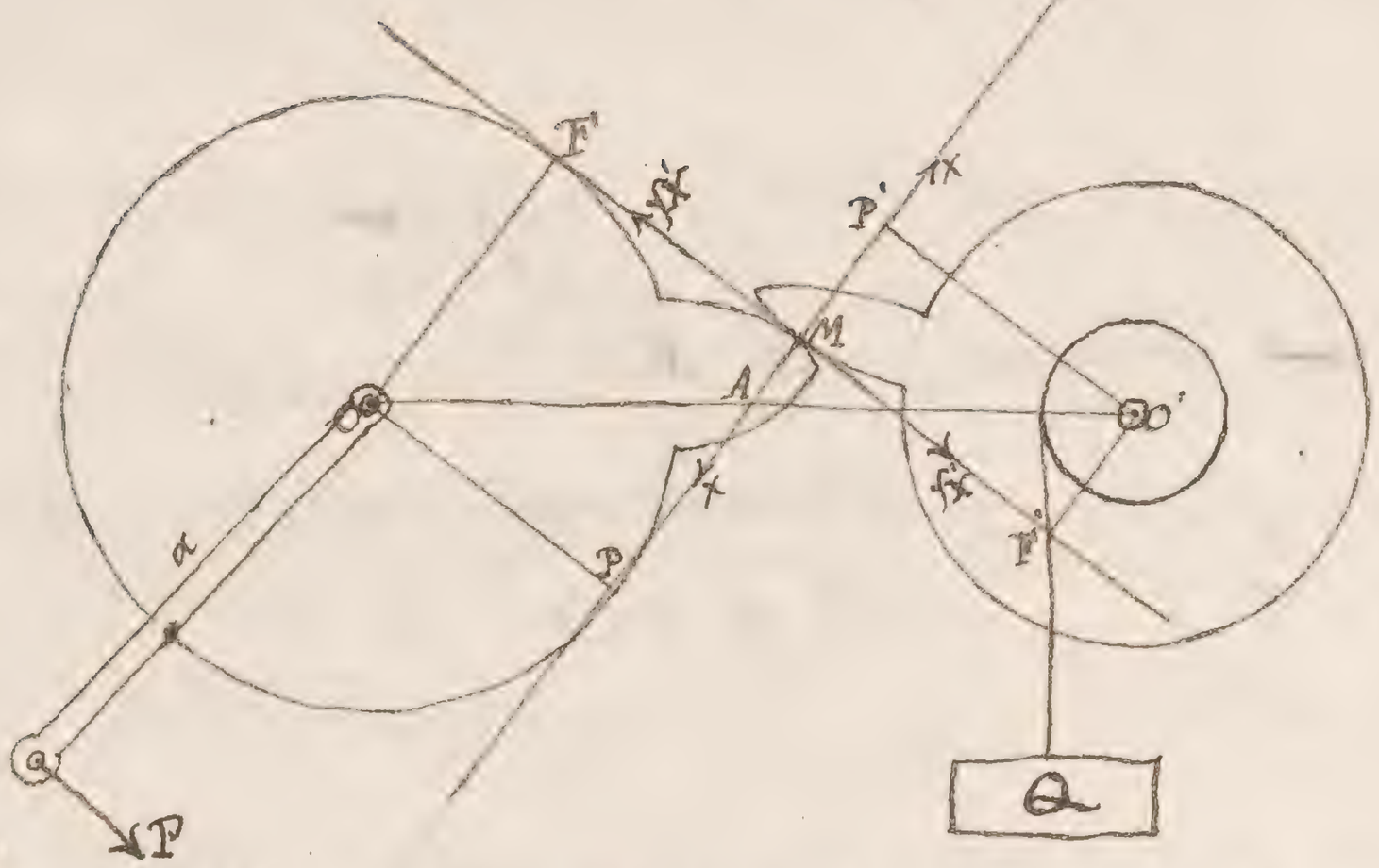
ossia $N : N_m :: R' R'' R''' \text{---} : r r' r'' \text{---}$, segue

il numero delle ruote, ed N_m essendo il numero dei denti fatti dalla ruota che solleva immediatamente il peso.

Per la buona esecuzione e proporzione degli ingranamenti conviene che il rocchetto abbia almeno venti denti salvi i casi eccezionali in cui si è obbligato di adottarne un numero minore, non potrà però mai questo numero essere minore di sei.

Resta da determinarsi la forma dei denti. Un fine generale che ci proponiamo in questi tutte le macchine è che esse si muovano uniformemente, ora della determinazione delle forme dei denti perchè questa condizione sia soddisfatta fa interamente suo scopo la Geometria descrittiva. ecco non entreremo in queste Considerazioni ma solo ci atterremo sopra alcune condizioni o necessarie od essenziali che in cui ingranamento si devono trovare qualunque sia la loro Composizione. alcune di queste condizioni le abbiamo già esposte, ne resta una generale, che ora esporremo.

Siano O, O' due ruote dentate, di cui due denti sono a contatto in M; immaginiamo in questo punto la normale e sia P il punto in cui essa incontra la linea dei centri OO'. Dai Centri O, O' abbassiamo due perpendicolari OP, $O'P'$ sulla retta normale,



facciamo quindi muovere queste due ruote per un'istante dt, un raggio segnato su ciascuna descriverà nella prima un'arco dθ nella seconda un'arco dφ, dθ e dφ essendo contati tutti e due sopra una circonferenza di raggio 1. Ora per un'intervallo dt di più sensibilmente supporre che i due denti si trasportino parallelamente a se stessi in modo che il punto di contatto restando sempre il medesimo la normale sia come immobile; allora i due punti P, P' riguardati come mobili descriveranno due spazii che si possono considerare presi tutti due sulla normale, ed eguali rigorosamente. Il primo spazio essendo $\overline{OP}.d\theta$, il secondo $\overline{O'P'}.d\varphi$ sarà dunque $\overline{OP}\,d\theta = \overline{O'P'}.d\varphi$, ossia $\overline{OP}.\frac{d\theta}{dt} = \overline{O'P'}.\frac{d\varphi}{dt}$; ma $\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$ sono le due velocità angolari che noi ~~chiamiamo~~ chiamiamo ω, ω', dunque $\overline{OP}.\omega = \overline{O'P'}.\omega'$, ossia $\frac{OP}{O'P'} = \frac{\omega'}{\omega}$, ma è condizione inerente ad ogni sistema di ruote dentate che il rapporto delle velocità angolari sia costante, come già abbiamo detto, dunque $\frac{OP}{O'P'}$ deve essere costante; ora per la similitudine dei triangoli OAP, O'P'A abbiamo $\frac{OP}{O'P'} = \frac{OA}{O'A}$, dunque $\frac{OA}{O'A}$ deve essere costante, ossia devono essere costanti OA, O'A poichè OO' è costante, quindi concludiamo, che in un sistema qualunque di due ruote dentate la normale comunque eretta nel punto di contatto di due denti va sempre a passare pel medesimo punto della linea ~~dei~~ dei centri delle ruote.

abbiamo inoltre $OA : O'A :: \omega' : \omega$, il punto d'incontro della normale ai denti colla linea dei centri è dunque tale che divide la retta OO' in parti inversamente proporzionali alle velocità angolari, perciò se coi raggi OA, $O'A$ descriviamo due ruote, queste si trasmettono il movimento come se non vi fosse che l'attrito, che le facesse muovere; i due circoli di raggi OA, $O'A$ diconsi i Circoli primitivi.

Condizioni d'equilibrio di un sistema di ruote dentate

Sia a il braccio della potenza P, b' il braccio del peso Q, chiamiamo X la pressione di un dente contro l'altro, sarà fX l'attrito di un dente contro l'altro, il quale sarà per la 1ª ruota diretto da sinistra verso destra, per la 2ª da ~~sinistra~~ destra verso ~~destra~~ sinistra, epperciò le condizioni d'equilibrio non tenendo conto degli altri attriti saranno

$$\left.\begin{aligned} Pa &= X \cdot OP + fX \cdot OF \\ Qb' &= X \cdot O'P' \mp fX \cdot O'F' \end{aligned}\right\}$$

quando la potenza sia per vincere il peso Q; per avere la condizioni d'equilibrio nel caso contrario basta nelle equazioni mutare f' in $-f'$, poichè allora rispetto ad ambe le ruote esso si gerata da destra verso sinistra. L'equazioni dello stato progiuno al moto è dunque $\frac{P}{Q} = \frac{b'}{a} \cdot \frac{OP \pm f' \cdot OF}{O'P' \mp f' \cdot O'F'}$.

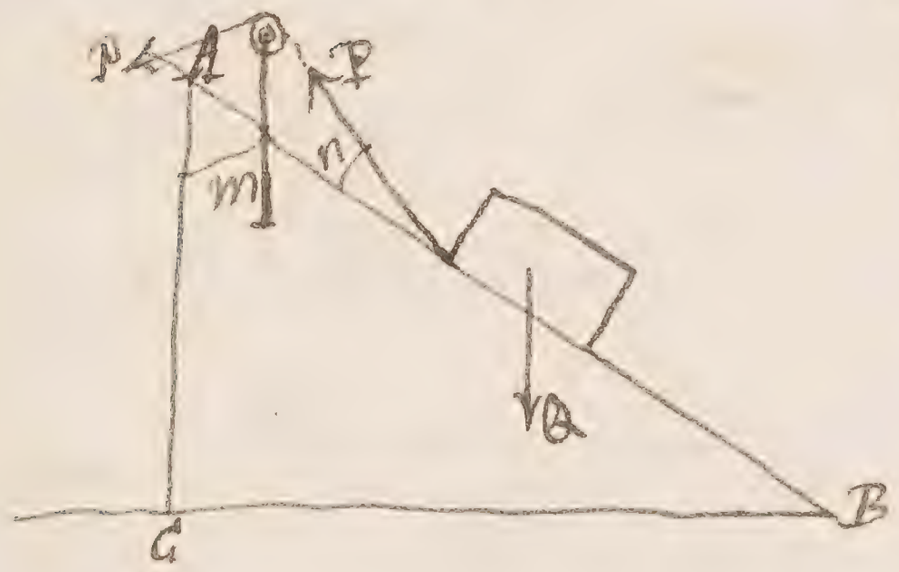
In ciascun caso OP, $O'P'$, OF, $O'F'$ son facili a calcolarsi.

Per tener conto degli altri attriti basta accrescere in una certa ragione i diametri dei rocchetti, moltiplicando questi per un certo fattore dipendente dalla forma dell'incastro, dal valore dell'attrito, e dall'angolo che ciascun dente fa percorrere alla ruota avversa prima di uscir di giuoco.

Se le ruote sono in numero maggiore di due, la ragione d'equilibrio $\frac{P}{Q}$ si ha facendo il prodotto delle ragioni d'equilibrio parziali.

Resta che trattiamo delle Macchine di moto progressivo.

Piano inclinato.



Sia m l'angolo del piano colla verticale, n l'angolo che la direzione della potenza fa col piano, la condizione d'equilibrio non tenendo conto dell'attrito sarà $P\cos n = Q\cos m$, e la pressione sul piano sarà $Q\operatorname{sen} m - P\cos n$; Dall'equazione d'equilibrio risulta $P:Q :: \cos m : \cos n$ e se $n=0$ allora $P:Q :: \cos m : 1 :: AC : AB$, Dunque nel piano inclinato la potenza è il peso è ritenuto da una potenza parallela al piano, la potenza sta alla resistenza come l'altezza alla lunghezza del piano;

se $n = 90° - m$ allora $P:Q :: \cos m : \operatorname{sen} m :: AC : BC$, Dunque nel piano inclinato la potenza è orizzontale, la potenza sta alla resistenza come l'altezza alla base del piano.

Introducendo l'attrito la condizione d'equilibrio sarà

$$P\cos n - Q\cos m = \pm f'(Q\operatorname{sen} m - P\cos n)$$

secondoche vorremo sollevare il peso, o semplicemente non lasciarlo cadere; da questa equazione ricaviamo

$$P = Q \cdot \frac{1 \pm f \operatorname{tang} m}{1 \pm f' \operatorname{tang} n} \cdot \frac{\cos m}{\cos n}.$$

Quando non si tien conto dell'attrito e si vuole impiegare il minimum di potenza per sollevare il peso deve essere $n=0$; Quando invece si tien conto dell'attrito deve essere $\operatorname{tang} n = \pm f'$.

L'attrito di 2ª specie è molto minore di quello della 1ª specie, ciò pure l'attrito di 2ª specie la si esercita con braccio di leva molto piccolo, quindi si scorge il vantaggio che ha la potenza per sollevare il peso se questo sia portato da ruote.

Se la potenza Strascini il peso sul piano inclinato mediante una fune che passa per una troclea fissa, chiamando a, r i raggi della troclea e delle ruote, θ l'angolo, che alla troclea fanno la potenza e la resistenza dirette secondo i due tratti di fune la condizione d'equilibrio sarà

$$Pa = Q\,\frac{\cos m + f\operatorname{sen} m}{\cos n + f'\operatorname{sen} n}\,a(1+\gamma) + f''' r \sqrt{P^2 + Q^2\left(\frac{\cos m + f\operatorname{sen} m}{\cos n + f'\operatorname{sen} n}\right)^2 + 2PQ\cos\theta}\cdot\frac{\cos u + f'\operatorname{sen} u}{\cos n + f'\operatorname{sen} n}$$

se la potenza sta per sollevare il peso. Nel caso contrario la condizione d'equilibrio sarà

$$Q\,\frac{\cos m + f\operatorname{sen} m}{\cos n + f'\operatorname{sen} n}\,a = Pa(1+\gamma) + f''' r \sqrt{P^2 + Q^2\left(\frac{\cos m + f\operatorname{sen} m}{\cos n + f'\operatorname{sen} n}\right)^2 + 2PQ\cos\theta}\cdot\frac{\cos u + f'\operatorname{sen} u}{\cos n + f'\operatorname{sen} n}$$

Lezione 66ª ed Ultima.

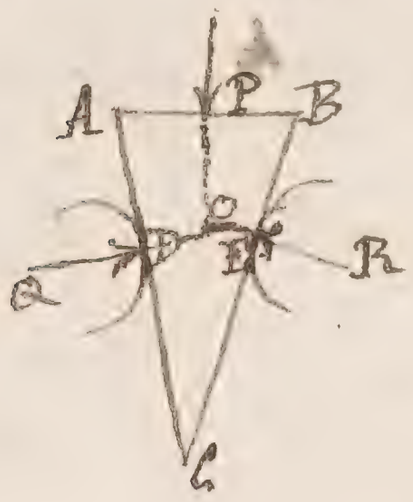
Cuneo.

Per disgiungere l'uno dall'altro violentemente due corpi si fa uso del cuneo.

Il cuneo è un prisma triangolare di cui un'angolo diedro è molto più aguzzo degli altri; quest'angolo dicesi taglio del cuneo, la faccia che gli è opposta dicesi testa del cuneo, le facce che toccano i corpi da disgiungersi diconsi facce del cuneo.

Per disgiungere i due corpi si pone ad esempio la testa del cuneo, determiniamo quali siano le ragioni che passano tra la pressione o la percossa esercitata sulla testa del cuneo e le pressioni o le percosse che si trasmettono alle facce, perchè la

potenza sia sul punto di sospingere il cuneo.



In questa macchina tre sono le forze da considerarsi. la potenza P normale alla testa del cuneo, e le resistenze dei corpi opposte alla potenza che tende a disgiungerli eguali si esercitano in direzione normale alle facce del cuneo. e non tenendo conto degli attriti la 1ª cond.e perchè P.Q.R si facciano equilibrio è che le tre forze P.Q.R siano in uno stesso piano normale agli spigoli del cuneo, la 2ª è che una delle forze sia eguale ed opposta direttamente alla risultante delle altre e quindi che le direzioni si incontrino in uno stesso punto, e sia

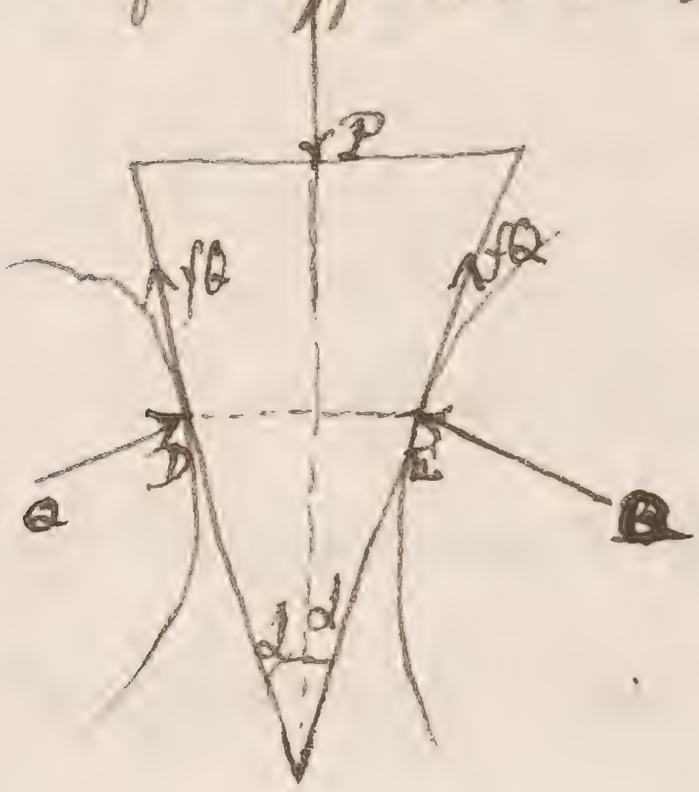
P:Q:R :: sen QOR : sen POR : sen POQ, ma le forze essendo normali alle facce abbiamo che QOR = 180° - C, POR = 180° - B, POQ = 180° - A, mentre

sen C : sen B : sen A :: AB : AC : BC, dunque

P:Q:R :: AB : AC : BC, quindi concludiamo che nel cuneo ottenuta fatta dagli attriti le condizioni d'equilibrio sono tre.

Se il cuneo isoscele, cioè se AC = BC, allora Q = R e P:Q :: AB : AC. Quindi si vede che quanto più i lati sono acuti tanto minore deve essere la potenza per sospingere il cuneo. Invece di una sola resistenza applicata a ciascuna faccia se ve ne fossero più sarebbe la risultante di queste forze le forze Q, R.

Avendo conto degli attriti supponiamo che il cuneo sia isoscele che si introduca in un corpo omogeneo, che i punti di contatto siano simmetricamente disposti, che la Potenza sia applicata nel mezzo della testa.



Sia f il coefficiente dell'attrito tra il corpo e le facce del cuneo, sia α l'angolo che la direzione di P fa colle facce del cuneo, sarà fQ il valore dell'attrito, e la condizione perchè la potenza P sia sul punto di spingere il cuneo sarà

$$\begin{cases} P = 2fQ\cos\alpha + 2Q\operatorname{sen}\alpha \\ [redacted] \end{cases}$$

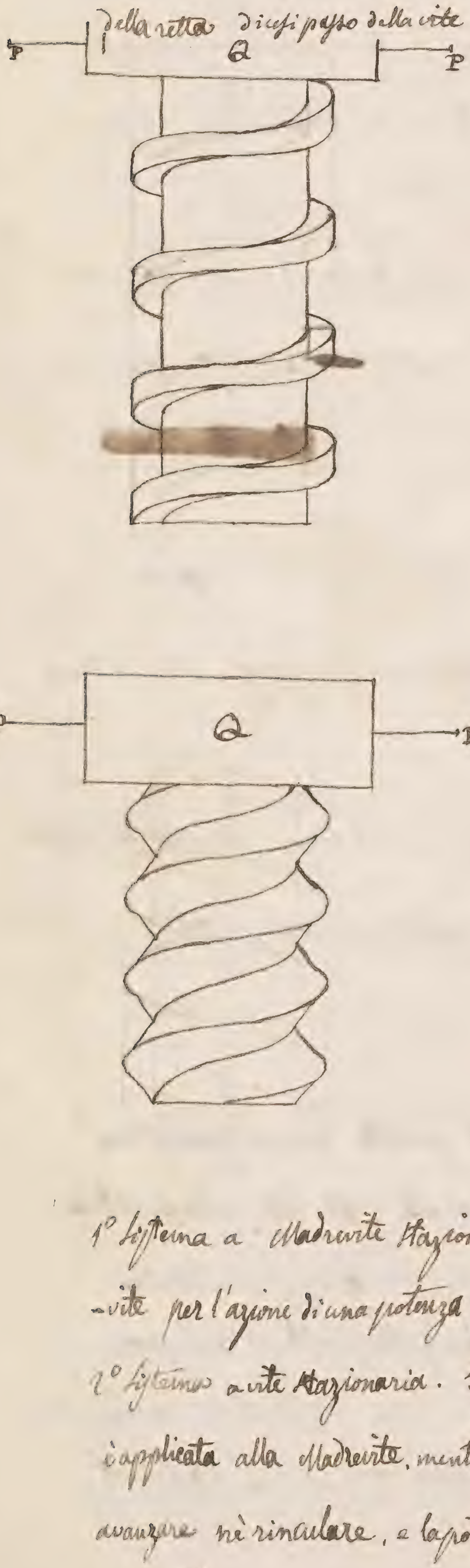
[redacted] questa equazione basti, che, perchè P sia un minimum deve essere $\cot\alpha = f$.

Perchè la potenza P sia semplicemente bastante ad impedire il regresso del cuneo deve essere $P = 2Q(\operatorname{sen}\alpha - f\cos\alpha)$; allora se $\operatorname{tang}\alpha = f$ abbiamo $P = 0$, se $\operatorname{tang}\alpha < f$ abbiamo P negativa, dunque quando $\operatorname{tang}\alpha = f$ il cuneo resta immobile tra i due corpi nè viene da questi cacciato fuori e sta senza che adesso sia applicata veruna potenza, e quando $\operatorname{tang}\alpha < f$ ci vuole una forza per potere estrarre.

Vite.

La vite è un cilindro retto guernito di un risalto generato da una figura piana nel cui perimetro trovasi una parte retta; applicata questa retta sulla generatrice del cilindro con una estremità in un punto di una elica segnata sul cilindro e disposta l'area nel piano meridiano condotto per questa generatrice di fa girare il piano meridiano intorno all'asse del cilindro e l'area in questo piano in modo che [redacted] sia sempre [redacted] sulla medesima elica, e si ha così il risalto.

Il rilatto dicesi pano o verme della vite, il passo delle eliche generate dai due estremi della retta dicesi passo della vite.



Le viti più comuni sono quelle di pane quadrato che per lo più sono metalliche e le viti di pane triangolare e queste sono le viti di legno, e si fanno ordinariamente in modo che le eliche sul cilindro si legnano ad una distanza eguale alla metà del passo.

La vite si aggira in un cilindro cavo detto Chiocciola della vite, o Madrevite avente un'incavo che corrisponde perfettamente al pane della vite.

Dopo che la vite s'introduce nella Madrevite si attraversa quella con caviglie alle cui estremità si attacca la potenza P oppure legnata alla vite una testa quadrata con una chiave che porta un vuoto quadrato della medesima dimensione di quella di detta testa, e bisogna quindi la potenza all'estremità di detta chiave.

Ciò posto si possono formare due sistemi di viti combinate colle madreviti.

1° sistema a Madrevite Stazionaria. In questo sistema la vite è obbligata a girare nella madrevite per l'azione di una potenza applicata ad una estremità della vite nel modo sovr'indicato.

1° sistema a vite Stazionaria. In questo sistema o la vite è assolutamente fissa e la potenza è applicata alla Madrevite, mentre questa porta il peso sulla testa, o la vite è obbligata a girare senza avanzare nè rinculare, e la potenza è applicata alla madrevite, mentre la resistenza è applicata alla madrevite.

In ambi questi sistemi per l'equilibrio deve stare la potenza al peso come il passo della vite alla periferia orizzontale che la potenza tende a descrivere. Imperciò sia h il passo della vite, sia a il braccio della potenza, b il raggio del cilindro circoscritto alla vite, e sostituiamo alla potenza P una forza x che operi tangenzialmente al detto cilindro circoscritto, sarà $xb = Pa$, ora ciascuno sviluppando questo cilindro su di un piano verticale il piano prende la forma di un piano inclinato e la madrevite di un peso posto su questo piano, ne segue che x non è altro che una potenza orizzontale che sostiene il peso Q mentre che esso tende a discendere per un piano inclinato la cui altezza è h e base $2\pi b$, che quindi per l'equilibrio deve essere $x : Q :: h : 2\pi b$, ossia $\frac{Pa}{b} : Q :: h : 2\pi b$, dunque $P = \frac{Qh}{2\pi a}$, ossia $P : Q :: h : 2\pi a$.

Se la potenza non è applicata ad un solo braccio di leva ma è compartita in due tre o quattro secondochè si adoprano due tre o quattro manivelle per far girare la vite o la madrevite, si sostituirà a dette potenze una sola potenza tangenziale al cilindro circoscritto ed il cui momento sia eguale alla somma dei loro momenti, e si cadrà nel caso di una sola potenza.

Vediamo ora dell'attrito, l'effetto dell'attrito varia col variare della forma della vite; noi considereremo soltanto la vite di filo quadrato.

Avremo pel piano inclinato $P = Q \frac{\cos m \pm f \operatorname{sen} m}{\cos n \pm f \operatorname{sen} n}$, nel nostro caso $\operatorname{Tang} m = \frac{2\pi b}{h}$, $n = 90° - m$, $P = \frac{Pa}{b}$, $Q = Q$, dunque $P = Q \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{h \pm 2f\pi b}{2\pi b \pm fh}$.

FINE.

Tavola delle materie contenute nelle Lezioni di Meccanica.

Protegomeni

Lezione 1ª Definizioni della materia, del corpo, del volume, della superficie, del moto, del riposo ——— pag.ª 1.

Distinzione del moto in assoluto e relativo, in natura non vi ha moto assoluto; distinzione della quiete in assoluta e relativa.

Definizione del punto. ——— 2.

Cose da considerarsi nel moto di un punto, traiettoria di un punto. Orbita di un punto. Moto dei corpi progressivo rettilineo o curvilineo.

Moto rotatorio attorno ad un asse, attorno ad un punto. ——— 3.

Definizione della velocità. La velocità è direttamente proporzionale agli spazii, ed inversamente ai tempi. Misura della velocità. ——— 4.

Dati gli spazii percorsi da due corpi in due tempi dati trovare il rapporto delle loro velocità. Unità di velocità.

Lez.ª 2ª - Moto accelerato - ——— 5.

Moto ritardato. Condizione di continuità nell'accelerazione, e ritardo. 6.

Proprietà particolari dei corpi. Proprietà generali. Distinzione di queste in essenziali, e non essenziali. Proprietà essenziali sono l'estensione, l'impenetrabilità e l'inerzia. ——— 7.

Dimostrazione della legge d'inerzia. 8.

Forze. Diverse classi di forze. Come si considerino nella Meccanica. 9.

Impulsi. Forze motrici, e loro proprietà. Cosa sia equilibrio, quando esso abbia luogo; esso differisce dalla quiete. 10.

L. 3ª - Non havvi realmente l'impulso. Intensità delle forze; sono proporzionali alle velocità impresse ad uno stesso corpo. Misura delle forze costanti. Forze variabili - 11.

Effetto delle forze variabili. Misura di esse forze; rapporto che la esprime detta forza accelerazione o ritardazione. 12.

della massa di un corpo. È proporzionale alla forza. Le forze sono
proporzionali ai prodotti delle velocità per le masse. Misura delle
forze avuto riguardo alle masse, ossia misura di una forza applicata
L.a 4.a ad un corpo qualunque. Unità di forza. ——— pag.a 13.
Misura degli angoli. Estensioni di misure di forze. 14–18.
Quanto degli angoli; si suppone uguale la stessa. Quantità di moto.
Due specie di angoli. Eguaglianza di confronto di angoli. 16.
Pressione, tensione, e loro effetti; come sono prodotte, son proporz-
-zionali alle forze; quindi un nuovo metodo per misurar le forze. 17–18.
Corpi Geometrici. Oggetto della Geometria. Moto Geometrico. 19.
L.a 5.a Meccanismo. Definizione della Meccanica. Si divide in
Statica e Dinamica. ——— 20.
Diversi stati dei corpi. Atomi, molecole. Composizione delle
molecole. Cos'è la affinità chimica dall'agglomerazione molecolare.
Definizioni dei corpi solidi, dei corpi liquidi, e dei fluidi aeriformi.
Proprietà distinguenti tali stati dei corpi 21–23.
Differenza tra i vapori e gas. Divisione della Meccanica
in Meccanica propriamente detta, Idraulica e Pneumatica. 24.
Esposizione del vecchio sistema di pesi e misure del Piemonte. 25.
L.a 6.a Vantaggi del nuovo sistema metrico decimale. Esposizione di
questo sistema. Ragioni tra le misure di pesi dei due sistemi. 26–31.

Statica -

$\int^{a}_{-}$ 1ª Intensità delle forze, desunta dalla pressione sui corpi. Punto d'applicazione della forza; come si rappresenta in disegno; come si determina con numeri. Coordinate rettangole, polari; due sistemi di queste -- pag.ª 32 – 36.

Convenzioni necessarie per la compiuta determinazione di un punto. Formole di passaggio dal sistema rettangolo a ciascuno dei sistemi polari.

Come si determina numericamente la direzione di una forza; convenzioni perciò necessarie. - - -

Nel parallelogramma delle forze ciascuna forza è direttamente proporzionale al seno dell'angolo compreso tra le altre due. Composizione di più forze applicate ad uno stesso punto. Soluzione grafica di questo problema. Teorema, che guida a redarre, di Geometria. . . . . pag.ª 47–49.

Parallelepipedo delle forze. Risolvere una forza data in due, in tre forze, che facciano con essa angoli dati, e che siano tra di loro perpendic.ri 50.

Teorema. Del sistema di tre forze due componenti, e una risultante, due forze sono inversamente proporzionali alle perpendicolari abbassate sopra le loro direzioni da un punto preso ad arbitrio sulla terza forza. 51.

Lezione 10.ª Come si debba interpretare il caso di una forza applicata all'infinito. Soluzione analitica del problema della Composizione di più forze applicate ad uno stesso punto. . . . . 52–56.

Sostituire ad un dato sistema di forze un'altro sistema di un dato numero di forze, che sia equivalente al primo; soluzione grafica. 56–57.

Soluzione analitica di un caso particolare di questo problema, il qual caso è – Date due forze applicate ad uno stesso punto di una curva, e operanti secondo gli assi delle coordinate, sostituirne altre due, di cui una agisca nel senso della tangente, l'altra nel senso della normale alla curva.

Lezione 11.ª Soluzione del problema inverso a quest'ultimo; applicazione al caso, in cui la curva sia una parabola. . . . . 57–60.

Composizione di più forze convergenti tra di loro, ma non applicate allo stesso punto. — — — — — — — — — 61.

Composizione di due forze parallele volte nello stesso senso od in senso contrario. . . . . 62–64.

L.ª 12.ª Soluzione dello stesso problema in un modo elementare. 65.–67.

Teorema. Se si hanno 3 forze, due componenti ad una risultante, applicate ad una verga rigida, ciascuna di esse è proporzionale alla distanza tra i punti d'applicazione delle altre due. — — — — — pag.a 67.

Due forze eguali, parallele, contrarie e non opposte, non hanno risultante. 68.

Lez.e 13.a Cosa sia una coppia. Intensità della coppia. Braccio della coppia. 69.

Composizione di un numero qualunque di forze parallele. Soluzione grafica.

Scomposizione di una forza data in due parallele, diversi casi. 70–71.

Dati su di un piano quattro punti, ed una forza applicata ad uno di essi, scomporre tal forza in tre ad essa parallele applicate negli altri tre punti dati.

Teorema d'Eulero, dal quale si ha che [redacted] ciascuna delle quattro forze, 3 componenti ad una risultante, è proporzionale all'area del triangolo formato unendo i punti d'applicazione delle altre tre. — — — — — 72–75.

Se i 3 punti d'applicazione delle 3 Componenti sono in linea retta il problema è indeterminato, come pure se si chiedesse di scomporre la forza data in più di 3 forze. — — — — — 76.

Lez.e 14.a Soluzione analitica del problema della Composizione di un numero qualunque di forze parallele. Centro delle forze parallele; non varia col variare della direzione delle forze; modo di determinarlo sperimentalmente; formole analitiche, che ne danno le coordinate; Esame dei diversi casi, che possono avvenire nella ricerca di tal centro. — — — — — — 77–81.

Lez.e 15.a Momento di una forza rispetto ad un piano. — — — — — — 81.

Teorema. I tre momenti della risultante di un sistema di forze parallele rispetto ai 3 piani coordinati sono eguali alle somme Algebriche dei momenti delle Componenti rispetto agli stessi piani. 82.

Ogni problema di Composizione, o Scomposizione di forze parallele è indeterminato, se contiene più di tre incognite.

Dimostrazione analitica, che il problema di scomporre una forza data in tre, i cui punti d'applicazione siano in linea retta è indeterminato. 83.

Significamente il problema della scomposizione d'una forza in un numero qualunque di forze parallele è determinato; ragione di questa contraddizione trai risultati dell'analisi, e l'esperienza. . . . . pag.a 84.

Lez.e 16.a

Ogni corpo pesante può riguardarsi come un sistema di forze parallele. 85.
Cosa sia densità. Due modi di misurarla. Corpi omogenei, eterogenei; in questi ultimi la densità è funzione delle coordinate dei suoi punti. 86–88.
Data tale funzione, e le dimensioni di un corpo trovarne la massa; questo problema si risolve col calcolo Integrale. Esempii. 89–91.

Lez.e 17.a

I pesi son proporzionali alle masse; dimostrazioni sperimentali di questo principio. Forza di gravità. Centro di gravità di un corpo, di un sistema di più corpi. La Gravità, come essendo essa conosciuta dal peso assoluto si determini la massa di un corpo. 91–93.
Peso specifico: come lo definiscano i Meccanici, e come i Fisici. Secondo: primi si ha dividendo il peso assoluto del corpo per il suo volume; oppure moltiplicando la gravità per la densità; secondo maniera di fisici di considerare la densità, e il peso specifico dell'un corpo, lo stesso numero esprime l'una e l'altro; secondo che noi li consideriamo i pesi specifici son proporzionali alle densità. Vantaggi del sistema decimale per passare dal peso specifico di un corpo nel senso Meccanico al peso specifico di esso nel senso Fisico, e vic.a 94–96.

Lez.e 18.a

Peso specifico costante nei corpi omogenei, negli eterogenei il peso specifico è funzione delle coordinate dei suoi punti; data questa funzione e le dimensioni di un corpo trovarne la massa. 96.
Centro di gravità di un sistema di più corpi. Esempii. Centro di massa. Centro d'

Lez.e 19.a

inerzia. Centro di volume dei corpi omogenei; coincide col centro di figura nei corpi regolari. 97–101.
Cosa s'intenda per centro di gravità di una superficie, di una linea. Centro di gravità di un sistema di superficie; di linee. Centro di gravità di una superficie qualunque, di una linea qualunque; mezzo generale per trovarlo. 101–102.
Figura simmetrica rispetto ad un piano, ad una linea, ad un punto.
Teorema, Ogni figura simmetrica rispetto ad un piano, ad una linea, ad un punto ha il suo centro di gravità in quel piano, in quella linea, in quel punto. 103.

Centro di gravità di un triangolo; di un quadrilatero; di un poligono qualunque.
Centro di gravità del perimetro di un triangolo; di un poligono qualunque. 104–106.
Lezione 20ª Centro di gravità di una piramide triangolare; 107.
di una piramide qualunque; di un cono qualunque; di un poliedro qualunque. 108–109.
Lez. 21ª Centro di gravità di un'arco circolare; di un settore circolare; di un segmento circolare. 109–112.
Centro di gravità di una calotta sferica; di una zona sferica a basi parallele. 112.
di un settore sferico; di un segmento sferico; di un trapezio a basi parallele; 113–114.
di un cono tronco a basi parallele. 115–116.
Lez. 22ª. Formole generali per avere il centro di gravità di un corpo qualunque; di un 117.
Lez. 23ª. arco di curva qualunque; di un'area piana qualunque. dei segmenti
ellittico, iperbolico e parabolico; delle superficie e dei solidi di rivoluzione. 118–124.
della superficie di un cono tronco a basi parallele; dei segmenti di
ellissoide; di iperboloide di rivoluzione; di un settore compreso da piani
meridiani; di una porzione di superficie qualunque; di un 125–130.
solido qualunque;
Lez. 24ª. Centro di gravità di una porzione di superficie sferica.
Proprietà delle superficie sferiche, dei cilindri circolari, delle 131–133.
superficie anali.
Centro di gravità dei corpi eterogenei, come si semplificano i calcoli
riferendo alcune volta i corpi a coordinate polari. 134–135.
Centro di gravità di un corpo, di cui non si ha la legge di formazione, 135.
Lezione 25ª. di un'area piana; metodo dei trapezii; degli archi parabolici.
Formola per la cubatura di un corpo, di cui non è data la legge di formazione 136–143.
Lez. 26ª. Regole centrobariche od di Goldino. 143–151.
Lez. 27ª. Condizione d'equilibrio di più forze applicate ad un punto libero 152–153.
Lez. 28ª. Teoremi di Leibnitz, di Varignon. Condizione d'equilibrio di più
forze applicate ad un punto ritenuto da vincoli materiali, costretto a 153–156.
Lez. 29ª. stare sopra una superficie, sopra una curva. 159–161.

Lez.ª - 30.ª Condizione d'equilibrio di un sistema rigido volubile intorno ad un'asse fisso. Momento di una forza rispetto ad un punto. 161–164.

Il momento rispetto ad un punto ~~di più forze~~ della risultante di più forze poste in uno stesso piano contenente il punto, è eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti rispetto allo stesso punto. Formola, che guida ne rigetta, per cui date le componenti, si ha tosto il momento della risultante. 164–166.

Lez.ª 31.ª Due forze si fanno equilibrio intorno ad un'asse, se i loro momenti di rotazione rispetto a quell'asse sono eguali e di segno contrario. 166–169.

Momenti di rotazione di una forza rispetto a tre assi ortogonali. 170.

Lez.ª 32.ª

Projezione di una retta sopra due assi ortogonali; projezioni di più rette, e di un poligono chiuso sopra una retta, essendo le rette, e la retta di projezione in un piano. Projezione di una retta, di più rette, di un poligono sghembo collocate comunque nello spazio sopra di una retta. Formole per la trasformazione delle coordinate. 170–173

Projezioni di un'area su tre piani ~~coordinati~~ 174.

Lez.ª - 33.ª Date le projezioni di un'area su tre piani ortogonali, trovare le projezioni della medesima area su tre piani coordinati determinati relativamente ai primi. 175–176

Relazione che esiste tra queste e le projezioni date indipendente dalla posizione dei nuovi piani coordinati. Determinazione del piano, sul quale la projezione dell'area è massima.

Lez.ª - 34.ª Dati i momenti, o le somme dei momenti di rotazione di più forze rispetto a tre assi ortogonali, trovare i momenti, o le somme dei momenti delle stesse forze rispetto a tre assi ortogonali diversi dai primi. 177–178.

Teorema della composizione dei momenti di rotazione di più forze. 179–180

Trasformare i momenti di rotazione rispetto ad un sistema di assi ortogonali in momenti rispetto ad un sistema parallelo al primo. 181–182.

Lez.e 35.a Teoria delle Coppie. Composizione delle Coppie. 182-188.

Lez.e 36.a Un sistema qualunque di forze applicate ad un sistema rigido si può sempre ridurre ad un sistema di una forza, e di una Coppia, o di due forze. 186-190.

Condizione analitica necessaria perchè il sistema abbia una risultante unica. 191.

Condizione perchè il sistema si riduca ad una Coppia. id.

Caso in cui la risultante unica del sistema passa per l'origine degli assi coordinati 192.

Condizioni d'equilibrio di un sistema di forze applicate ad un sistema rigido. id.

Equazioni della direzione della risultante unica del sistema, quando essa esiste 192-193.

Lezione 37.a Esempii di sistemi di forze applicati a sistemi rigidi liberi. 193-194.

Lez.e 38.a Due altri modi di dimostrare le condizioni d'equilibrio di un sistema rigido 196.

Condizioni d'equilibrio di più forze applicate ad un sistema rigido ritenuto da un punto fisso, da due punti fissi, ritenuto sopra un piano per tre punti, per due punti, per un punto solo. 197.

Condizione d'equilibrio di un corpo infilzato in un'asta, in due aste parallele. 198.

Condizione d'equilibrio di un corpo appoggiato ad una superficie resistente. id.

Condizioni d'equilibrio di due corpi, che si toccano, di tre corpi, che si toccano, di un numero qualunque di corpi, che si toccano. 199-201.

Lez.e 39.a Determinazione delle forze, che sostiene un punto fisso di un sistema rigido, quando in questo non vi è altro punto fisso. Metodo generale per determinare gli sforzi o pressioni sostenute dai punti fissi di un sistema rigido. 202-203.

Casi in cui questo problema è indeterminato; donde proviene l'indeterminazione.

Determinazione degli sforzi sostenuti dai cardini di un sistema rigido volubile intorno ad un'asse. 203-208.

Lez.e 40.a Condizioni d'equilibrio di un sistema di corpi pesanti, di un sistema di corpi pesanti ritenuto da un punto fisso, di un corpo pesante, il quale tocca un piano in un punto, lungo una retta, di un corpo, il quale s'appoggia per più punti sopra un piano. 205-206.

Lezione 41.ª Condizione d'equilibrio di un corpo appoggiato per un punto sopra una superficie curva. 208.

Condizioni d'equilibrio di un corpo il quale si appoggia sopra due piani inclinati, toccandoli ciascuno in un punto, o secondo una retta, o secondo un'area qualunque. 209-211.

Condizioni d'equilibrio di un corpo, il quale si appoggia sopra superficie curve. 211-213.

Equilibrio stabile, instabile, indifferente. 213-214.

Lez.ª 42.ª Regola per conoscere se l'equilibrio d'un corpo è stabile, o instabile; misura della maggiore o minore stabilità dei corpi. 214-219.

Lez.ª 43.ª Continuazione della misura suddetta. Determinazione delle pressioni, che esercita un sistema pesante sui corpi ai quali si appoggia. 219-223.

Lez.ª 44.ª Determinazione di tutte, fra i quali si può applicare un peso ad una stringa rigida sostenuta da due cordoni, perchè questi non si tocchino. 223-224.

Lo stesso problema quando i cordoni sono tre, i quali sostengono un triangolo senza peso ed inflessibile; 224-226.

Lo stesso problema quando i tre cordoni sono in linea retta, e ad essi è attaccata una stringa rigida. 226.

Determinazione ~~degli sforzi sostenuti da due fili~~ delle pressioni, che esercita un corpo su due piani inclinati ai quali si appoggia. 227-229.

Lez.ª 45.ª Sistemi flessibili. Condizioni d'equilibrio di un filo flessibile, di tre fili flessibili annodati insieme in un punto. 230-231.

Tensioni. Scala delle tensioni di un filo, modo di determinarla. 232-234.

Lez.ª 46.ª Condizioni d'equilibrio di due funi insieme annodate, alle cui estremità sono applicate tre forze. Analisi dei diversi casi che si possono presentare; determinazione della figura d'equilibrio graficamente e analiticamente in tutti i casi. 235-239.

Lez.ª 47.ª Condizioni d'equilibrio di un poligono funicolare. 239-241.

Costruzione della figura d'equilibrio, quando i termini del poligono sono liberi. 241-243.

Lezione 48ª. Costruzione della figura d'equilibrio del poligono funicolare quando i termini sono fissi. pag. 243–244.
Costruzione della figura quando alcuni dei vertici del poligono sono liberi;
come in questi casi alcune volte il problema è impossibile, ed alcune ~~volte~~
volte indeterminato. 245.

~~Lez.~~ Condizioni d'equilibrio di un poligono funicolare sghembo; di un
poligono chiuso. Caso in cui a questo poligono sono applicate forze eguali, e
facenti angoli eguali. Condizioni d'equilibrio di un poligono regolare. 246–247.
Lez.ª 49ª. Condizioni d'equilibrio di un poligono funicolare, a cui sono applicate forze
parallele; di un poligono carico di pesi. Costruzione della figura d'equilibrio
di questo poligono, quando i suoi termini sono fissi. 248–252.
Condizioni d'equilibrio di un poligono funicolare, i cui lati sono uniti a nodo;
di un poligono, i cui lati si appoggiano semplicemente l'uno contro l'altro. 253.
Lez.ª 50ª. Condizioni d'equilibrio di un filo sollecitato in ogni suo punto da forze qualun-
que. Curva funicolare. Determinazione della forza, che agisce in un
punto qualunque del filo. 254–258.
Lez.ª 51ª. Equazione differenziale della curva funicolare, quando essa è piana; determinazione
della tensione di ciascun elemento della curva. Esempii. 258–262.
Determinazione della costante, che risulta dall'integrazione dell'equazione
differenziale della curva funicolare; caso in cui i termini della curva sono
liberi, caso in cui sono fissi. 262–263.
Equazione differenziale della curva funicolare, quando le componenti
della forza, che sollecita un tratto di filo di lunghezza = 1, di densità eguale
a quella del filo in un punto qualunque, cilindrico ~~=~~ e la cui lezione è
identica colla lezione normale fatta ~~nella~~ nello stesso punto nel filo disposto secondo la curva
funicolare, sono conosciute in funzione delle coordinate di questo punto. 263–263.

Lez.ª 52.ª Nella curva funicolare la tensione è eguale alla forza normale riferita all'unità di lunghezza moltiplicata pel raggio di curvatura, e l'incremento della tensione è eguale alla forza tangenziale riferita all'elemento della curva. 266.

Quando le forze son normali al filo la tensione è costante per tutti i punti di esso, ed il raggio di curvatura è inversamente proporzionale alla forza normale. 267–268.

Esempii di fili sollecitati da forze normali. 268–270.

Determinazione delle costanti arbitrarie nell'equazione della curva funicolare, quando P e Q son funzioni di x, y. 271.

Lez.ª 53.ª Curva filaria. Metodi analitico e grafico per fare una filaria d'una determinata forma. Interpretazione dei valori negativi, o nulli, od infiniti che può avere la forza normale in un punto della filaria. 271–273.

Se sopra un cilindro circolare noi avvolgiamo un filo, esso si dispone secondo la curva detta elica, e la pressione sul cilindro è costante. 273–274.

Se si mette un filo sopra una superficie curva qualunque obbligandolo a passare per due punti fissi sulla superficie, esso si dispone secondo la curva della minima o della massima distanza tra i due punti fissi. 274.

Proprietà di queste curve. 275.

Lez.ª 54.ª Curva Catenaria. Proprietà generali di questa curva. 275–276.

Equazioni generali di questa curva, donde si ha l'equazione differenziale di essa curva riferita a due assi uno orizzontale, l'altro verticale condotti pel suo punto più basso, ed il valore della tensione. 277.

La catenaria è sempre concava verso il suo asse verticale. 278.

Quando i pesi della catena crescono proporzionalmente alle ~~ascisse~~ ordinate orizzontali la Catenaria è una parabola. 279.

Lez.ne 55.a Catenaria Omogenea. Sua equazione differenziale. Espressione della tensione. 280.

Modi grafici di determinar la tensione in un punto qualunque. 281.

Espressione dell'arco di Catenaria omogenea, modo di averlo graficamente. id.

Equazione finita della Catenaria Omogenea. Questa curva è simmetrica rispetto alla verticale condotta pel suo punto più basso. 282.

Raggio di curvatura di questa curva. 283.

Lez.ne 56.a Determinazione delle Costanti, che entrano nelle equazioni generali della Catenaria omogenea 1° Quando son dati i punti di sospensione e la profondità del punto infimo della curva 2° Quando son dati i punti di sospensione e la lunghezza della catena. 283–288.

Caso in cui i punti di sospensione sono alla stessa altezza dall'orizzonte. Come in questo caso si determini il valore e la direzione della tensione dei punti di sospensione. 288–287.

Lez.ne 57.a Quando la saetta della Catenaria omogenea è piccola, essa Catenaria si confonde sensibilmente con la Catenaria parabola, e con la cicloide. 288.

Applicazione di queste considerazioni alla ricerca della saetta di un filo teso da un peso P molto più grande del suo peso proprio. 288–289.

Dell'estensibilità dei fili. Formola dell'allungamento di un filo cilindrico, ~~pesante~~ ed omogeneo, teso da una forza qualunque. 290.

Allungamento di un filo pesante sospeso verticalmente, e teso oltre al peso proprio da un peso attaccato al suo capo libero. 291–292.

Lez.ne 58.a Equazione differenziale della curva d'equilibrio di una catena omogenea ed estensibile. 292–293.

Rigidezza dei fili; dipende dalla elasticità. Dati dell'esperienza, che servono a misurare l'intensità della forza d'elasticità. Fibra media di un solido elastico. 293–294.

Momento elastico. Curva elastica. Equazione differenziale della curva secondo cui si piega una verga elastica confitta per una estremità in un muro, e portante all'altra estremità un peso; equazione finita di questa curva, quando la saetta di essa è molto piccola. 295-296.

a Lez.ne 59.a Equazione differenziale della curva secondo cui si inflette una verga elastica appoggiata a due punti fissi, e caricata nel suo mezzo di un peso. equazione finita di questa curva, quando la sua saetta è molto piccola. 297-298.

Equazione differenziale della curva d'equilibrio di una verga elastica incastrata per le sue estremità in due muri e caricata nel mezzo di un peso. equazione finita di questa curva, quando ha una saetta molto piccola. 298-300.

a Lez.ne 60.a Equazione differenziale della curva di inflessione di una verga elastica appoggiata ad un piano orizzontale, e caricata di un peso alla sua estremità superiore, il cui centro di gravità si trova sulla verticale, che passa pel punto d'appoggio sul piano orizzontale.
equazione finita, o analisi di questa curva, quando la saetta di inflessione è assai piccola. 300-304.

Dinamica.

Lezione 1.a Moto equabile, rettilineo di un punto. Problemi. Velocità relativa di un punto rispetto ad un'altro. ~~1-5~~ 1-5.

Lez.ne 2.a Spiegazione del fenomeno dell'aberrazione della luce. Moto uniformemente accelerato. 5-6.

Le. 3.a Equazioni generali del moto vario rettilineo. Esempii. 7-10.

Lez.ne 4.a Equazioni del moto verticale di gravi nel vacuo. Misura della gravità. 11-12.
Quantità di moto di gravi cadenti. La forza viva acquistata da un grave cadente in un dato tempo è il doppio della quantità d'azione sviluppata in quel tempo. 13-14.

Equazioni del moto verticale dei gravi salienti. 14–15.

Lez.e 8.a

Misura della quantità d'azione sviluppata da una forza. Chilogrammetro. Unità Dinamica. Cavallo-vapore. Nel moto vario la forza viva è eguale al doppio della quantità d'azione. Esempii di moto vario rettilineo. Moto di un corpo su di un piano orizzontale, tenendo conto dell'attrito, e quindo questa una funzione dello spazio. 15–19.

Lez.e 6.a

Resistenze dei fluidi. Moto ~~verticale~~ orizzontale dei gravi nell'aria. 20–21.

Lez.e 7.a

Moto verticale dei gravi nell'aria. 22–24.

Lez.e 8.a

Attrazione universale; è proporzionale alle masse attraenti, è inversamente proporzionale al quadrato delle loro distanze. 25.

Uno strato sferico omogeneo attrae un punto esterno come se la sua massa fosse raccolta nel centro, e attrae egualmente secondo ogni parte un punto interno. 26.

Attrazione di una sfera, della terra. Equazioni del moto di un corpo esterno al globo terrestre e attratto da questo; equazioni del moto di un corpo collocato nell'interno del globo terrestre; questo moto è oscillatorio, e le oscillazioni sono tautocrone. 26–30.

Lez.e 9.a

Equazioni generali del moto curvilineo di un punto materiale. 31–36.

Lez.e 10.a

Modo geometrico di costruire la traiettoria di un punto. Traiettoria di un grave lanciato orizzontalmente. 37–40.

Velocità assoluta e direzione di questa nel moto curvilineo. 40–41.

Mezzo per riconoscere se il moto curvilineo è ritardato o accelerato 41–42.

Lez.e 11.a

Quando un mobile è attratto o respinto da uno o più punti fissi il trinomio $X dx + Y dy + Z dz$ è differenziale esatto se le intensità delle attrazioni sono funzioni delle distanze. 42–43.

L'incremento di forza viva tra due posizioni del mobile nel moto curvilineo è eguale al doppio della quantità d'azione sviluppata tra le stesse posizioni. 44.

Se danno stesso punto con la stessa velocità iniziale si lanciano in direzioni diverse tanti mobili soggetti alle stesse forze acceleratrici, essi arrivano tutti sulla superficie determinata dall'equazione $\int (X dx + Y dy + Z dz) = h$ con la stessa velocità. 45–46.

Quando un grave cade o sale lungo una qualunque curva ad ogni altezza esso ha la stessa velocità, che le fosse stato dato salendo o cadendo verticalmente alla stessa altezza con la stessa velocità iniziale. 41.

Lez.e 12.a Moto d'un punto attratto da un centro fisso; in questo moto le proiezioni dei raggi vettori sui tre piani ortogonali descrivono aree proporzionali ai tempi; la traiettoria di questo punto è una curva piana. 43—49.

L'orbita descritta da un punto attratto verso un centro fisso da una forza la cui intensità varia in ragione inversa dei quadrati delle distanze è una sezione conica. 50—51.

I pianeti e le comete descrivono sezioni coniche, ed i loro raggi vettori descrivono aree proporzionali ai tempi; dunque gli astri si muovono per l'attrazione del sole, che è una forza diretta verso il sole, la quale varia in ragione inversa dei quadrati delle distanze 51—52.

Lez.e 13.a Equazione della trajettoria di un grave lanciato obliquamente nel vuoto 52—53.

come il grave debba lanciarsi perchè vada a ferire un dato scopo. 54—55.

Lez.e 14.a Equazioni del movimento di un grave lanciato obliquamente nell'aria. 56—58.

Metodo per costruire la trajettoria di un tal grave per punti. 59—60.

Lez.e 15.a Analisi della detta trajettoria; come se ne possano facilmente trovare i punti situati al disotto, e ad una distanza piuttosto grande dal piano orizz.le condotto pel punto di partenza del grave; asintoti della detta curva; 60—62.

Equazione finita della medesima, quando l'inclinazione del tiro è molto grande. 63.

Ricerca del punto in bianco dei pezzi d'artiglieria; determinazione dell'alzo necessario per ferire con una palla da cannone un dato scopo. 63—65.

Formole per determinare il tempo e la velocità nel moto di proiettili nell'aria 65.

Lez.e 16.a Moto di un punto costretto a stare sopra una data curva. Equazioni di questo moto. 66.

La velocità del mobile è la stessa come se fosse libero, quindi il teorema della conservazione delle forze vive, e quest'altro teorema: Se facciamo più curve, che passano tutte da uno stesso punto e gettiamo da ciascuna di esse un mobile assoggettato a certe forze acceleratrici, tutti questi mobili arrivano ad una stessa superficie rappresentata dall'equazione $\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \Pi$ con la stessa velocità. 67—69.

Equazioni del moto di un corpo sopra una superficie curva. 69.

Pressione che un mobile fa sopra una curva piana quando esso è costretto a muoversi sul di essa. 70.

Lez.e 17.a–18.a ++ Forza centrifuga, favorabile nel moto circolare; forza centrifuga dei corpi alla superficie della Terra, della Luna. 71–76.
Lez.e 19.a Se pressione che un mobile costretto a muoversi sopra una data curva fa sulla curva è eguale

alla risultante delle componenti normali delle forze che sollecitano il mobile e della forza centrifuga. 76–80.

Pressione che un mobile costretto a muoversi sopra una superficie curva fa sulla superficie; 80–81.

Curva che il mobile descrive nella superficie; quando esso non è soggetto ad alcuna forza acce-

-leratrice questa curva è la linea la più breve che si possa tirare tra due punti di essa sulla sup.e 81.

++ Pianeti sono attratti egualmente dal Sole a distanze eguali da questo. 77.

Lez.e 20.a–21.a Movimento dei gravi sopra piani inclinati – 81–87.

Lez.e 21.a Movimento di un grave sopra una curva situata in un piano verticale; sulla cicloide. 87–89.

Lez.e 22.a Curva Brachistocrona. Movimento di un grave su di un cicloide verticale. 89–92.

Lez.e 23.a Durata delle oscillazioni di un grave su di un arco circolare di ampiezza finita. 92–94.

Lez.e 24.a Pendolo semplice; come si possa far oscillare per un arco qualunque; durata

di una sua oscillazione per la Cicloide; per archi circolari non molto grandi; 95–96.

Le durate delle oscillazioni di due pendoli in uno stesso luogo stanno come le radici quadre

delle loro lunghezze; e le durate delle oscillazioni di due pendoli della stessa lunghezza

in due luoghi diversi stanno in ragione inversa delle radici quadre delle gravità nei due luoghi; 96.

Le lunghezze di due pendoli nello stesso luogo sono in ragione inversa dei quadrati dei

numeri delle oscillazioni, che i pendoli fanno in tempi eguali, e le gravità di due

luoghi stanno come i quadrati degli stessi numeri riferiti ad un sol pendolo. 96–97.

Le lunghezze dei pendoli che battono i secondi crescono dall'equatore verso il polo;

quindi la Terra è sensibilmente di forma sferoidica e di densità crescente dalla sup.e al centro; 97.

come col pendolo si possa giungere alla conoscenza della densità media della terra. 98–99.

Lez.e 25.a Formole per calcolare la lunghezza del pendolo che batte i secondi, e la gravità ad una latitudine

qualunque: diminuzione della gravità dal polo all'equatore; Lunghezza del pendolo,

e valore della gravità a Torino; come cresca il valore della gravità montando al disopra

del livello del mare. Se si tien conto dell'attrazione della materia, eguale o no tra il livello del mare

ed il luogo che si considera. 99–101.

come si possa dedurre facilmente a priori la formola $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ relativa al pendolo semplice. 101–102.
Moto del pendolo semplice nei mezzi resistenti. Diminuzione della gravità a cagione della resistenza
dell'aria, come diminuisca la durata delle oscillazioni del pendolo passando dall'aria nel vuoto 102–104.
Lez.e 26.a Ogni volta che un punto materiale si muove in grazia di una forza acceleratrice proporzionale alla distanza che resta a percorrere la durata del moto è indipendente dalla distanza
iniziale del mobile. 104.
Movimento dei sistemi.
Lez.e 26–27–28–29–30.a Teorema di D'Alembert. Applicazioni di questo teorema — 105–126.
Lez.e 30.a Moto rotatorio delle masse finite intorno ad un'asse fisso. Momento d'inerzia di un
sistema rispetto ad un'asse fisso. Proprietà generali dei momenti d'inerzia. 126–128.
Dato il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un'asse trovare il momento d'iner-
-zia dello stesso sistema rispetto ad un'asse parallelo al primo e condotto pel centro di
gravità del sistema e rispetto ad un'asse parallelo qualunque. 129–130.
Formole per avere il momento d'inerzia di una massa continua rispetto ad un'asse qual.e 131.
Lez.e 31.a Momenti d'inerzia di una retta, di una circonferenza di circolo, di un disco circolare, di un
cilindro, di un rettangolo, di un parallelepipedo, di un triangolo rettangolo, di un
triangolo qualunque, di un disco ellittico, di un segmento parabolico, di un solido
di rivoluzione, di un cono tronco a basi parallele, di un cono retto circolare, di un'
ellissoide di rivoluzione, di una sfera, di un segmento di paraboloide di rivoluzione. 132–142.
Lez.e 32.a–33.a Velocità angolare; iniziale, Esempii, come varii la velocità angolare per l'aggiunta di 143–149.
una novella massa o con una certa quantità di moto.
Percossa che un sistema rotante urta contro un sistema fisso far soffrire a questo. 150.
Velocità angolare di un sistema soggetto a forze acceleratrici costanti. Esempii. 181–184.
Lez.e 34.a Percosse sui cardini al principio del moto; pressioni sui cardini nella continuazione del
moto quando questo è uniforme. 154–156.
Lez.e 35.a Dati i momenti d'inerzia di un sistema rispetto a tre assi ortogonali trovare il momento rispetto
ad un'altr'asse qualunque condotto per la medesima origine. 157–159.
Come si determinino gli assi principali di un sistema rispetto ad un punto qualunque di esso. 159–160.
Lez.e 36.a Se un'asse principale di un sistema ortogonale di assi è asse principale simile e simmetrico 160.
Se due assi ortogonali son principale, anche il 3.o ortogonale è principale. 161.
Se tre assi principali di un sistema rispetto ad un punto sono tra loro perpendicolari 162.

Qualunque retta d'irrigidita è asse principale. Le dimostrazioni si compiono gli assi principali che passano pel centro di gravità, per un punto qualunque dei quali si conducono due parallele agli altri due assi: queste parallele e l'asse che passa per quel punto sono assi principali. 162–163.

Formola che dà il momento d'inerzia rispetto ad un asse in funzione dei momenti rispetto agli assi principali 164–165.

Legge 3ª Esempii. Se rispetto ai tre assi principali i momenti sono eguali, qualunque retta condotta nel loro piano per la stessa origine è asse principale; e se rispetto a tre assi principali i momenti sono eguali, qualunque retta condotta nel sistema per la stessa origine è asse principale. 165–166.

Legge 4ª Centro di percossa; quando vi è come si determina. 166–168.

Legge 5ª Se l'asse di rotazione passa pel centro di gravità non havvi centro di percossa. 169.

Applicando al sistema due impulsi formanti una coppia l'asse normale al piano pel centro di gravità è asse principale. id.

Se l'asse intorno a cui rota con moto qualsiasi un sistema è asse principale, tutto ad un punto solo può soffrire una pressione come se tutta la massa fosse raccolta nel centro di gravità. 170–171.

Quando un sistema rigido rota intorno ad un asse principale che non passa pel centro di gravità le forze attuali hanno una risultante che passa pel centro di percossa. 171.

Legge 6ª Come si determinino le pressioni sofferte dai cardini di un sistema animato sotto l'azione di un sistema qualunque di forze acceleratrici continue. 172.

Pendolo Composto, equazione differenziale del moto. Centro d'oscillazione. 172–174.

Se il Pendolo composto ha un centro di percossa esso è sull'asse dei centri di oscillazione 174.

Esempii di ricerche di centri d'oscillazione. 175–177.

Legge 7ª Se descrivesi una sup.e cilindrica le cui generatrici sian parallele all'asse di sospensione di cui asse passi pel centro di gravità rispetto alle generatrici di questa superficie di sospensione la durata delle oscillazioni non varia. 178.

Usti rispetto ai quali stacchi generici di sospensione la durata dell'oscillazione è minima. 178–179.

Se un corpo si fa oscillare intorno all'asse del centro di oscillazione le oscillazioni sono della stessa durata, quindi vi son due superficie cilindriche rispetto alle generatrici delle quali prese per assi le oscillazioni sono della stessa durata, per le oscillazioni di minima durata ve ne ha una sola. 180.

Tavola delle materie contenute nelle Lezioni di Meccanica date dal Prof.re Giulio.

Lez.ª 40.ª Metodo sperimentale per determinare il momento d'inerzia di un corpo. 181–182.

Lez.ª 41.ª Centro di oscillazione di un sistema qualunque di corpi legati invariabilmente assieme. 182.

Pendolo balistico di Robins per misurare le velocità con cui escono le palle dai cannoni. 183–184.

altro metodo per misurare le stesse velocità, che consiste nel sospendere il cannone come pendolo. 188–187.

asse nella ruota in movimento — 187–189.

Lez.ª 42.ª Moto intorno ad un punto fisso. Le velocità angolari si compongono e si decompongono 190–193.
come le velocità lineari.

Lez.ª 43.ª Asse istantaneo, permanente. Velocità angolari iniziali con cui il corpo tende a rotare
intorno a tre assi principali condotti pel punto fisso. Asse permanente di rotazione. 193–195.

Lez.ª 44.ª Velocità angolari ~~Lorcui~~ con cui un corpo mobile intorno ad un punto fisso tende a rotare
dopo un tempo qualunque intorno agli assi principali condotti pel punto fisso. 196–197.
Caso in cui le equazioni determinatrici di queste velocità sono integrabili; 197–196.
in questo caso l'integrazione viene ridotta ad un'integrale di formola, che si può eseguire,
1° Quando il corpo rota inizialmente intorno ad un'asse principale, allora quest'asse
è asse permanente; ciò sta anche nel caso in cui il punto fisso è nel centro di gravità
comunque le forze acceleratrici siano applicate al sistema; 198–199.
2° Quando inizialmente il corpo rota intorno ad un'asse vicinissimo ad uno degli assi prin-
cipale, allora se il momento d'inerzia rispetto a quest'asse è massimo o minimo
la rotazione è stabile, se il detto momento è medio la rotazione è instabile; quindi 199–202.
la spiegazione del fenomeno della precessione degli Equinozii.
Posizione degli assi principali condotti pel punto fisso dopo un tempo t rispetto alle
assi assolutamente fissi condotti per lo stesso punto. 202–206.

Lez.ª 45.ª Moto di un corpo rigido, libero, sollecitato da un numero infinito di forze appli-
cate a ciascuna molecola e comunque variabili in grandezza e direzione. 206.
Questo moto si compone di due moti uno progressivo del centro di gravità, come
se tutta la massa del corpo fosse raccolta tutta la massa ed esso fossero immediatamente ap-
plicate tutte le forze; l'altro rotatorio intorno al detto centro come se esso
fosse fisso. Esempii. 206–212.

Lez.ª 46.ª

Leg.ª 48.ª

Percossa Diretta, obliqua, centrale, eccentrica. Cosa intende nell'urto di due corpi elastici [redacted] ~~elastici~~ e nell'urto di due corpi elastici. 213–216.

Percossa diretta e centrale di corpi sferici; velocità comune dopo l'urto di corpi non elastici; l'urto non altera la velocità del centro di gravità; principio della conservazione del movimento del centro di gravità; velocità dei corpi dopo l'urto se sono elastici. 216–218.

Caso di una o più palle che vengono a percuotere altre palle in riposo disposte sulla stessa linea. Direzione delle palle ritenuti eguali tra di loro. Palle ritenuti perfettamente elastici 218.

Caso in cui le masse delle palle che sono [illegible] vanno decrescendo in progressione geom.ª 219–220.

La misura della forza necessaria per mettere una massa in moto è la quantità d'azione che previo la richiede; Perdita di forza viva che ha luogo nell'urto, nulle se le masse sono elastiche, massima se sono elastiche. 220–221.

Leg.ª 49.ª

Problema. Trovare i movimenti di due corpi dopo l'urto 1.° Quando uno è in riposo, e la percossa rispetto al 1.° è diretta e centrale, ~~[illegible]~~ supponendo successivamente il corpo ritenuto dapprima fisso, da un cenno fino, assolutamente libero, e supponendo successivamente che i corpi dopo l'urto rimangano aderenti, non rimangano aderenti, sieno elastici. 221–225.

Leg.ª 50.ª

2.° Quando il 1.° corpo ha prima dell'urto una velocità parallela a quella del 2.°, e rispetto a questo la percossa è diretta e centrale, [illegible] successivamente le stesse ipotesi che nel 1.° caso. 226–228.

Percossa obliqua. Percossa di una sfera contro un piano immobile. 228–230.

Problema. Determinare il moto di due sfere dopo l'urto, quando si muovono prima dell'urto uniformemente con velocità parallele, facendo conto dell'attrito. 230–233.

Leg.ª 51.ª

Delle Forze resistenti.

Cosa sia attrito; da cosa provenga; diverse specie d'attrito; cause che fanno variare l'attrito. 233–234.

Attrito di 1.ª specie. Esperienze di Coulomb; tricometro; risultati delle dette esperienze. 238–236.

Leg.ª 52.ª

attrito di 2.ª specie. Studiato e tenuto da Coulomb pur determinare precisamente le leggi con cui varia quest'attrito. Quest'attrito è proporzionale alla pressione — 236–237.

attrito di 2.ª specie. Esperienze; quest'attrito è proporzionale alla reazione, ed inversamente proporzionale al diametro del cilindro rotante; Donde proviene quest'attrito. 237–238.

Rigidezza delle funi; come sperimentalmente si determini il valore di questa resistenza; è proporzionale inversamente ai raggi della troclea su cui si avvolge la fune; direttamente a una potenza del raggio della fune; crescere rapidamente la tensione di questa. 238–240.

Resistenza dei solidi; come si divida lo studio delle leggi di questa resistenza.

Lez.ne 83.a Resistenza assoluta dei solidi prismatici o cilindrici; resistenza all'allungamento dall'accorciamento; coefficiente di estensibilità; coefficiente di elasticità; legge [illegible] resistenza dei solidi nell'allungarsi o accorciarsi. 241–243.

La resistenza dei solidi si dice schiacciamento, che allo strappamento e proporz.le alla sez.ne trasversale. 243.

Lez.ne 84.a Esempii. Modulo di tenacità. Solido di rivoluzione di egual resistenza allo strappamento. 244–246.

Lez.ne 88.a Resistenza respettiva dei solidi. Ipotesi di Galileo; resistenza di un solido imastrato in un muro e caricato all'altra estremità libera di un peso; è proporzionale alla sezione trasversale del solido, invariamente proporz.le alla lunghezza del solido. ed all'altezza del centro di gravità di questa. Esempii. Forme più convenienti da darsi ai mensoloni. Modiglione di egual resistenza alla rottura; di larghezza costante; di altezza costante; di rivoluzione. 246–282.

Lez.ne 86.a Resistenza respettiva di un solido sostenuto da due appoggi e caricato nel mezzo, caricato in un luogo qualunque. Solido di egual resistenza alla rottura stando appoggiato a due sostegni e di larghezza costante. Determinazione della sezione di rottura di un solido sostenuto da due appoggi e caricato comunque di pesi normalmente alla sua lunghezza. 283–288.

Lez.ne 87.a Ipotesi di Leibnitz. Fibra invariabile di un solido flessibile caricato normalmente alla sua lunghezza di un peso. Ipotesi; le fibre di un solido si inflettono secondo curve parallele a una sezione normale alla lunghezza del solido si mantiene normale alle fibre inflesse. 288–290.

Fibra media di Riella che passa pei centri di gravità delle sezioni trasversali; l'allungamento dell'unità di lunghezza della fibra media è la forza che prenderebbe una parte del solido lunga 1 se fosse tratta longitudinalmente con la forza 1, la quale applicata normalmente alla lunghezza del solido fa allungare la fibra media. 290–292.

Momento di elasticità; invariamente proporzionale al raggio di curvatura della fibra media; esprimibile colla formola $\frac{E}{\rho}$; determinazione di E per varii corpi. 292–293.

Lez.ne 88.a Leggi della resistenza dei solidi alla rottura che quindi nascevano. Momento della resistenza di un solido alla rottura; luogo della rottura; peso che un solido può sostenere senza rompersi. 294–298.

MSS
268B
RB
NMAH

Guilio, C. I.
Lezioni di meccanica.

Manuscript.

[184-?]

SMITHSONIAN
SEP 16 1983
LIBRARIES

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 00331203 0
nmahrb qMSS268 B
Lezioni di meccanica